NGUYỄN ĐỨC TẤN – NGUYỄN ANH HOÀNG – NGUYỄN ĐOÀN VŨ

Chuyên đề
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
TOÁN 9

PHIÊN BẢN MỚI NHẤT

NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Lời nói đầu

Quyển sách *"**Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán 9**"* thuộc tủ sách LUYỆN KĨ NĂNG HỌC GIỎI TOÁN TIỂU HỌC VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ, nhằm đáp ứng nhu cầu luyện tập trau dồi kiến thức, nâng cao kĩ năng học toán và hình thành thói quen tự học cho học sinh

Sách được biên soạn thành hai phần ĐẠI SỐ và HÌNH HỌC. Mỗi phần gồm nhiều chương, trong đó mỗi bài học được chia thành hai phần :

A. Kiến thức và kĩ năng cần nhớ : Hệ thống hoá các kiến thức, kĩ năng cơ bản cần thiết trong từng nhóm bài để giúp học sinh ghi nhớ và vận dụng giải bài tập.

B. Bài tập : gồm các loại sau :

- *Bài tập cơ bản :* Rèn luyện cho các em kĩ năng làm toán và giúp các em củng cố và khắc sâu các kiến thức mới được học.
- *Bài tập nâng cao :* Phát huy tích cực tính sáng tạo và tư duy toán học cho học sinh.
- *Bài chọn học sinh giỏi toán:* Thử sức với các bài toán thi học sinh giỏi ở các địa phương.

Phụ lục các bài toán hay và khó.

Có được quyển sách *"**Bồi dưỡng học sinh giỏi Toán 9**"*, các em được rèn luyện và giải toán ngày càng tốt hơn.

Chúng tôi tin rằng các em sẽ học giỏi toán hơn và thực sự yêu thích môn toán.

Mặc dù đã rất cố gắng trong quá trình biên soạn nhưng chắc hẳn không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được những ý kiến đóng góp từ bạn đọc.

Xin trân trọng cảm ơn.

Các tác giả

Phần ĐẠI SỐ

Chương I. CĂN BẬC HAI – CĂN BẬC BA

§1. CĂN BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Căn bậc hai số học

Định nghĩa : Với số a dương, số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a. Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.

Chú ý : $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = a \end{cases}$

Phép toán tìm căn bậc hai số học của số không âm còn được gọi là phép khai phương (gọi tắt là khai phương).

2. So sánh các căn bậc hai số học

Định lí : Với các số a, b không âm. Ta có $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

3. Căn thức bậc hai : Với A là biểu thức đại số.

$\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) $\Leftrightarrow A \ge 0$.

$\dfrac{B}{\sqrt{A}}$ xác định (hay có nghĩa) $\Leftrightarrow A > 0$.

4. Hằng đẳng thức :

Định lí : Với mọi số a, ta có $\sqrt{a^2} = |a|$.

Từ định lí trên, với A là biểu thức, ta có : $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \ge 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0. \end{cases}$

5. Kiến thức nhắc lại và bổ sung :

a) $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}$;

b) $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \text{ (hoặc } B \ge 0) \\ A = B \end{cases}$;

c) $\sqrt{A^2} = \sqrt{B^2} \Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow A = B$ hoặc $A = -B$;

d) Với $A \ge 0$, ta có : $X^2 \le A^2 \Leftrightarrow |X| \le A \Leftrightarrow -A \le X \le A$.

$X^2 \ge A^2 \Leftrightarrow |X| \ge A \Leftrightarrow X \le -A$ hoặc $X \ge A$.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Tính :

a) $\sqrt{64} - \sqrt{49} - \sqrt{81}$

b) $2\sqrt{16} - 3\sqrt{25} + 4\sqrt{(-7)^2}$

c) $\dfrac{3}{4}\sqrt{256} - \sqrt{625} - \dfrac{1}{2}\sqrt{324}$.

Giải

a) $\sqrt{64} - \sqrt{49} - \sqrt{81} = 8 - 7 - 9 = -8$

b) $2\sqrt{16} - 3\sqrt{25} + 4\sqrt{(-7)^2} = 2.4 - 3.5 + 4.7 = 8 - 15 + 28 = 21$

c) $\frac{3}{4}\sqrt{256} - \sqrt{625} - \frac{1}{2}\sqrt{324} = \frac{3}{4}16 - 25 - \frac{1}{2}18 = 12 - 25 - 9 = -22.$

2. So sánh :

a) 7 và $\sqrt{37} + 1$

b) $\sqrt{17} + \sqrt{50} - 1$ và $\sqrt{99}$

c) $\frac{30 - 3\sqrt{26}}{5}$ và $\sqrt{10}$.

Giải

a) $\sqrt{37} + 1 > \sqrt{36} + 1 = 6 + 1 = 7.$

b) $\sqrt{17} + \sqrt{50} - 1 > \sqrt{16} + \sqrt{49} - 1 = 4 + 7 = 10 = \sqrt{100} > \sqrt{99}$

c) $\frac{30 - 3\sqrt{26}}{5} < \frac{30 - 3\sqrt{25}}{5} = \frac{15}{5} = 3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$.

3. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa :

a) $\sqrt{3x + 6}$

b) $\sqrt{\frac{-3}{3 - 2x}}$

c) $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Giải

a) $\sqrt{3x + 6}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 3x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -2.$

c) $\sqrt{\frac{-3}{3 - 2x}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x \neq 0 \\ \frac{-3}{3 - 2x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 - 2x < 0$ (vì $-3 < 0$) $\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

d) $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$

Vậy $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$ luôn có nghĩa với mọi x.

4. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\sqrt{2(\sqrt{2} - 3)^2}$

b) $\sqrt{(5 - 2\sqrt{6})^2}$

c) $3\sqrt{a^2 - 4a + 4}$ với $a \geq 2$

d) $2\sqrt{9a^2 + 12a + 4}$ với $a < \frac{-2}{3}$.

Giải

a) $3 - 2\sqrt{2}$

b) $5 - 2\sqrt{6}$

c) $3|a - 2| = 3(a - 2)$ vì $a \geq 2$ nên $a - 2 \geq 0$

d) $-2(3a + 2)$.

5. Tìm x, biết :

a) $\sqrt{4x^2} = 8$

b) $\sqrt{16x^2} = |-20|$

c) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = 2$

d) $\sqrt{25x^2 - 10x + 1} = 4x - 9$.

Giải

a) $\sqrt{4x^2} = 8 \Leftrightarrow |2x| = 8$.

– Khi $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ ta có : $2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ (nhận).

– Khi $2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$ ta có : $2x - 8 \Leftrightarrow x = -4$ (nhận).

Vậy các giá trị cần tìm là $x_1 = 4$ và $x_2 = -4$.

b) $x_1 = 5$ và $x_2 = -5$. c) $x_1 = 0$ và $x_2 = -4$. d) $x \in \varnothing$.

6. Giải các phương trình sau :

a) $2x^2 - 6 = 0$ b) $x^2 - 2\sqrt{5} + 5 = 0$.

Giải

a) $2x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

b) $(x - \sqrt{5})^2 = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$.

7. Chứng minh rằng :

a) $(\sqrt{3} - 2)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ b) $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$

Giải

a) $(\sqrt{3} - 2)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2.\sqrt{3}.2 + 2^2 = 3 - 4\sqrt{3} + 4 = 7 - \sqrt{3}$.

b) Ta có : $17 - 12\sqrt{2} = 3^2 - 2.3.2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 = (3 - 2\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} = |3 - 2\sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2}$ $(3 - 2\sqrt{2} > 0)$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

8. a) Chứng minh rằng $\sqrt{3}$, (với $n \in \mathbb{N}^*$) là một số tự nhiên.

b) $\sqrt{3.4 + \frac{1}{5}} + \sqrt{4.5 + \frac{1}{6}} + \sqrt{5.6 + \frac{1}{7}} + \ldots + \sqrt{100.101 + \frac{1}{102}} < 5096$.

Giải

a) *Cách 1.* Ta xác định đa thức f(x) thoả mãn :

$f(x) - f(x - 1) = x^3$ với mọi x và $f(0) = 0$.

Gọi $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$. Do $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$.

Ta có : $f(x) - f(x-1) = 4a^3 - 3(2a - b)x^2 + (4a - 3b + 2x)x - (a - b + c - d)$.

Do $f(x) - f(x - 1) = x^3, \forall x \Leftrightarrow a = c = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$ và $d = 0$.

Vậy $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$.

Ta lần lượt cho x các giá trị 1, 2, 3, ... n. Ta được :

$1^3 = f(1) - f(0)$

$2^3 = f(2) - f(1)$

....

$n^3 = f(n) - f(n - 1)$.

Cộng vế với vế các đẳng thức trên và rút gọn ta được :

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = f(n) - f(0) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3} = \frac{(n+1)n}{2} \in \mathbb{N}$$

(tích hai số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 2).

Cách 2.

Áp dụng hằng đẳng thức : $(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$.

Lần lượt gán cho x các giá trị 0, 1, ..., n ta được :

Với $x = 0$: $1^4 = 1^4$

$x = 1$: $2^4 = 1 + 4.1 + 6.1^2 + 4.1^3 + 1^4$

$x = 2$: $3^4 = 1 + 4.2 + 6.2^2 + 4.2^3 + 2^4$

....

$x = n$: $(n + 1)^4 = 1 + 4.n + 6n^2 + 4n^3 + n^4$

Suy ra : $(n + 1)^4 = (n + 1) + 4.(1 + 2 + \ldots + n) +$

$$+ 6(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 4(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)$$

$$= (n+1) + 4.\frac{n(n+1)}{2} + 6.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4.(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)$$

Vậy: $4.(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = (n + 1)[(n + 1)^3 - 2n - n(2n + 1) - 1]$

$$= (n + 1)^2n^2$$

$\Rightarrow 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Từ đó có điều phải chứng minh.

b) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ và $m \geq 3$, ta có :

$$\sqrt{n(n+1) + \frac{1}{m}} < \sqrt{n(n+1) + \frac{1}{4}} = n + \frac{1}{2}.$$

Do đó $\sqrt{3.4 + \frac{1}{2}} + \sqrt{4.5 + \frac{1}{6}} + \ldots + \sqrt{100.101 + \frac{1}{102}}$

$$< \left(3 + \frac{1}{2}\right) + \left(4 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(100 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= (3 + 4 + \ldots + 100) + \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{98 \text{ số hạng}}\right)$$

$$= \frac{(3+100).98}{2} + \frac{1}{2}.98 = 5047 + 49 = 5096.$$

9. Cho $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ thoả mãn $x^3 + y^3 = 2x^2y^2$. Chứng minh rằng $A = \sqrt{1 - \frac{1}{xy}}$ là một số hữu tỉ.

Giải

$$A = \sqrt{1 - \frac{1}{xy}} = \sqrt{\frac{xy-1}{xy}} = \sqrt{\frac{(xy-1)(x^3y^3)}{(xy)(x^3y^3)}}$$

$$= \sqrt{\frac{x^4y^4 - x^3y^3}{x^4y^4}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2 - x^3y^3}{x^4y^4}} = \sqrt{\frac{(x^3-y^3)^2}{4x^4y^4}} = \left|\frac{x^3-y^3}{2x^2y^2}\right|.$$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

10. a) Chứng minh rằng: $\sqrt{(ab-cd)(bc-da)(ca-bd)}$ là số hữu tỉ trong đó a, b, c, d là các số hữu tỉ thoả mãn điều kiện :

$$a + b + c + d = 0.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2005 – 2006)

b) Tính tổng 2008 chữ số thập phân đầu tiên của số $\sqrt{\underbrace{0,99...99}_{2008\text{ chữ số }9}}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2007 – 2008)

c) Giải phương trình : $(2x-1)^2 = 12\sqrt{x^2-x-2} + 1$

(Đề thi vào lớp 10 trường PTNK, ĐHQG, TP. Hồ Chí Minh (chuyên toán), năm học 2010 – 2011)

Giải

a) Vì $a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b + c = -d$

$$bc - cd = bc + a(a + b + c) = (a + b)(a + c).$$

Lí luận tương tự : $ca - bd = (b + c)(b + a)$: $ab - cd = (a + c)(b + c)$.

Suy ra : $\sqrt{(ab-cd)(bc-ad)(ca-bd)} = |(a+b)(b+c)(c+a)| \in \mathbb{Q}$.

b) Đặt $\underbrace{0,99...9}_{2008\text{ chữ số }9} = a$, ta có : $0 < a < 1 \Rightarrow a < \sqrt{a} < 1$.

Vậy $\underbrace{0,99...9}_{2008\text{ chữ số }9} < \sqrt{\underbrace{0,99...9}_{2008\text{ chữ số }9}} < 1$

$\Rightarrow \sqrt{\underbrace{0,99...9}_{2008\text{ chữ số }9}} = \underbrace{0,99...9}_{2008\text{ chữ số }9}$

Tổng 2008 chữ số thập phân đầu tiên của số $\sqrt{\underbrace{0,99...9}_{2008\text{ chữ số }9}}$ là $9.2008 = 18072$.

c) Đặt $y = \sqrt{x^2-x-2}$ $(y \ge 0)$; $S = \left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}; 3; -2\right\}$

11. Tìm giá trị của x, y để biểu thức

$$B = \sqrt{x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 11} + \sqrt{x^2 + 2x + 3y^2 + 6y + 4}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận Tân Bình, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2003 – 2004)

Giải

$$B = \sqrt{x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 11} + \sqrt{x^2 + 2x + 3y^2 + 6y + 4}$$

$$= \sqrt{(x^2 - 6x + 9) + (2y^2 + 4y + 2)} + \sqrt{(x^2 + 2x + 1) + (3y^2 + 6y + 3)}$$

$$= \sqrt{(3 - x)^2 + 2(y + 1)^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + 3(y + 1)^2}$$

$$\ge \sqrt{(3 - x)^2} + \sqrt{(x + 1)^2} = |3 - x| + |x + 1| \ge 3 - x + x + 1 = 4.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \ge 0 \\ x + 1 \ge 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 4.

§2. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Định lí : Với các số a và b không âm, ta có : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$.

Chú ý : Một cách tổng quát, với các biểu thức A và B không âm, ta có : $\sqrt{AB} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$.

2. Khai phương một tích

Quy tắc : Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

3. Nhân các căn thức bậc hai

Quy tắc : Muốn nhân các căn thức bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

Chú ý : Với $A \ge 0$: $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A$

B/ BÀI TẬP

🕮 BÀI TẬP CƠ BẢN

12. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai, hãy tính :

a) $\sqrt{3}.\sqrt{48}$ b) $\sqrt{7}.\sqrt{63}$

Giải

a) $\sqrt{3}.\sqrt{48} = \sqrt{3.48} = \sqrt{144} = 12$ b) 21

13. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính :

a) $\sqrt{54.6}$ b) $\sqrt{108.48}$

Giải

a) $\sqrt{54.6} = \sqrt{9.6.6} = \sqrt{9}.\sqrt{36} = 3.6 = 18$ b) 72

14. Rút gọn rồi tính : $\sqrt{27,2^2 - 12,8^2}$

Giải

$\sqrt{(27,2-12,8)(27,2-12,8)} = \sqrt{40.14,4} = \sqrt{576} = 24$

15. Tính : $\frac{3}{4}\sqrt{2}\ \left(\frac{4}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3}\sqrt{32} - 4\sqrt{18}\right)$

Giải

$\frac{3}{4}\sqrt{2}\ \left(\frac{4}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3}\sqrt{32} - 4\sqrt{18}\right) = \sqrt{16} - \frac{1}{2}\sqrt{256} - 3\sqrt{144} = 4 - 8 - 36 = -40$

16. Tính :

a) $\sqrt{2\sqrt{6}+5}.\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ b) $(7\sqrt{2} - 2\sqrt{5})(7\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$

c) $(2 + \sqrt{3} + \sqrt{5})(2 - \sqrt{3} - \sqrt{5})$.

Giải

a) $\sqrt{(2\sqrt{6}+5)(5-2\sqrt{6})} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{1} = 1$

b) $(7\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5})^2 = 98 - 20 = 78$

c) $2^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 4 - (8 + 2\sqrt{15}) = -4 - 2\sqrt{15}$

17. So sánh :

a) $5\sqrt{6}$ và $6\sqrt{5}$ b) $\sqrt{24} + \sqrt{26}$ và 10.

Giải

a) Đưa về so sánh $(5\sqrt{6})^2$ và $(6\sqrt{5})^2$ hay so sánh 150 và 180.

Vậy $\sqrt{3} + \sqrt{5} < \sqrt{2} + \sqrt{10}$.

b) Đưa về so sánh $(\sqrt{24} + \sqrt{26})^2$ và 10^2 hay $50 + 2\sqrt{2.24.26}$ và 100.

Do đó đưa về so sánh $2\sqrt{25^2 - 1}$ và 2.25.

Kết quả được $\sqrt{24} + \sqrt{26} < 10$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

18. Rút gọn : $A = \sqrt{\sqrt{2}-1} + \sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{2\sqrt{2}+2}$.

$B = (5 + \sqrt{21})(\sqrt{14} - \sqrt{6})\sqrt{5 - \sqrt{21}}$.

Giải

Đặt $x = \sqrt{\sqrt{2}-1} + \sqrt{\sqrt{2}+1}$, nhận xét : $x > 0$

$\Rightarrow\ x^2 = (\sqrt{\sqrt{2}-1} + \sqrt{\sqrt{2}+1})^2 = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}$

$= 2\sqrt{2} + 2$

$\Rightarrow\ x = \sqrt{2\sqrt{2}+2}$ (vì $x > 0$). Vậy $A = 0$.

19. Giải phương trình :

a) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$

b) $\sqrt{x+\sqrt{x-11}}+\sqrt{x-\sqrt{x-11}}=4$.

Giải

a) Điều kiện $x \geq 1$

Phương trình đã cho trở thành : $\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=1$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1.$$

Áp dụng : $|A| \geq A$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A \geq 0$

$$\begin{cases}\left|\sqrt{x}-1-2\right| \geq \sqrt{x-1}-2\\ \left|\sqrt{x-1}-3\right|=\left|3-\sqrt{x-1}\right| \geq 3-\sqrt{x-1}\end{cases} \Rightarrow \left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right| \geq 1.$$

Từ đó suy ra tập nghiệm phương trình $S = [5 ; 10]$.

b) Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình trở thành : $\sqrt{x+\sqrt{x-11}}=4-\sqrt{x-\sqrt{x-11}}$

$\Rightarrow x = \dfrac{53}{15}$ (loại vì $x \geq 11$). Vậy $S = \varnothing$.

20. Cho x, y, z là các số dương thoả mãn : $x+y+z+\sqrt{xyz}=4$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-z)(4-x)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}-\sqrt{xyz}.$$

Giải

Từ giả thiết : $\sqrt{xyz}+x+y+z=4 \Leftrightarrow 4(x+y+z)+4\sqrt{xyz}=16$.

Ta có : $x(4-y)(4-z)=x[16-4(x+y)+yz]$

$$=x[4(x+y+z)+4\sqrt{xyz}-4(y+z)+yz)]$$

$$=x(2\sqrt{x}+\sqrt{yz})^2=(2x+\sqrt{xyz})^2.$$

Từ đó suy ra :

$$\sqrt{x(4-y)(4-z)}+\sqrt{y(4-x)(4-z)}+\sqrt{z(4-x)(4-y)}-\sqrt{xyz}=8.$$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

21. Giải phương trình :

a) $\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2002 – 2003)

b) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{17-2x}=x^4-8x^3+17x^2-8x+22$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, trường THCS Hoa Lư, Quận 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2008 – 2009)

c) $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2007 – 2008 và năm học 2009 – 2010)

Giải

a) Điều kiện : $x \geq \frac{5}{2}$. Phương trình trở thành :

$$\sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}} + \sqrt{2x-4-2\sqrt{2x-5}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2x-5}+3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-5}-1)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5} + 3 + \left|\sqrt{2x-5}-1\right| = 4$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{2x-5}-1\right| = -(\sqrt{2x-5}-1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-5} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 3.$$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có :

$$\sqrt{(2x+1).9} + \sqrt{(17-2x).9} \leq \frac{2x+1+9}{2} + \frac{17-2x+9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9}.\sqrt{2x+1} + \sqrt{9}.\sqrt{17-2x} \leq 18 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{17-2x} \leq 6$$

Mặt khác : $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 22 = (x^4 - 8x^3 + 16x^2) + (x^2 - 8x + 16) + 6$

$$= (x^2 - 4x)^2 + (x-4)^2 + 6 \geq 6$$

Do vậy $\sqrt{2x+1} + \sqrt{17-2x} = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 22$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = 9 \\ 17-2x = 9 \\ x^2 - 4x = 0 \\ x-4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

c) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có :

$$\sqrt{(x+x^2).1} + \sqrt{(x-x^2).1} \leq \frac{x+x^2+1}{2} + \frac{x-x^2+2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} \leq x+1.$$

Vì dấu "=" xảy ra, do đó $x + x^2 = 1$ và $x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

22. a) Cho a, b > 0, c ≠ 0. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}.$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2005 – 2006)

b) Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn đẳng thức

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} = \sqrt{a+b-c}.$$

Chứng minh rằng : $\sqrt[2006]{a} + \sqrt[2006]{b} - \sqrt[2006]{c} = \sqrt[2006]{a+b-c}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Hà Tĩnh, năm học 2005 – 2006)

Giải

a) Nhận xét $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}=\sqrt{a+b}<\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\Rightarrow c<0$.

Ta có : $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}=\sqrt{a+b} \quad \Leftrightarrow -c=\sqrt{(a+c)(b+c)}$

$\Leftrightarrow c^2=ab+ac+bc+c^2 \ \Leftrightarrow ab+bc+ac=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{ab+bc+ac}{abc}=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$.

b) Từ $\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}=\sqrt{a+b-c}$

$\Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})^2=(\sqrt{a+b-c})^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})=0$.

$\Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{c}=0$ hoặc $\sqrt{b}-\sqrt{c}=0 \Rightarrow \sqrt{a}=\sqrt{c}$ hoặc $\sqrt{b}=\sqrt{c}$

$\Rightarrow a=c$ hoặc $b=c$.

- Nếu $a=c$ thì $\sqrt[2006]{a}+\sqrt[2006]{b}-\sqrt[2006]{c}=\sqrt[2006]{b}=\sqrt[2006]{a+b-c}$.
- Nếu $b=c$ thì $\sqrt[2006]{a}+\sqrt[2006]{b}-\sqrt[2006]{c}=\sqrt[2006]{a}=\sqrt[2006]{a+b-c}$.

§3. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Định lí : Với số a không âm và số b dương, ta có $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

2. Khai phương một thương

Quy tắc : Muốn khai phương một thương $\dfrac{a}{b}$, trong đó số a không âm và số b dương, ta có thể lần lượt khai phương số a và số b, rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

3. Chia hai căn thức bậc hai

Quy tắc : Muốn chia căn bậc hai của số a không âm cho căn bậc hai của số b dương, ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó.

Chú ý : Với các biểu thức A không âm và B dương, ta có : $\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

23. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính :

a) $\sqrt{\dfrac{256}{225}}$ b) $\sqrt{\dfrac{19,6.6,4}{1,69}}$.

Giải

a) $\sqrt{\dfrac{256}{225}}=\dfrac{\sqrt{256}}{\sqrt{225}}=\dfrac{16}{15}$

b) $\sqrt{\dfrac{19,6.6,4}{1,69}}=\sqrt{\dfrac{196.64}{169}}=\dfrac{\sqrt{12544}}{\sqrt{169}}=\dfrac{112}{13}$.

24. Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai, hãy tính : $\dfrac{\sqrt{117}}{\sqrt{52}}$

Giải

$$\frac{\sqrt{117}}{\sqrt{52}} = \sqrt{2,25} = 1,5$$

25. Tính : $\sqrt{\dfrac{6,8^2 - 3,2^2}{21,8^2 - 18,2^2}}$

Giải

$$\sqrt{\frac{(6,8+3,2)(6,8-3,2)}{(21,8+18,2)(21,8-18,2)}} = \sqrt{\frac{10.36}{40.3,6}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

26. Tính : $(7\sqrt{48} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{12}) : 3\sqrt{3}$

Giải

$$(7\sqrt{48} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{12}) : 3\sqrt{3} = \frac{7}{3}\sqrt{16} + \sqrt{9} - \frac{2}{3}\sqrt{4} = \frac{28}{3} + 3 - \frac{4}{3} = 11$$

27. Giải phương trình : $\sqrt{3}.x - \sqrt{48} = 0$

Giải

$$\sqrt{3}.x - \sqrt{48} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$$

28. Giải phương trình : $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5$

Giải

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5 \Leftrightarrow |x - 2| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 5 \\ x - 2 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

29. Thực hiện phép tính : $A = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{5}{7}} + \sqrt{\frac{5}{13}} + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{\frac{7}{13}} + \sqrt{\frac{7}{5}} + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{1\frac{6}{7}} + \sqrt{2\frac{3}{5}} + 1}$

Giải

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}.\left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{7}\left(\frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{13}\left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{13}}}{\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{13}}} = 1.$$

30. Cho biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{\frac{16}{x^2} - \frac{8}{x} + 1}}$.

Rút gọn P, rồi tìm giá trị của x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

$$A = \begin{cases} \dfrac{4x}{x-4} \text{ với } 4 < x < 8 \\ \dfrac{2x\sqrt{x-4}}{x-4} \text{ với } x \geq 8. \end{cases}$$

- Xét : $4 < x < 8$, ta có $A = \dfrac{4(x-4)+16}{x-4} = 4 + \dfrac{16}{x-4} > 8$.
- Xét : $x \geq 8$, ta có $A = 2\left(\sqrt{x-4} + \dfrac{4}{\sqrt{x-4}}\right) \geq 2.2\sqrt{\sqrt{x-4}.\dfrac{4}{\sqrt{x-4}}} = 8$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x - 4 = \dfrac{4}{\sqrt{x-4}} \Leftrightarrow x = 8$ (thoả mãn).

31. Cho $-1 < x < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}$

Giải

Đặt $\sqrt{1+x} = a$, $\sqrt{1-x} = b$, ta có a , b > 0

$$A = \frac{a^2+4b}{ab} \geq \frac{2\sqrt{a^2.4b}}{ab} = 4.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 1 + x = 4(1-x) \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5} \in (-1\,;\,1)$.

Vậy GTNN của A bằng 4 (tại $x = \dfrac{3}{5}$).

🕮 BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

32. Chứng minh rằng : $\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}} + \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}} = 1$.

(Đề thi vào lớp 10 khối chuyên Toán – Tin, trường ĐHSP Hà Nội, năm học 2002 – 2003)

Giải

a) $$\frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{4+2\sqrt{3}})} + \frac{4-2\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{4-2\sqrt{3}})}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1) = 1$$

33. a) Với những giá trị của x thoả mãn điều kiện $x \ge -\frac{1}{2}$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x + 2} + 2\sqrt{x+3} - 2x.$$

(Đề thi vào lớp 10 khối chuyên Toán, ĐHQG Hà Nội, năm học 2006 – 2007)

b) Cho a > 0, b > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \frac{(x+a)(x+b)}{x} \text{ với } x > 0.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, trường THCS Colette, Quận 3, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1997 – 1998)

Giải

a) $f(x) = \sqrt{(2x+1)(x+2)} + \sqrt{4(x+3)} - 2x$.

Vì $x \ge -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + 1 \ge 0, x + 2, x + 3 > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có :

$$\sqrt{(2x+1)(x+2)} + \sqrt{4(x+3)} \le \frac{2x+1+x+2}{2} + \frac{4+x+3}{2} = 2x+5$$

$\Rightarrow f(x) \le 5$.

Vậy GTNN của f(x) bằng 5 (tại x = 1).

b) $A = \frac{(x+a)(x+b)}{x} = \frac{x^2 + ab + (a+b)x}{x}$

$$= x + \frac{ab}{x} + a + b \ge 2\sqrt{x.\frac{ab}{x}} + a + b = 2\sqrt{ab} + a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{ab}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

§4. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN CĂN THỨC BẬC HAI

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn :

Với hai biểu thức A, B mà B ≥ 0 thì $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$, tức là :

– Nếu A ≥ 0 và B ≥ 0 thì : $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$;

– Nếu A < 0 và B ≥ 0 thì : $\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}$.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn :

– Nếu A ≥ 0 và B ≥ 0 thì : $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$;

– Nếu A < 0 và B ≥ 0 thì : $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$.

3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn :

Với hai biểu thức A, B mà A.B ≥ 0 và B ≠ 0, ta có : $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{AB}}{|B|}$.

4. Trục căn thức ở mẫu :

a) Với các biểu thức A, B mà B > 0, ta có : $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$;

b) Với các biểu thức A, B, C mà A ≥ 0 và $A \neq B^2$, ta có :

$$\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B} \ ;$$

c) Với các biểu thức A, B, C mà A ≥ 0, B ≥ 0 và A ≠ B, ta có :

$$\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$$

Lưu ý : Giả sử A là biểu thức vô tỉ. Ta gọi biểu thức liên hợp của A là B, B khác không thỏa tích AB là một biểu thức hữu tỉ (không chứa căn thức). Khi đó biểu thức A cũng là biểu thức liên hợp của biểu thức B. Biểu thức liên hợp không duy nhất, nhưng ta sẽ cố gắng tìm biểu thức đơn giản.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

34. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn :

a) $\sqrt{(-7)(-14)a^4b^2}$ (với b > 0) b) $\dfrac{1}{x-y}\sqrt{x^4(x^2+y^2-2xy)}$ (với x < y).

Giải

a) $\sqrt{(-7)(-14)a^4b^2} = \sqrt{7^2.2.(a^2)^2b^2} = 7|a^2|.|b|\sqrt{2} = 7a^2b\sqrt{2}$ (vì b > 0)

b) $\dfrac{1}{x-y}\sqrt{x^4(x^2+y^2)} = \dfrac{1}{x-y}\sqrt{(x^2)^2(x-y)^2} = \dfrac{|x^2||x-y|}{x-y} = -\dfrac{x^2(x-y)}{x-y} = -x^2$.

35. Đưa thừa số vào dấu căn : $(x-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (với x > 1)

Giải

$$(x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \sqrt{\frac{(x-1)^2(x+1)}{x-1}} = \sqrt{x^2-1} \text{ (vì } x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0)$$

36. Khử mẫu của biểu thức lấy căn :

a) $\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}}$ (với a ≥ −1 và a ≠ 0) b) $(a+b)\sqrt{\dfrac{2}{a^4-2a^2b^2+b^4}}$ (với a ≠ ±b).

Giải

a) $\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}} = \sqrt{\frac{a+1}{|a|}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{a+1}}{a} & \text{khi } a > 0 \\ -\frac{\sqrt{a+1}}{a} & \text{khi } -1 \le a < 0 \end{cases}$

b) $(a+b)\sqrt{\frac{2}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}} = (a+b)\sqrt{\frac{2}{(a^2-b^2)^2}} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{|a^2-b^2|}$

$= \begin{cases} \frac{(a+b)\sqrt{2}}{a^2-b^2} & \text{khi } |a| > |b| \\ -\frac{(a+b)\sqrt{2}}{a^2-b^2} & \text{khi } |a| < |b| \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{a-b} & \text{khi } |a| > |b| \\ -\frac{\sqrt{2}}{b-a} & \text{khi } |a| < |b|. \end{cases}$

37. Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{7-6\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$

c) $\frac{2x-6}{\sqrt{x^2-9}}$ (với $x < -3$ hay $x > 3$).

Giải

a) $\frac{7-6\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(7-6\sqrt{2}).\left[(\sqrt{6}-\sqrt{3})+\sqrt{2}\right]}{\left[\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right]\left[(\sqrt{6}-\sqrt{3})+\sqrt{2}\right]}$

$= \frac{(7-6\sqrt{2}).\left[(\sqrt{6}-\sqrt{3})+\sqrt{2}\right]}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{(7-6\sqrt{2}).(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(6-6\sqrt{2}+3)-2}$

$= \frac{(7-6\sqrt{2}).(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}{7-6\sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{3}+\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)+(2+\sqrt{6}+\sqrt{8})}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)+\sqrt{2}.(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)(1+\sqrt{2})}$

$= \frac{1.(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1).(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2} - 1$

c) $\frac{2x-6}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{(2x-6).\sqrt{x^2-9}}{(\sqrt{x^2-9})} = \frac{2(x-3).\sqrt{x^2-9}}{(x-3)(x+3)} = \frac{2\sqrt{x^2-9}}{x+3}$ (với $x < -3$ hay $x > 3$).

38. So sánh hai số (không dùng máy tính)

a) $\sqrt{a-b}$ và $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (với $a > b > 0$)

b) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{2}$ và 0

c) $\sqrt{2009}-\sqrt{2008}$ và $\sqrt{2007}-\sqrt{2006}$.

Giải

a) $\sqrt{a-b} > \sqrt{a}-\sqrt{b}$

b) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}.(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}$

$= \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}-\sqrt{2} = \dfrac{(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt{2} = \sqrt{2}-\sqrt{2} = 0$

c) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có : $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = n+1-n = 1$

$\Rightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Do đó : $\sqrt{2009}-\sqrt{2008} = \dfrac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2008}}$ và

$\sqrt{2007}-\sqrt{2006} = \dfrac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2006}}$.

Mà : $\dfrac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2008}} < \dfrac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2006}}$

$\Rightarrow \sqrt{2009}-\sqrt{2008} < \sqrt{2007}-\sqrt{2006}$.

39. a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự giảm dần :

$\sqrt{69}$; $3\sqrt{7}$; $6\sqrt{2}$; $2\sqrt{17}$; $5\sqrt{3}$

b) So sánh tổng $S = \sqrt{1.2007}+\sqrt{3.2005}+\sqrt{5.2003}+\ldots+\sqrt{2007.1}$ và 1004^2.

Giải

a) Ta có : $\sqrt{69}$; $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$; $6\sqrt{2} = \sqrt{72}$; $2\sqrt{17} = \sqrt{68}$; $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$.

Vì : $\sqrt{75} > \sqrt{72} > \sqrt{69} > \sqrt{68} > \sqrt{63}$

$\Rightarrow 5\sqrt{3} > 6\sqrt{2} > \sqrt{69} > 2\sqrt{17} > 3\sqrt{7}$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương a và b, ta có $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$. Nếu $a \ne b$, ta có $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$.

Do đó : $\sqrt{1.2007} < \dfrac{1+2007}{2} = 1004$

$$\sqrt{3.2005} < \frac{3+2005}{2} = 1004$$

. . . .

$$\sqrt{2007.1} < \frac{2007+1}{2} = 1004$$

$$\Rightarrow \sqrt{1.2007} + \sqrt{3.2005} + \sqrt{5.2003} + \ldots + \sqrt{2007.1}$$

$$< [(2007-1):2+1].1004$$

$\Rightarrow S < 1004^2$.

40. Tính tổng :

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2007}-\sqrt{2008}};$$

$$S_2 = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{121\sqrt{120}+120\sqrt{121}}.$$

Giải

* $S_1 = -1 - \sqrt{2008}$.

* Với mọi $x \in \mathbb{N}^*$, ta có : $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n}.(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n}.(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}).(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}.\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Do đó : $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{121\sqrt{120}+120\sqrt{121}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{120}} - \frac{1}{\sqrt{121}} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}.$$

41. Giải phương trình :

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 1.$$

Giải

$$\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 1 \text{ (ĐK : } x \geq 0)$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x + 3 = 1 + 2\sqrt{x} + x \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (nhận). Vậy $S = \{1\}$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

42. Cho $x = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{3+4} + \ldots + \dfrac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{99+100}$.

Chứng minh rằng $x < \dfrac{1}{2}$.

Giải

Xét $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+(n+1)} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n+1}} < \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n}}$

$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Do đó : $x < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{99}} - \dfrac{1}{\sqrt{100}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{9}{20} < \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

43. Rút gọn biểu thức : $A = \dfrac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$.

Giải

ĐK : $x > 3$ hoặc $x \le -3$. Với $x > 3 \Rightarrow x+3 > x-3 > 0$, ta có :

$$A = \frac{\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}(2\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})} = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$$

Với $x \le -3 \Rightarrow 3-x > -3-x \ge 0$, ta có :

$$A = \frac{\sqrt{-x-3}.(-\sqrt{-x-3}+2\sqrt{3-x})}{-\sqrt{3-x}(2\sqrt{3-x}-\sqrt{x-3})} = -\sqrt{\frac{-x-3}{3-x}} = -\frac{\sqrt{x^2-9}}{3-x} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}.$$

44. Giải phương trình : $\sqrt{2x^2+16x+18} + \sqrt{x^2+1} = 2x+4$.

Giải

Điều kiện : $x \le -4 - \sqrt{7}$ hoặc $-4 + \sqrt{7} \le x \le -1$ hoặc $x \ge 1$.

Nhận xét : $(2x+4)^2 - (2x^2+16x+18) = 2(x^2-1)$.

Phương trình đã cho có dạng : $\sqrt{x^2-1} = 2x + 4 - \sqrt{2x^2+16x+18}$ (1).

Kiểm tra $x = \pm 1$ là nghiệm của phương trình (1).

Với $x \ne \pm 1$: Nhân cả hai vế với biểu thức liên hợp với vế phải ta được :

$$\sqrt{x^2-1}\,(2x+4+\sqrt{2x^2+16x+18}) = 2x^2-2 \ (2).$$

Nhân cả hai vế của (1) với $\sqrt{x^2-1}$, ta được :

$$\sqrt{x^2-1}\,(2x+4-\sqrt{2x^2+16x+18}) = x^2-1 \ (3).$$

Từ (2) và (3) cho : $4(x+2)\sqrt{x^2-1} = 3(x^2-1)$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-1}\,(3\sqrt{x^2-1} - 4x - 8) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3\sqrt{x^2-1} = 4x+8 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ 7x^2+64x+73 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-32+3\sqrt{57}}{7}.$

So với ĐK, ta được tập nghiệm phương trình : $S = \left\{-1\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{-32+3\sqrt{57}}{7}\right\}$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

45. Giải phương trình

a) $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} = x-2$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 12, cấp Quốc gia, năm học 2001 – 2002)

b) $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi tỉnh Bắc Giang, năm học 2007 – 2008)

c) $\sqrt{2059-x} + \sqrt{2053-x} + \sqrt{2154-x} = 24$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận Tân Bình, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011)

Giải

a) ĐK : $\begin{cases} 10-3x \ge 0 \\ 4-3\sqrt{10-3x} \ge 0 \\ x-2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le \dfrac{10}{3} \\ 3\sqrt{10-3x} \le 4 \end{cases}$ (*).

Ta có : $4-3\sqrt{10-3x} - 1 = x-3$

$$\Leftrightarrow \frac{(4-3\sqrt{10-3x})-1}{\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}+1} = x-3 \Leftrightarrow \frac{3(1-\sqrt{10-3x})}{\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}+1} = x-3$$

$$\Leftrightarrow 3.\frac{1-(10-3x)}{(\sqrt{10-3x}+1)(\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}+1)} = x-3$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{9}{(\sqrt{10-3x}+1)(\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}+1)} - 1\right] = 0 \ (1).$$

Do $x \ge 2$ nên $\sqrt{10-3x} + 1 \le \sqrt{10-3.2} + 1 = 3$ (2).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$. Ta có : $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} + 1 \le \sqrt{4} + 1 = 3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{10}{3}$ (3).

Từ (2) và (3), ta suy ra : $(\sqrt{10-3x} + 1)(\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} + 1) < 9$.

Vậy (1) $\Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (thoả điều kiện).

b) $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1} - 3)(\sqrt{x^2+1} - x) = 0$.

Từ đó tìm được nghiệm phương trình là $x_1 = 2\sqrt{2}$; $x_2 = -2\sqrt{2}$.

c) $\sqrt{2059-x} + \sqrt{2035-x} + \sqrt{2154-x} = 24$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (2010-x)\left(\frac{1}{\sqrt{2059-x}+7} + \frac{1}{\sqrt{2035-x}+5} + \frac{1}{\sqrt{2154-x}+12}\right) = 0$$

46. Cho các số thực x, y thoả mãn điều kiện : $(x + \sqrt{1+y^2})(y + \sqrt{1+x^2}) = 1$.

Chứng minh rằng : $(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1999 – 2000)

Giải

Ta có : $(x - \sqrt{1+y^2})(y - \sqrt{1+x^2}) = \ldots = 2xy + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - 1$.

Kết hợp với đẳng thức đã cho, ta được :

$$(x^2 - 1 - y^2)(y^2 - 1 - x^2) = 2xy + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(1 - xy) = 2\sqrt{(xy-1)^2 + (x+y)^2} + (x^2 - y^2)^2 \ (*).$$

Do đó $1 - xy \ge \sqrt{(xy-1)^2 + (x+y)^2} \ge \sqrt{(xy-1)^2} = |1 - xy|$.

Lại có : $|1 - xy| \ge 1 - xy$.

Suy ra : dấu bằng trong (*) xảy ra. Vậy $x = -y$. Ta có điều phải chứng minh.

§5. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

Để rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

47. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\frac{3}{2}\sqrt{32} - \frac{2}{5}\sqrt{50} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt{20} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{45})(15\sqrt{2} + \sqrt{5})$.

Giải

a) $6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{15}{4}\sqrt{2}$ b) $(15\sqrt{2} - \sqrt{5})(15\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 445$.

48. Rút gọn các biểu thức (với $a > 0$, $b > 0$)

a) $\sqrt{ab} - 2a\sqrt{\frac{b}{a}} - 3b\sqrt{\frac{a}{b}} + ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$

b) $5a\sqrt{ab^3} - 3\sqrt{25a^3b^3} - 2b\sqrt{9a^2b} - 7a^2b^2\sqrt{\frac{1}{ab}}$.

Giải

a) $\sqrt{ab} - 2\sqrt{ab} - 3\sqrt{ab} + \sqrt{ab} = -3\sqrt{ab}$

b) $5ab\sqrt{ab} - 15ab\sqrt{ab} - 6ab\sqrt{ab} - 7ab\sqrt{ab} = -23ab\sqrt{ab}$.

49. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})^2$

b) $\left(3\sqrt{8} - 6\sqrt{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{50}\right) : \left(\frac{1}{2}\sqrt{24,5} - \sqrt{4,5} + \frac{3}{4}\sqrt{12,5}\right)$

c) $\frac{2\sqrt{24} - \sqrt{120}}{4\sqrt{5} - 8} + \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{30}}{\sqrt{20} + \sqrt{12}}$.

Giải

a) $(30 - 12\sqrt{6}) - (35 - 12\sqrt{6}) = -5$

b) $12\sqrt{2} : \dfrac{17}{8}\sqrt{2} = \dfrac{96}{17}$

c) $\dfrac{\sqrt{24}(2-\sqrt{5})}{4(\sqrt{5}-2)} + \dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \dfrac{-2\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}}{2} = 0.$

50. Rút gọn biểu thức sau : $3x - 1 - \sqrt{1-6x+9x^2}$ với $x > \dfrac{1}{3}$

Giải

$3x - 1 - |1 - 3x| = 3x - 1 - (3x - 1)$ (vì $x > \dfrac{1}{3}$ nên $1 - 3x < 0$) $= 0$

51. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với $a \geq 0$, $b \geq 0$ và $a \neq b$

b) $\left(3 + \dfrac{a-4\sqrt{a}}{4-\sqrt{a}}\right)\left(3 + \dfrac{a-5\sqrt{a}}{\sqrt{a}-5}\right)$ với $a \neq 16$, $a \neq 25$, $a \geq 0$.

Giải

a) $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = (\sqrt{a}+\sqrt{b}) - (\sqrt{a}+\sqrt{b}) = 0$

b) $\left[3 - \dfrac{\sqrt{a}(4-\sqrt{a})}{4-\sqrt{a}}\right].\left[3 + \dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-5)}{\sqrt{a}-5}\right] = (3 - \sqrt{a})(3 + \sqrt{a}) = 9 - a.$

52. Tìm x biết : $\sqrt{4x+4} - \sqrt{25x+25} + \sqrt{16x+16} = 3$

Giải

Đưa về tìm x thỏa mãn $2\sqrt{x+1} - 5\sqrt{x+1} + 4\sqrt{x+1} = 3$

hay $\sqrt{x+1} = 3$ và tìm được $x = 8$.

53. Tính giá trị của biểu thức sau :

$$\sqrt{15a^2 - 8a\sqrt{15} + 16} \text{ với } a = \sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Giải

$$\sqrt{(a\sqrt{15}-4)^2} = \left|a\sqrt{15}-4\right| = \left|\left(\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\sqrt{15} - 4\right| = |-2| = 2$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

54. Cho biểu thức $P = \dfrac{3x+5\sqrt{x}-11}{x+\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{2}{\sqrt{x}+2} - 1$

a) Rút gọn P. Tìm x để $|P| = 2$

b) Tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Giải

a) ĐK : $x \geq 0$; $x \neq 1$.

$$P = \frac{3x + 5\sqrt{x} - 11}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2} - 1 = \dots = \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} + 2}$$

Do $P > 0$ nên $|P| = 2$.

Vậy $|P| = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} + 2} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 4 = \sqrt{x} + 7 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3$

$\Leftrightarrow \quad x = 9$ (thoả mãn ĐK).

b) $P = 1 + \dfrac{5}{\sqrt{x} + 2}$. Do $\sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{x} + 2} \leq \dfrac{5}{2} \Rightarrow 1 < P \leq \dfrac{7}{2}$.

$P \in \mathbb{Z}$ nên $P = 2$ hay $P = 3$.

Nếu $P = 2$ thì $x = 9$.

Nếu $P = 3$ thì $3\sqrt{x} + 6 = \sqrt{x} + 7 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

Để P có giá trị nguyên thì $x \in \left\{\dfrac{1}{4} \; ; \; 9\right\}$.

55. Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1} + \dfrac{x - 1}{2x - \sqrt{x} - 1} \cdot \left(\dfrac{2x\sqrt{x} - x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 1} - \dfrac{x - \sqrt{x}}{x - 1}\right)$.

a) Rút gọn A. Tính giá trị của A với $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Giải

ĐK : $x \geq 0$; $x \neq 1$.

a) Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$.

$$A = \frac{t}{2t + 1} + \frac{(t - 1)(t + 1)}{(t - 1)(2t + 1)} \cdot \left[\frac{2t^3 - t^2 - t}{(t + 1)(t^2 - t + 1)} - \frac{t(t - 1)}{(t - 1)(t + 1)}\right]$$

$$= \dots = \frac{t^2 - t}{t^2 - t + 1}.$$

Thay $t = 7 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$.

Lúc đó $A = \dfrac{5 - 3\sqrt{3}}{6 - 3\sqrt{3}} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{3}$.

b) $A = 1 - \dfrac{1}{x^2 - \sqrt{x} + 1}$.

Mà $x^2 - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \Rightarrow A \geq 1 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$ (thoả)

Vậy GTNN của A bằng $-\frac{1}{3}$ (tại $x = \frac{1}{4}$).

56. Cho $M = \frac{a^2 - 3a\sqrt{a} + 2}{a - 3\sqrt{a}}$. Tìm các số nguyên a để M là số nguyên.

Giải

ĐK : $a > 0$ và $a \neq 9$. Ta có : $M = a + \frac{2}{a - 3\sqrt{a}}$.

Để M là số nguyên thì $\frac{2}{a - 3\sqrt{a}}$ phải là số nguyên.

Khi $a \in \mathbb{N}$ thì $\sqrt{a}$ hoặc là số nguyên hoặc là số vô tỉ.

Do đó, để $\frac{2}{a - 3\sqrt{a}}$ là số nguyên thì $\sqrt{a}$ là số nguyên

$\Rightarrow a - 3\sqrt{a}$ là ước của 2, nên $\sqrt{a}$ là ước tự nhiên của 2.

Vậy $\sqrt{a} \in \{1 ; 2\} \Leftrightarrow a \in \{1 ; 4\}$.

- Với $a = 1$ thì $a - 3\sqrt{a} = -2$, khi đó $M = 0$ (thích hợp).
- Với $a = 4$ thì $a - 3\sqrt{a} = -2$, khi đó $M = 3$ (thích hợp).

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

57. Cho biểu thức : $P = \left[1 - \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9}\right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6}\right]$

(với $x \geq 0$; $x \neq 9$; $x \neq 4$).

a) Thu gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để $P = 1$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2003 – 2004)

Giải

a) $P = \frac{3}{\sqrt{x} - 2}$.

b) Với $x \geq 0$, $x \neq 9$, $x \neq 4$, ta có :

$$P = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} - 2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25 \text{ (thoả mãn)}.$$

58. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + x + 1 \quad (x > 0)$

b) $B = \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1}\right)\left(\frac{x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}\right) \quad (x > 0)$.

(Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2004 – 2005)

Giải

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$.

a) $A = \dfrac{t(t-1)(t^2+t+1)}{t^2+t+1} - \dfrac{t(t+1)(t^2-t+1)}{t^2-t+1} + t^2 + 1$

$= t^2 - t - (t^2 + t) + t^2 + 1 = (t-1)^2 = (\sqrt{x} - 1)^2$.

b) $B = \left(\dfrac{2+t}{(t+1)^2} - \dfrac{t-2}{(t-1)(t+1)}\right).\left(\dfrac{t^3+t^2-t-1}{t}\right)$

$= \dfrac{t^2+t-2-(t^2-t-2)}{(t+1)^2.(t-1)}.\dfrac{(t^2-1)(t+1)}{t} = 2.$

§6. CĂN BẬC BA

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Định nghĩa : Căn bậc ba của một số a là một số x sao cho $x^3 = a$. Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba.

Nhận xét :

– Căn bậc ba của một số dương là số dương ;

– Căn bậc ba của một số âm là số âm ;

– Căn bậc ba của số 0 là số 0 ;

– Căn bậc ba của số a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.

Vậy $\sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = a$.

2. Tính chất :

a) Liên hệ giữa thứ tự và căn bậc ba : nếu $a < b$ thì $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

b) Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương căn bậc ba : với A, B bất kì thì $\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{AB}$.

c) Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương căn bậc ba : với A, B bất kì, $B \neq 0$ thì : $\sqrt[3]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

59. Tính :

a) $\sqrt[3]{343}$ b) $\sqrt[3]{-1000}$ c) $\sqrt[3]{-0,512}$ d) $\sqrt[3]{1,331}$

e) $\sqrt[3]{-0,064}$ f) $\sqrt[3]{-0,729}$.

Giải

a) 7 b) –10 c) –0,8 d) 1,1

e) –0,4 f) –0,9.

60. Tính :

a) $\sqrt[3]{36}.\sqrt[3]{162}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{128}.\sqrt[3]{4}$.

Giải

a) $\sqrt[3]{36.162} = \sqrt[3]{5832} = 18$ b) -3.

61. Tìm x biết : a) $\sqrt[3]{x-1} = 2$ b) $\sqrt[3]{6-3x} = -3$.

Giải

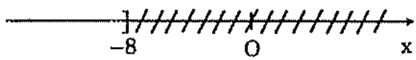
a) Ta có : $(x - 1) = 2^3 = 8$ hay $x = 9$ b) $x = 11$

62. Tìm tập hợp các giá trị x thoả điều kiện sau và biểu diễn tập hợp đó trên trục số

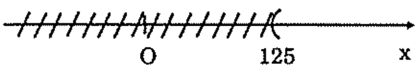
a) $\sqrt[3]{x} \le -2$ b) $\sqrt[3]{x} > 5$.

Giải

a) Ta có : $\sqrt[3]{x} \le -2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \le \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow x \le -8$



b) $x > 125$.



63. So sánh :

a) $2\sqrt[3]{3}$ và $3\sqrt[3]{2}$ b) $4\sqrt[3]{1730}$ và 48.

Giải

a) Ta có : $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$

$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27}.\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$.

Vì $24 < 54$ nên $\sqrt[3]{24} < \sqrt[3]{54}$. Vậy $2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{2}$.

b) $12 = \sqrt[3]{12^3} = \sqrt[3]{1728} < \sqrt[3]{1730}$. Vậy $48 < 4\sqrt[3]{1730}$.

64. Tính :

a) $\sqrt[3]{15\sqrt{3} - 26}$ b) $\sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} - \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$.

Giải

a) $\sqrt[3]{(\sqrt{3} - 2)^3} = \sqrt{3} - 2$

b) $\sqrt[3]{(1 - \sqrt{3})^3} - \sqrt[3]{(1 + \sqrt{3})^3} = (1 - \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

65. Tính $S = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}\,(2 - \sqrt{3}) + \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$.

Giải

Ta có : $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}.(2 - \sqrt{3}) = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^3}.(2 - \sqrt{3}) = 1$.

Đặt $a = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} \Rightarrow a^3 - 3a - 18 = 0$

$\Leftrightarrow (a - 3)(a^2 + 3a + 6) = 0 \Leftrightarrow a = 3$ (vì $a^2 + 3a + 6 > 0$).

Vậy $S = 1 + 3 = 4$.

66. Cho $x = \dfrac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$ và $y = \dfrac{6}{3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}$. Tính giá trị của $A = xy^3 - x^3y$.

Giải

$x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$; $y = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} \Rightarrow A = xy(y + x)(y - x) = 8(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})$.

67. Chứng minh rằng nếu : $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$

thì $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

Giải

Đặt $ax^3 = by^3 = cz^3 = t$.

Ta có : $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{t\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)} = \sqrt[3]{t}$ (1).

Ta lại có : $ax^3 = by^3 = cz^3 = t \Rightarrow x\sqrt[3]{a} = y\sqrt[3]{b} = z\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{t}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{t}.\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = \sqrt[3]{t}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

68. Tính giá trị của biểu thức: $A = (3x^3 + 8x^2 + 2)^{1998}$

với $x = \dfrac{(\sqrt{5} + 2).\sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}}{\sqrt{5} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, toàn quốc, năm học 1997 – 1998)

Giải

Rút gọn : $x = \dfrac{\sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2)^3}.(\sqrt{5} + 2)}{\sqrt{5} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2}} = \dfrac{1}{3}$. Suy ra : $A = 3^{1998}$.

69. a) Đặt $x = \sqrt[3]{a + \dfrac{a+1}{3}\sqrt{\dfrac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \dfrac{a+1}{3}\sqrt{\dfrac{8a-1}{3}}}$.

Chứng minh rằng với mọi $a > \dfrac{1}{8}$ thì x là số nguyên dương.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 1982 – 1983)

b) Giải phương trình $\sqrt[3]{x + 24} + \sqrt{12 - x} = 6$

(Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Toán 9, trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa (Vòng 1), TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011)

Giải

a) Xét $x^3 = 2a + 3x.\sqrt[3]{a^2 - \left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2.\left(\dfrac{8a-1}{3}\right)}$

$\Leftrightarrow x^3 = 2a + 3x.\dfrac{\sqrt[3]{(1-2a)^3}}{3}$

$\Leftrightarrow x^3 = 2a + x(1 - 2a) \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2a) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vì $x^2 + x + 2a = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + 2a - \dfrac{1}{4} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{8a-1}{4} > 0 \left(a > \dfrac{1}{8}\right)$

Vậy x = 1 là số nguyên.

b) ĐKXĐ : $x \le 12$. Đặt $a = \sqrt[3]{x+24}$; $b = \sqrt{12-x}$

Ta có $a + b = 6$ và $a^3 + b^2 = 36$

Do đó $a^3 + (6 - a)^2 = 36 \Leftrightarrow a^3 + a^2 - 12a = 0$

$\Leftrightarrow a(a + 4)(a - 3) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = -4$ hoặc $a = 3$

$S = \{-24 ; -88 ; 3\}$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Tính :

a) $\sqrt{(4+\sqrt{10})^2} - \sqrt{(4-\sqrt{10})^2}$ b) $\sqrt{35-12\sqrt{6}} - \sqrt{30-12\sqrt{6}}$

Giải

a) $|4 + \sqrt{10}| - |4 - \sqrt{10}| = (4 + \sqrt{10}) - (4 - \sqrt{10})$ vì $4 - \sqrt{10} > 0 = 2\sqrt{10}$

b) $\sqrt{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2} = |2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}| - |3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|$

$= (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ (vì $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} > 0$ và $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} > 0$)

$= \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

2. Tính :

a) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$ b) $\dfrac{2}{2\sqrt{2}+3} - \dfrac{2}{2\sqrt{2}-3}$

Giải

a) $(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 18 - 12 = 6$

b) $\dfrac{2(2\sqrt{2}-3) - 2(2\sqrt{2}+3)}{(2\sqrt{2})^2 - 3^2} = \dfrac{4\sqrt{2} - 6 - 4\sqrt{2} - 6}{8-9} = 12$

3. Tính :

a) $(8\sqrt{2} + \sqrt{30}).\sqrt{8-\sqrt{15}}$ b) $\sqrt{10+2\sqrt{3-2\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

c) $\sqrt{4+\sqrt{8}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ d) $(\sqrt{10} + \sqrt{6})(\sqrt{15} - 4)\sqrt{4+\sqrt{15}}$.

Giải

a) $(8 + \sqrt{15})\sqrt{16-2\sqrt{15}} = (8 + \sqrt{15})(\sqrt{(\sqrt{15}-1)^2}$

$= (8 + \sqrt{15})|\sqrt{15} - 1|$

$= (8 + \sqrt{15})(\sqrt{15} - 1) = 7 + 7\sqrt{15}$ (vì $\sqrt{15} > 1$).

b) $\sqrt{10+2\sqrt{3-2\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}}} = \sqrt{10+2\sqrt{3-2\left|2\sqrt{5}-3\right|}} = \sqrt{10+2\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}}$

$= \sqrt{10+2\left|\sqrt{5}-2\right|} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \left|\sqrt{5}+1\right| = \sqrt{5}+1.$

c) $\sqrt{4+\sqrt{8}}\,.\sqrt{2^2-(\sqrt{2+\sqrt{2}})^2} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}\,.\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 2.$

d) $\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{15}-4)\sqrt{4+\sqrt{15}} = (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{15}-4)\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

$= (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{15}-4)\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}$

$= (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2(\sqrt{15}-4) = 2(\sqrt{15}-4)(\sqrt{15}-4) = -2.$

4. Tính :

a) $\dfrac{8+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \dfrac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$

c) $\dfrac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$.

Giải

a) $\dfrac{(8+2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} - \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = -1.$

b) $\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})^2}} - \sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt{\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}}$

$= \dfrac{1}{\left|\sqrt{2}-1\right|} - \dfrac{1}{\left|\sqrt{2}+1\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = 2$ (vì $\sqrt{2}-1>0$).

c) $\dfrac{2(\sqrt{8}-\sqrt{3})}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{8})} - \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{6}(\sqrt{5}+\sqrt{27})} = \dfrac{-\sqrt{6}}{2}.$

5. Tính :

a) $\sqrt{\dfrac{2\sqrt{10}+\sqrt{30}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}} : \dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ b) $(\sqrt[3]{2}+1)\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$.

Giải

a) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}(2\sqrt{5}+\sqrt{15}-2-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}}\,.\,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}}\,.\,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$= \sqrt{\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}}\,.\,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \dfrac{1}{2}.$

b) $(\sqrt[3]{2}+1)\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{3}} = (\sqrt[3]{2}+1)\sqrt[3]{\dfrac{1}{3(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}}$

$= \sqrt[3]{\dfrac{(\sqrt[3]{2}+1)^3}{3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+3}} = \sqrt[3]{\dfrac{2+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1}} = 1.$

6. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \dfrac{(2+\sqrt{a})^2 + (\sqrt{a}-3)^2}{2a-\sqrt{a}}$ (với $a > 0$ và $a \neq \dfrac{1}{4}$)

b) $B = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}+x-\sqrt{x}-1}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{x-1}\right)$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 1$).

Giải

a) $A = \dfrac{(2+\sqrt{a}+\sqrt{a}-3)(2+\sqrt{a}-\sqrt{a}+3)}{\sqrt{a}(2\sqrt{a}-1)} = \dfrac{(2\sqrt{a}-1)(5)}{2\sqrt{a}-1} = 5$

b) $B = \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(x-1)}\right] : \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right]$

$= \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{2}{(\sqrt{x}+1)^2}\right] : \dfrac{(\sqrt{x}+1)-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

7. Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức sau :

$$C = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{1+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right) \text{ với } x = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$$

Giải

Rút gọn ta được $C = \dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}$ và tính được giá trị $C = \dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$.

8. Cho biểu thức : $P = \left(\dfrac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \dfrac{8x}{4-x}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

a) Rút gọn P. Tìm giá trị x để $P = -1$.

b) Tìm m để với mọi giá trị $x > 3$, ta có : $m(\sqrt{x} - 1)P > x + 3$.

Giải

a) $\sqrt[3]{36.162} = \sqrt[3]{5832} = 18$ b) -3.

9. a) ĐK : $x > 0$; $x \neq 4$; $x \neq 1$. Ta có : $P = \dfrac{2x}{\sqrt{x}-1}$.

$P = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$ (thoả ĐK)

b) $m(\sqrt{x} - 1)P > x + 3 \Leftrightarrow (2m-1)x > 3$ (1)

- Nếu $m \leq \dfrac{1}{2}$ thì (1) không thể thoả mãn với mọi $x > 3$.
- Nếu $m > \dfrac{1}{2}$: (1) $\Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2m-1}$.

(1) thoả mãn với mọi $x > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq \dfrac{3}{2m-1} \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$.

10. Cho biểu thức : $P = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \dfrac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x} - 1}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

c) Tìm x để biểu thức $Q = \dfrac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

Giải

ĐK : $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) $P = x - \sqrt{x} + 1$.

b) GTNN của $P = \dfrac{3}{4}$ (tại $x = \dfrac{1}{4}$).

c) $Q = \dfrac{2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} \Rightarrow 0 < Q \le 2$, mà $Q \in \mathbb{Z} \Rightarrow Q = 1$ hay $Q = 2$.

Nếu $Q = 1$ thì $x - 3\sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2$.

$Q = 2$ thì $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0$, phương trình vô nghiệm.

11. Cho biểu thức $M = \left(\dfrac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \dfrac{x + \sqrt{x}}{x - 1}\right) \cdot \dfrac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$

a) Hãy tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa, sau đó rút gọn M.

b) Với giá trị nào của x thì biểu thức M đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó của M.

Giải

a) ĐK : $x \ge 0$; $x \neq 1$; $x \neq \dfrac{1}{4}$. Ta có : $M = \dfrac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$

b) GTNN của $M = 0$ (tại $x = 0$).

12. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $A = 32.\dfrac{x}{y} + 2008.\dfrac{y}{x}$

(với $x, y > 0$ thoả $x + \dfrac{1}{y} \le 1$)

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có :

$$2\sqrt{x.\frac{1}{y}} \le x + \frac{1}{y} \le 1 \Rightarrow \frac{y}{x} \ge 4.$$

$$A = 2\left(\frac{16x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2006.\frac{y}{x} \ge 4\sqrt{\frac{16x}{y}.\frac{y}{x}} + 2006.4 = 8040.$$

Vậy GTNN của $A = 8040$ (tại $x = \dfrac{1}{2}$; $y = 2$).

13. Cho 4 số dương a, b, c, d. Đặt $x = 2a + b - 2\sqrt{cd}$, $y = 2b + c - 2\sqrt{da}$, $x = 2c + d - 2\sqrt{ab}$, $t = 2d + a - 2\sqrt{bc}$. Chứng minh rằng trong 4 số x, y, z, t có ít nhất hai số dương.

Giải

Xét $x + z = (a + c) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{d})^2 > 0 \Rightarrow x + z > 0$

$\Rightarrow$ trong hai số x, z có ít nhất một số dương.

Lập luận tương tự ta có : $y + t > 0$

$\Rightarrow$ trong hai số y ; t có ít nhất một số dương.

Vậy trong bốn số x, y, z, t phải có ít nhất hai số dương.

14. Giả sử x, y là những số không âm thay đổi thoả mãn : $x^2 + y^2 = 1$.

a) Chứng minh rằng : $1 \le x + y \le \sqrt{2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức : $P = \sqrt{1+2x} + \sqrt{1+2y}$.

Giải

a) $(x + y)^2 \le 2(x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow x + y \le \sqrt{2}$.

Lại có : $(x - x)^2 + (y - y)^2 = x(1 - x) + y(1 - y)$.

Vì $\quad x, y \ge 0$ và $x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow \quad 0 \le x ; y \le 1$, do đó $x(1 - x) \ge 0 ; y(1 - y) \ge 0$

$\Rightarrow \quad x + y \ge x^2 + y^2 = 1$.

Vậy $1 \le x + y \le \sqrt{2}$.

b) • $P^2 = (\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+2y})^2 \le 2(2 + 2x + 2y) \le 2(2 + 2\sqrt{2})$

$\Rightarrow P \le \sqrt{4+4\sqrt{2}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

• $P^2 = 2 + 2(x + y) + 2\sqrt{1 + 2(x+y) + 4xy}$.

Vì $x + y \ge 1$ mà $4xy \ge 0 \Leftrightarrow 1 + 2(x + y) + 4xy \ge 3$.

Suy ra : $P^2 \ge 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2 \Rightarrow P \ge \sqrt{3} + 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ ($x = 0$; $y = 1$) hay ($x = 1$; $y = 0$).

15. a) Cho a, b, c thoả mãn $a > c$ và $b > c > 0$. Tìm số n nhỏ nhất để có bất đẳng thức sau : $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \le n\sqrt{ab}$.

b) Chứng minh rằng : với mọi số nguyên dương n

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} \le n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Giải

a) Bất đẳng thức đúng khi $a = b = 2c$.

Do đó $\sqrt{c(2c-c)} + \sqrt{c(2c-c)} \le n\sqrt{2c.2c} \Leftrightarrow n \ge 1$.

Xảy ra được khi $n = 1$.

Thật vậy $\sqrt{\frac{c}{b}.\frac{a-c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{a}.\frac{b-c}{b}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{b+c}{b}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}$.

Vậy n nhỏ nhất là 1

b) Ta có $a + b = \sqrt{(a+b)^2} \le \sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2} = \sqrt{2(a^2+b^2)}$.

Áp dụng, ta được : $\sqrt{1} + \sqrt{n} \le \sqrt{2(n+1)}$, $\sqrt{2} + \sqrt{n-1} \le \sqrt{2(1+n)}$, ...,

$\sqrt{n} + \sqrt{1} \le \sqrt{2(1+n)}$; $\sqrt{n-1} + \sqrt{2} \le \sqrt{2(1+n)}$,...;

$\sqrt{1} + \sqrt{n} \le \sqrt{2(1+n)}$.

Do đó $4(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}) \le 2n\sqrt{2(1+n)}$

$\Rightarrow \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} \le n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

6. Tìm số thực x để giá trị biểu thức $M = \sqrt[3]{3+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{x}}$ là số nguyên.

Giải

Với x = 0 thì M không là số nguyên.

Xét x > 0. Đặt $\sqrt[3]{3+\sqrt{x}} = a$, $\sqrt[3]{3-\sqrt{x}} = b$.

Ta có : a > b và a + b > 0

$$\Rightarrow 6 = (a+b)(a^2+b^2-ab) > (a+b)\left[\frac{(a+b)^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4}\right] = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Do đó $0 < (a+b)^3 < 24$.

Vì a + b là số nguyên. Nên $a + b \in \{1 ; 2\}$.

- Với a + b = 1. Ta có $ab = -\frac{5}{3}$.

  Vì $a^3b^3 = (3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x}) = 9 - x \Rightarrow x = 9 - (ab)^3 = \frac{368}{27}$.

- Với a + b = 2. Ta có $ab = \frac{1}{3}$. Do đó $x = 9 - (ab)^3 = \frac{242}{27}$.

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

§1. NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ – HÀM SỐ BẬC NHẤT

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Khái niệm hàm số

– Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x, x được gọi là *biến số*.

– Hàm số có thể được cho bằng bảng hoặc cho bằng công thức.

Chú ý : Khi hàm số $y = f(x)$ được cho bằng công thức ta hiểu rằng biến số x chỉ nhận những giá trị làm cho công thức có nghĩa.

Khi y là hàm số của x ta có thể viết $y = f(x)$.

Khi cho x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là hàm hằng.

2. Đồ thị của hàm số

– Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, trục nằm ngang Ox được gọi là *trục hoành,* trục thẳng đứng Oy được gọi là *trục tung,* điểm O được gọi là *gốc toạ độ*.

– Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, mỗi cặp giá trị tương ứng biến số x và hàm số y kí hiệu (x ; y) được biểu diễn bởi một điểm, trong đó x gọi là *hoành độ,* y gọi là *tung độ* của điểm biểu diễn.

– Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng (x ; y) trên mặt phẳng toạ độ được gọi là *đồ thị* của hàm số $y = f(x)$.

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

Với x_1, x_2 bất kì thuộc $\mathbb{R}$, ta có :

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

4. Định nghĩa : Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a, b là các số đã cho và $a \neq 0$.

5. Tính chất :

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị x thuộc $\mathbb{R}$ và có tính chất sau :

a) Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$. b) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3}{2}x - 2$. Tính :

$$f(-6)\ ;\ f(-4)\ ;\ f(-1)\ ;\ f(0)\ ;\ f\left(\frac{1}{2}\right);\ f\left(\frac{3}{4}\right)\ ;\ f(3)\ ;\ f(a)\ ;\ f(a^2)\ ;\ f(2a+2).$$

Giải

$f(-6) = -11$; $f(-4) = -8$; $f(-1) = \dfrac{-7}{2}$; $f(0) = -2$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-5}{4}$;

$f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{-7}{8}$; $f(3) = \dfrac{5}{2}$; $f(a) = \dfrac{3}{2}a - 2$; $f(a^2) = \dfrac{3}{2}a^2 - 2$;

$f(2a + 2) = 3a + 1$.

2. a) Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{3}{4}x - 2$ với $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Cho hàm số $y = g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 4$ với $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Giải

a) Với x_1, x_2 bất kì thuộc $\mathbb{R}$, ta có :

$x_1 < x_2$

$\Rightarrow \dfrac{3}{4}x_1 < \dfrac{3}{4}x_2 \Rightarrow \dfrac{3}{4}x_1 - 2 < \dfrac{3}{4}x_2 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tương tự như câu a suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

3. Cho hai hàm số $f(x) = 5x - 3$ và $g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1$.

a) Tìm a sao cho $f(a) = g(a)$

b) Tìm b sao cho $f(b - 2) = g(2b + 4)$.

Giải

a) $f(a) = g(a) \Leftrightarrow 5a - 3 = -\dfrac{1}{2}a + 1 \Leftrightarrow 5a + \dfrac{1}{2}a = 1 + 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{11}{2}a = 4 \Leftrightarrow a = \dfrac{8}{11}$.

b) $b = 2$.

4. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là hàm số bậc nhất ? Hãy xác định các hệ số a, b và xét xem hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến ?

a) $y = -1{,}2x$

b) $y = \dfrac{2x - 5}{4}$

c) $y = 3 - 2x^2$

d) $y = 2(x + 3) - 4$

e) $y = (\sqrt{3} - 2)x - 1$

f) $y - 3 = x - \sqrt{2}$.

Giải

a) $y = -1{,}2x$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = -1{,}2$, $b = 0$.

Hàm số nghịch biến vì $a = -1{,}2 < 0$.

b) $y = \frac{2x-5}{4} = \frac{2x}{4} - \frac{5}{4} = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = \frac{1}{2}$;

$b = \frac{-5}{4}$.

Hàm số đồng biến vì $a = \frac{1}{2} > 0$.

c) $y = 3 - 2x^2$ không là hàm số bậc nhất.

d) $y = 2x + 6 - 4 = 2x + 2$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = 2$, $b = 2$.
Hàm số đồng biến vì $a = 2 > 0$.

e) $y = (\sqrt{3} - 2)x - 1$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = \sqrt{3} - 2$, $b = -1$
Hàm số nghịch biến vì $a = \sqrt{3} - 2 < 0$.

f) $y = x - 3 - \sqrt{2}$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = 1$, $b = -3 - \sqrt{2}$
Hàm số đồng biến vì $a = 1 > 0$.

5. Cho hàm số bậc nhất $y = mx + 5 + 2x - 2$.

a) Tìm giá trị của m để hàm số y là hàm số đồng biến.

b) Tìm giá trị của m để hàm số y là hàm số nghịch biến.

c) Tìm giá trị của m để hàm số y là hàm hằng.

Giải

$y = (m + 2)x + 3$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = m + 2$.

a) Hàm số đồng biến khi $a = m + 2 > 0$ hay $m > -2$.

b) Hàm số nghịch biến khi $a = m + 2 < 0$ hay $m < -2$.

c) Hàm số là hàm hằng khi $a = m + 2 = 0$ hay $m = -2$.

6. Với những giá trị nào của m thì các hàm số sau đây là hàm số bậc nhất ?

a) $y = \sqrt{\frac{3-4m}{2}}x - \sqrt{5}$ b) $y = \frac{3}{m^2-4}x - \frac{1}{2}$

Giải

a) $\sqrt{\frac{3-4m}{2}} \neq 0$ hay $\sqrt{3-4m} \neq 0$.

$\sqrt{3-4m} \neq 0$ khi $3 - 4m > 0$ hay $m < \frac{3}{4}$.

Vậy khi $m < \frac{3}{4}$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b) $m \neq \pm 2$.

7. Cho hàm số $y = (4 - \sqrt{3})x + 2$.

a) Tìm các giá trị tương ứng của y khi x nhận các giá trị sau :

$0 ; 2 ; \sqrt{3} ; 4 + \sqrt{3} ; 4 - \sqrt{3}$.

b) Tìm các giá trị tương ứng của x khi y nhận các giá trị sau :

$-24 ; 2 ; 15 ; 6 - \sqrt{3} ; 6 + \sqrt{3}$.

Giải

a) $x = 0,\ y = (4 - \sqrt{3}).0 + 2 = 2$;

$x = 2,\ y = (4 - \sqrt{3}).2 + 2 = 10 - 2\sqrt{3}$;

$x = \sqrt{3},\ y = (4 - \sqrt{3}).\sqrt{3} + 2 = 4\sqrt{3} - 1$;

$x = 4 + \sqrt{3},\ y = (4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3}) + 2 = 15$;

$x = 4 - \sqrt{3},\ y = (4 - \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}).2 = 38 - 16\sqrt{3}$.

b) • Với $y = -24$, ta có : $(4 - \sqrt{3})x + 2 = -24 \Rightarrow (4 - \sqrt{3})x = -26$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-26}{4 - \sqrt{3}} = \frac{-26(4 + \sqrt{3})}{(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})} = -2(4 + \sqrt{3}).$$

• Với $y = 2$, ta có $x = 0$.

• Với $y = 15$, ta có $x = 4 + \sqrt{3}$.

• Với $y = 6 - \sqrt{3}$, ta có $x = 1$.

• Với $y = 6 + \sqrt{3}$, ta có $x = \dfrac{19 + 8\sqrt{3}}{13}$.

8. Cho hai hàm số $f(x) = 5x - 3$ và $g(x) = -4x + 1$. Tính :

a) $f(-2) - g\left(\frac{1}{2}\right)$ b) $2f^2(-3) - 3g^3(-2)$.

Giải

a) $f(-2) - g\left(\frac{1}{2}\right) = [5(-2) - 3] - \left[-4\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right] = -13 + 1 = -12$.

b) $648 - 2187 = -1539$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

9. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + x^2 - x + 6$ trong đoạn [0 ; 2]

Giải

Hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2$, ta có :

$$f(x_1) - f(x_2) = -(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + 1)$$
$$= -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\left[(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2\right] < 0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$, nên $f(x)$ cũng nghịch biến [0 ; 2].

Vậy $0 \le x \le 2 \Rightarrow f(0) \ge f(x) \ge f(2) \Rightarrow 6 \ge f(x) \ge 0$.

Suy ra : GTNN của $f(x)$ bằng 6 (tại $x = 0 \in [0; 2]$);

GTNN của $f(x)$ bằng 0 (tại $x = 2 \in [0 ; 2]$).

10. Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số :

a) $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$

b) $y = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$.

Giải

a) • Tập xác định của hàm số : $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ là $D = [-1\ ;\ 1]$.

• Lấy y_0 bất kì, $y_0 \in f(D)$: $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = y_0$ với $x \in D$

$\Rightarrow$ phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = y_0$ có nghiệm $x \in D$ (1).

(1) có nghiệm $x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ y_0 \ge 0 \\ 2\sqrt{1-x^2} = y^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ y \ge \sqrt{2} \\ 4x^2 = y^2(4-y^2) \end{cases}$

Do đó : $\begin{cases} y \ge \sqrt{2} \\ 0 \le y^2(4-y^2) \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} \le y \le 2.$

Vậy tập giá trị của hàm số $[\sqrt{2}\ ;\ 2]$.

b) • Tập xác định hàm số $D = [1\ ;\ +\infty)$.

• Tập giá trị của hàm số : $f(D) = [1\ ;\ +\infty)$.

11. Cho hàm số f(n) xác định trên $\mathbb{N}$ thoả : $f(n) = n - 3$ nếu $n \ge 1000$

$f(n) = f[f(n+5)]$ nếu $n < 1000$.

Chứng minh rằng : $\dfrac{f(30)+f(4)}{2} + f(95) = 1995$.

Giải

Ta có : $f(999) = f(f(1004)) = f(1001) = 998$;

$f(998) = f(f(1003)) = f(1000) = 997$.

Lập luận tương tự : $f(1) = f(3) = \ldots = f(997) = f(999) = 998$;

$f(2) = f(4) = \ldots f(998) = f(1000) = 997$.

Suy ra : $\dfrac{f(30)+f(4)}{2} + f(95) = \dfrac{997+997}{2} + 998 = 1995$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

12. Tính f(2), nếu với mọi x, ta đều có : $f(x) + 3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2$.

(Đề thi vào lớp 10 Toán Tin, tỉnh Hà Tây, năm học 2004 – 2005)

Giải

Do $f(x) + 3f\left(\dfrac{1}{3}\right) = x^2$, với mọi x

nên khi cho $x = 1$: $f(1) + 3f(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = \dfrac{1}{4}$.

Cho $x = 2$; $x = \dfrac{1}{2}$ ta được :

$$\begin{cases} f(2) + 3f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4 \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) + 3f(2) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 8f(2) = -\frac{13}{4} \Leftrightarrow f(2) = \frac{-13}{32}.$$

13. Cho các số dương x và y thay đổi thoả mãn điều kiện : $x + y = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right).$$

(Đề thi vào lớp 10 trường Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 1999 – 2000)

Giải

$$P = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có :

$$1 = x + y \ge 2\sqrt{xy} \Rightarrow 0 < x^2y^2 \le \frac{1}{16}.$$

Đặt $t = x^2y^2$; $0 < t \le \frac{1}{16}$. Xét hàm số $y(t) = t + \frac{1}{t} + 2$; $0 < t \le \frac{1}{16}$

Với mọi $t_1, t_2 \in \left(0; \frac{1}{16}\right]$, $t_1 \ne t_2$, ta có :

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \left[(t_2 - t_1)\left(\frac{1}{t_1t_2} - 1\right)\right] : (t_1 - t_2) = \frac{t_1t_2 - 1}{t_1t_2} < 0$$

$\Rightarrow$ f(t) nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{16}\right]$. Vậy $0 < t \le \frac{1}{16} \Rightarrow f(t) \ge f\left(\frac{1}{16}\right) = 18\frac{1}{16}$.

Suy ra GTNN của P là $18\frac{1}{16}$ (tại $x = y = \frac{1}{2}$).

§2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax + b$ $(a \ne 0)$

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \ne 0)$

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \ne 0)$ là một đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b, song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \ne 0$ và trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.

Chú ý : Đồ thị hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \ne 0)$ còn được gọi là đường thẳng $y = ax + b$; b được gọi là tung độ gốc của đường thẳng.

2. Cách vẽ đồ thị hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \ne 0)$

– Khi $b = 0$ thì $y = ax$. Đồ thị $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc toạ độ O(0 ; 0) và điểm A(1 ; a) (đã biết).

– Xét trường hợp $y = ax + b$ với $a \ne 0$ và $b \ne 0$.

Ta đã biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ là một đường thẳng, do đó về nguyên tắc ta chỉ cần xác định được hai điểm phân biệt nào đó của đồ thị rồi vẽ đường thẳng qua hai điểm đó.

+ *Cách thứ nhất :*

Xác định hai điểm bất kì của đồ thị, chẳng hạn :

Cho $x = 1$, tính được $y = a + b$, ta có điểm $A(1 ; a + b)$.

Cho $x = -1$, tính được $y = -a + b$, ta có điểm $B(-1 ; b - a)$.

+ *Cách thứ hai :*

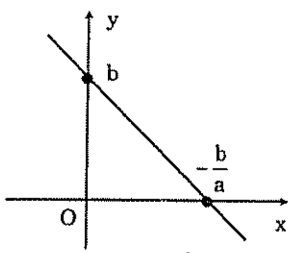
Xác định giao điểm của đồ thị với hai trục toạ độ :

Cho $x = 0$, tính được $y = b$, ta có điểm $C(0 ; b)$.

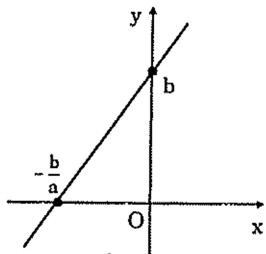
Cho $y = 0$, tính được $x = -\frac{b}{a}$, ta có điểm $D\left(-\frac{b}{a} ; 0\right)$.

Vẽ đường thẳng qua A ; B hoặc qua C ; D ta được đồ thị của hàm số $y = ax + b$.

Dạng đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.



$a < 0$



$a > 0$

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

14. Cho các hàm số sau : $y = 2x - 3$ và $y = -3x + 4$.

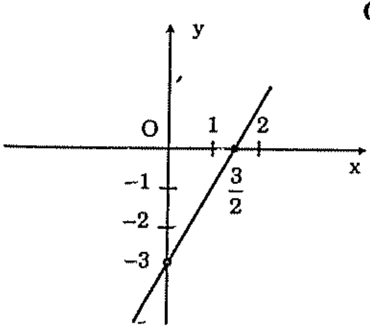
a) Vẽ đồ thị các hàm số đó.

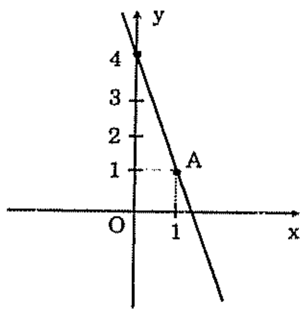
b) Điểm nào sau đây thuộc đồ thị các hàm số trên ?

$A\left(-\frac{1}{3} ; 5\right)$; $B\left(\frac{5}{2} ; 2\right)$.

Giải

a)





b) • Thế $x_A = -\frac{1}{3}$ vào hàm số $y = -3x + 4$ ta có $y_A = -3\left(-\frac{1}{3}\right) + 4 = 5$.

Vậy điểm A thuộc đồ thị hàm số $y = -3x + 4$.

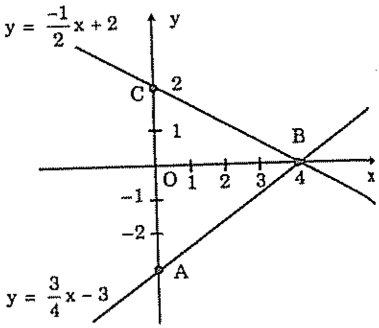
• Điểm B thuộc đồ thị hàm số $y = 2x - 3$.

15. a) Vẽ đồ thị các hàm số sau trên cùng mặt phẳng toạ độ :

$$y = \frac{3}{4}x - 3 \text{ và } y = \frac{-1}{2}x + 2.$$

b) Gọi giao điểm của đường thẳng $y = \frac{3}{4}x - 3$ với các trục Oy, Ox lần lượt là A, B. Gọi giao điểm của đường thẳng $y = \frac{-1}{2}x + 2$ với trục Oy là C. Tính các góc của tam giác ABC.

Giải



a) Xem hình vẽ bên.

b) $\tan\widehat{OCB} = 2 \Rightarrow \widehat{OCB} \approx 63^o$

$\tan\widehat{OAB} = \frac{4}{3} \Rightarrow \widehat{OAB} \approx 53^o$

$\widehat{ABC} = 180^o - (\widehat{OCB} + \widehat{OAB}) = 64^o$

16. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{5}x - 2$

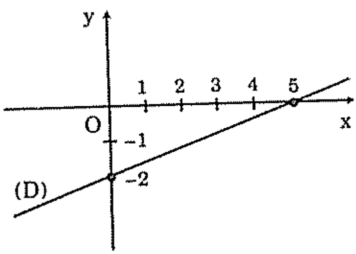
a) Vẽ đồ thị (D) của hàm số f.

b) Điểm nào sau đây nằm trên (D):

$$A(1\ ;3)\ ;\ B(-5\ ;-4)\ ;\ C\left(\frac{5}{2}\ ;\ -1\right)\ ;\ D\left(-2\ ;\frac{14}{5}\right).$$

c) Tìm toạ độ điểm M ∈ (D) và N ∈ (D) khi biết : $x_M = \frac{-5}{2}$; $y_N = -2$.

Giải



a) Xem hình vẽ bên.

b) Điểm B và C nằm trên (D).

c) Thế $x_M = \frac{-5}{2}$ vào hàm số

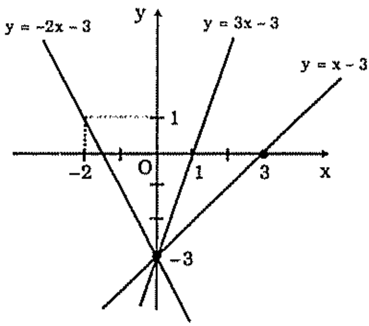
$$y = \frac{2}{5}x - 2 \text{ ta có } y_M = -3.$$

Vậy $M\left(-\frac{5}{2};3\right)$; N(0 ; –2).

17. a) Vẽ đồ thị các hàm số : $y = x - 3$; $y = 3x - 3$; $y = -2x - 3$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Có nhận xét gì về đồ thị các hàm số này ?

Giải



a) Xem hình vẽ bên.

b) Đồ thị các hàm số này cùng cắt trục tung tại một điểm có tung độ bằng −3.

18. Cho hàm số y = (3 − 2m)x − 1.

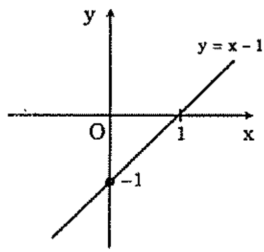
a) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến ?

b) Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến ?

c) Xác định giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua điểm A(−2 ; −3).

d) Vẽ đồ thị hàm số với giá trị m vừa tìm được ở câu c.

Giải



a) $m < \frac{3}{2}$

b) $m > \frac{3}{2}$

c) m = 1

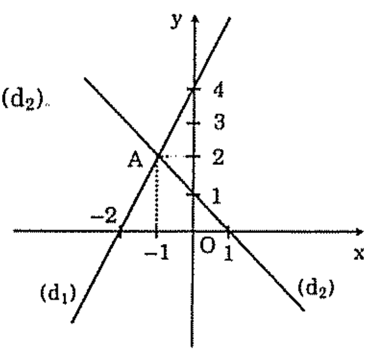
d) y = x − 1.

19. a) Vẽ trên cùng hệ trục toạ độ Oxy đồ thị các hàm số sau :

$y = 2x + 4$ (d_1) ; $y = -x + 1$ (d_2).

b) Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Giải



a) Xem hình vẽ bên.

b) Gọi $A(x_1 ; y_1)$ là giao điểm của (d_1) và (d_2).

Vì $A \in (d_1)$ nên $y_1 = 2x_1 + 4$

Vì $A \in (d_2)$ nên $y_1 = -x_1 + 1$

Suy ra $2x_1 + 4 = -x_1 + 1 \Rightarrow x_1 = -1$

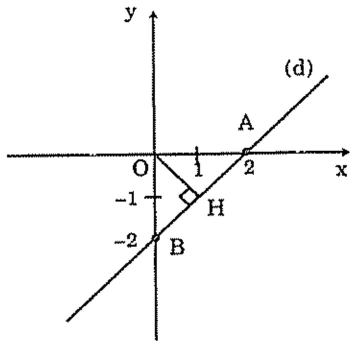
Với $x_1 = -1$ ta có $y_1 = 2$.

Vậy, toạ độ giao điểm của hai đường thẳng là : A(−1 ; 2).

20. a) Vẽ đồ thị hàm số y = x − 2 (d).

b) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d).

Giải



a) Xem hình vẽ bên.

b) Kẻ OH ⊥ AB.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác OAB ($\widehat{AOB} = 90^\circ$), ta có :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ (vì } OA = OB = 2)$$

$\Rightarrow OH = \sqrt{2}$.

Vậy khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d) bằng $\sqrt{2}$.

21. a) Vẽ trên cùng hệ trục toạ độ Oxy đồ thị các hàm số sau :

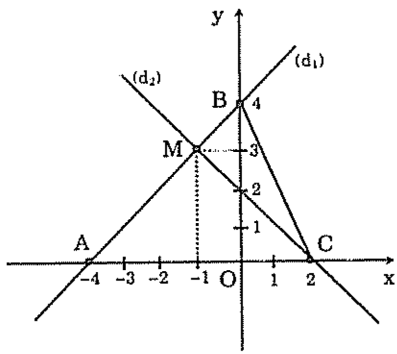
$y = x + 4$ (d_1) ; $y = -x + 2$ (d_2).

b) Tìm toạ độ giao điểm M của (d_1) và (d_2).

c) Gọi giao điểm của đường thẳng (d_1) với trục Ox, Oy theo thứ tự là A, B. Gọi giao điểm của đường thẳng (d_2) với trục Ox là C.

Tính diện tích tam giác ABC.

Giải



a) Xem hình vẽ bên

b) M(–1 ; 3).

c) Gọi diện tích của các tam giác ABC, AMC, BMC lần lượt là S_{ABC}, S_{AMC}, S_{BMC} và áp dụng công thức $S = \frac{1}{2}a.h$ ta có :

$$S_{BMC} = S_{ABC} - S_{AMC}$$

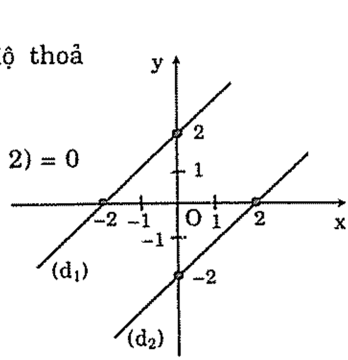
$$= \frac{1}{2}.6.4 - \frac{1}{2}.6.3 = 3.$$

Vậy số đo diện tích tam giác BMC bằng 3 (đơn vị diện tích).

BÀI TẬP NÂNG CAO

22. Vẽ tập hợp các điểm M(x ; y) có toạ độ thoả phương trình : $x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0$

Giải



$x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - y + 2)(x - y - 2) = 0$

Đồ thị gồm :

– Đường thẳng (d_1) : $y = x + 2$ đi qua hai điểm (0 ; 2) và (–2 ; 0)

– Đường thẳng (d_2) : $y = x - 2$ đi qua hai điểm (0 ; –2) và (2 ; 0)

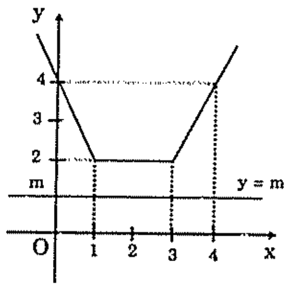
23. a) Vẽ đồ thị của hàm số : $y = |x - 1| + |x - 3|$.

b) Định giá trị của m để phương trình :

$|x - 1| + |x - 3| = m$ có đúng một nghiệm dương.

Giải

a) $y = \begin{cases} -2x + 4 & \text{nếu } x \le 1 \\ 2 & \text{nếu } 1 < x < 3 \\ 2x - 4 & \text{nếu } x \ge 3. \end{cases}$



b) Số nghiệm của phương trình $|x - 1| + |x - 3| = m$ tương ứng với số giao điểm của hai đồ thị của hai hàm số :

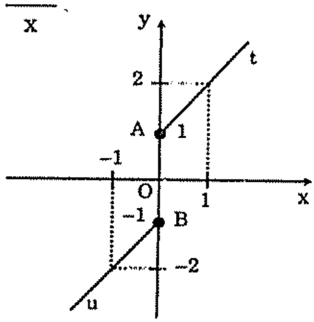
$y = |x - 1| + |x - 3|$ và $y = m$.

Nhìn vào đồ thị với $m \ge 4$ thì hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm trong đó có đúng một điểm có hoành độ dương.

Vậy với $m \ge 4$ thì phương trình đã cho có đúng một nghiệm dương.

24. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số : $y = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.

Giải



Tập xác định hàm số : với mọi $x \ne 0$.

$y = \begin{cases} x + 1 & \text{với } x > 0 \\ x - 1 & \text{với } x < 0 \end{cases}$

- Hàm số luôn đồng biến trong mỗi khoảng xác định.
- Với $x > 0$ đồ thị là tia At (không kể điểm A).
- Với $x < 0$ đồ thị là tia Bu (không kể điểm B).

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

25. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = x - |x|$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9 toàn quốc, năm học 1973 – 1974)

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, trường Chuyên Văn – Toán, huyện Đức Phổ, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 1989 – 1990)

Giải

a) $y = \begin{cases} 0 & \text{với } x \ge 0 \\ -2x & \text{với } x < 0. \end{cases}$

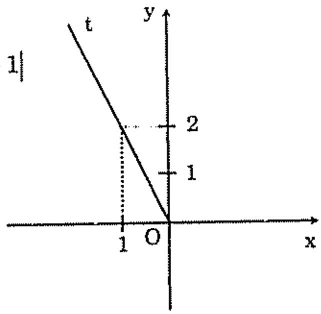
Đồ thị của hàm số là hai tia Ot và Ox.

b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

$= \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = |x-2| + |x+1|$

$= \begin{cases} x - 2 + x + 1 \text{ (với } x > 2) \\ -x + 2 + x + 1 \text{ (với } 2 \ge x \ge -1) \\ -x + 2 - x - 1 \text{ (với } x < -1) \end{cases}$

$= \begin{cases} 2x - 1 \text{ (với } x > 2) \\ 3 \text{ (với } 2 \ge x \ge -1) \\ -2x - 1 \text{ (với } x < -1) \end{cases}$



Đồ thị hàm số là hai tia AB, CD và đoạn thẳng AC trong đó A(2 ; 3) ; B(3 ; 5) ; C(–1 ; 3) và D(–2 ; 5).

26. Cho các phương trình : $|x| = 2x - 1$ (1) và $|x| = -x - 5$ (2).

a) Giải phương trình (1). Chứng minh phương trình (2) vô nghiệm.

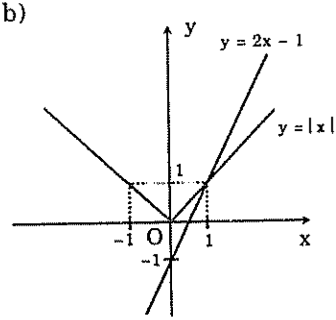
b) Dùng đồ thị để tìm lại kết quả ở câu a.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, toàn quốc, năm học 1968 – 1969)

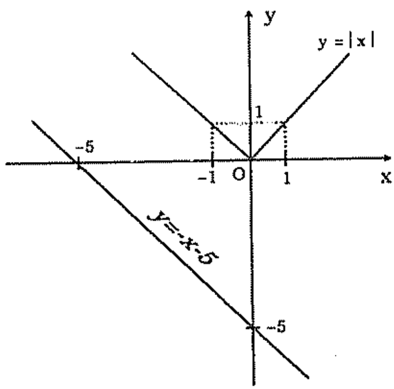
Giải

a) Phương trình có nghiệm x = 1.

b)



Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình : $|x| = 2x - 1$.



Hai đồ thị không cắt nhau nên phương trình $|x| = -x - 5$ vô nghiệm.

§3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b$ $(a \ne 0)$

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Đường thẳng song song

Hai đường thẳng (d) : $y = ax + b$ $(a \ne 0)$ và (d') : $y = a'x + b'$ $(a' \ne 0)$ song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$ và $b \ne b'$ và trùng nhau khi và chỉ khi $a = a'$, $b = b'$.

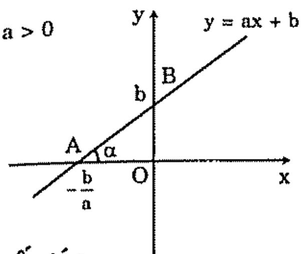
2. Đường thẳng cắt nhau

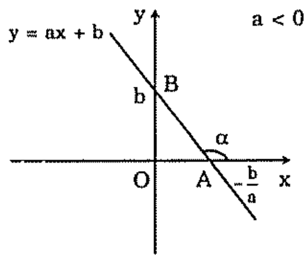
Hai đường thẳng (d) : $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và (d') : $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$.

Chú ý : Khi $a \neq a'$ và $b = b'$ thì hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm trên trục tung có tung độ bằng b.

3. Góc tạo bởi đường thẳng y = ax + b với tia Ox

Góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ với tia Ox là góc tạo bởi tia Ax và tia AB, trong đó tia AB là phần đường thẳng $y = ax + b$ nằm trong nửa mặt phẳng có bờ x'Ox và chứa tia Oy.





4. Hệ số góc

Các đường thẳng song song với nhau sẽ tạo với tia Ox các góc bằng nhau

Từ đó suy ra : Các đường thẳng có cùng hệ số a (a là hệ số của x) thì tạo với tia Ox các góc bằng nhau.

Chú ý : Khi $b = 0$, ta có hàm số $y = ax$, ta nói a là hệ số góc của đường thẳng $y = ax$.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

27. Cho hàm số $y = ax - 4$. Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau :

a) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -\sqrt{2}x$.

b) Khi $x = 1 + \sqrt{2}$ thì $y = -3 - \sqrt{2}$.

Giải

a) $a = -\sqrt{2}$.

b) Ta có : $-3 - \sqrt{2} = a(1 + \sqrt{2}) - 4$

$$\Rightarrow a = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{2})^2}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = 2\sqrt{2} - 3.$$

28. Tìm hệ số a của hàm số $y = ax - 1$, biết rằng khi $x = 1 - \sqrt{3}$ thì $y = 2 - \sqrt{3}$.

Giải

Ta có : $2 - \sqrt{3} = a(1 - \sqrt{3}) - 1$

$$\Rightarrow a = \frac{3 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{1 - \sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

29. Cho đường thẳng y = (m –2)x + (m – 2) (d).

a) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua gốc toạ độ.

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $3 - \sqrt{2}$.

c) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = (2\sqrt{2} - 3)x - 2$.

Giải

a) Đường thẳng (d) đi qua gốc toạ độ O khi m – 1 = 0 hay m = 1 khi đó hàm số là y = –x.

b) Ta có : $m - 1 = 3 - \sqrt{2}$ hay $m = 4 - \sqrt{2}$.

c) Ta có : $m - 2 = 2\sqrt{2} - 3$ và $m - 1 \neq -2$

$\Rightarrow m = 2\sqrt{2} - 1$ và $m \neq 3 \Rightarrow m = 2\sqrt{2} - 1$.

Khi đó hàm số là $y = (2\sqrt{2} - 3)x + 2\sqrt{2} - 2$.

30. Trên mặt phẳng Oxy cho hai điểm A(1 ; –1) và B(–1 ; –7). Xác định hàm số biết đồ thị của nó là đường thẳng (d) đi qua hai điểm A và B.

Giải

Giả sử đường thẳng (d) đi qua A và B có dạng : y = ax + b.

Vì $A(1 ; -1) \in (d)$ ta có : $-1 = a.1 + b \Leftrightarrow b = -a - 1$.

Vì $B(-1 ; -7) \in (d)$ ta có : $-7 = a.(-1) + b \Leftrightarrow b = a - 7$.

Suy ra $-a - 1 = a - 7 \Leftrightarrow a = 3$.

Thay a = 3 vào b = –a – 1 ta có b = –4.

Vậy hàm số y = 3x – 4 có đồ thị là đường thẳng (d) đi qua A và B.

31. Chứng tỏ ba điểm sau thẳng hàng.

a) $A(-1; 3); B\left(-\frac{1}{2}; 2\right); C(2; -3)$. b) $H(1; 1); I(-1; -5); K\left(-\frac{1}{3}; -3\right)$.

Giải

a) Giả sử đường thẳng (d) đi qua A và B có dạng : y = ax + b

$\Rightarrow (d) : y = -2x + 1$.

$C \in (d) : y = -2x + 1 \Leftrightarrow -3 = -2.2 + 1 \Leftrightarrow -3 = -3$ (đẳng thức đúng) nên $C \in (d)$. Vậy A, B, C thẳng hàng.

b) Đường thẳng (d) qua hai điểm H và I là : y = 3x – 2.

32. Cho đường thẳng y = ax + b (d).

Tìm các giá trị của a và b trong các trường hợp sau :

a) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d_1) : y = -5x + 3$ và đường thẳng (d) đi qua điểm M(2 ; –6).

b) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d_2) : y = 3x - 4$ và đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng –2.

Giải

a) Ta có (d) // (d_1) nên a = –5 và b ≠ 3.

Vì M ∈ (d) ta có : –6 = – 5.2 + b nên b = 4 (nhận vì b ≠ 3).

Vậy (d) : y = –5x + 4.

b) (d) : y = 3x – 2.

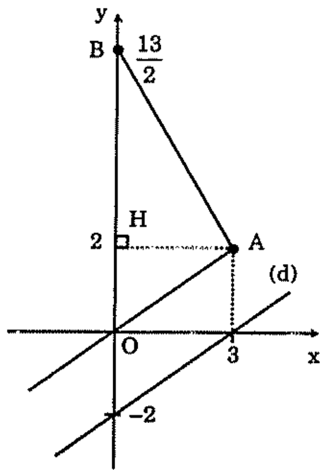
BÀI TẬP NÂNG CAO

33. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d) : $y = \frac{2}{3}x - 2$.

a) Vẽ (d). Viết phương trình đường thẳng qua A(3 ; 2) và song song với (d).

b) Tìm toạ độ điểm B trên trục tung sao cho tam giác AOB vuông tại A.

Giải



a) TXĐ = ℝ. Bảng giá trị

x	0	3
y	–2	0

Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua hai điểm (0 ; –2) ; (3 ; 0).

Phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A(3 ; 2) và song song với (d) là (Δ) :

$$y = \frac{2}{3}x.$$

b) Kẻ AH ⊥ Oy.

ΔOAB vuông tại A ⇔ $AH^2 = OH.HB$

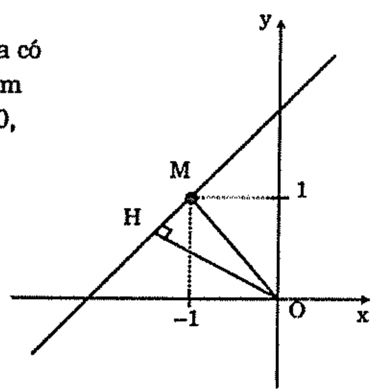
$\Leftrightarrow HB = \frac{AH^2}{OH} = \frac{9}{2}$. Vậy $B\left(0; \frac{13}{2}\right)$.

34. Cho đường thẳng : (m – 2)x + (m – 1)y = 1 (m : tham số).

a) Chứng minh rằng đường thẳng luôn luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

b) Tính m để khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng là lớn nhất.

Giải



a) Giả sử (d) qua điểm cố định $M(x_0 ; y_0)$ ta có

$(m - 2)x_0 + (m - 1)y_0 = 1$ đúng với mọi m

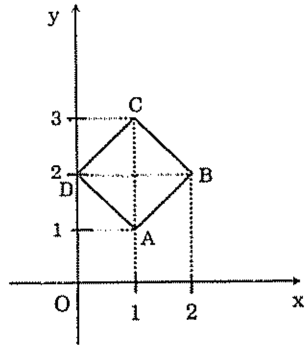
$\Leftrightarrow (x_0 + y_0)m - (2x_0 + y_0 + 1) = 0$, đúng với mọi m

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1. \end{cases}$

Vậy các đường thẳng (d) đi qua điểm cố định M(–1 ; 1).

b) GTLN của $OH = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

35. Trong mặt phẳng toạ độ, tìm quỹ tích các điểm M(x ; y) thoả mãn phương trình : $|x - 1| + |y - 2| = 1$.



Giải

Quỹ tích các điểm M(x ; y) là hình vuông ABCD

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

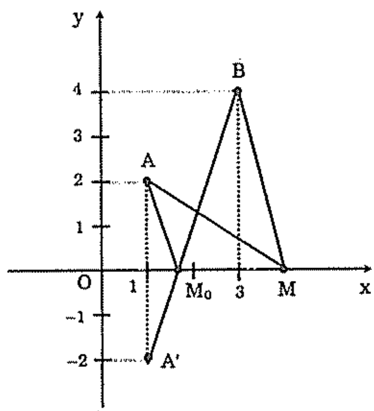
36. Trong mặt phẳng Oxy cho A(1 ; 2) và B(3 ; 4). Tìm trên trục hoành điểm M sao cho MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, trường THPT Thạnh Mỹ Tây, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 1993 – 1994)

Giải

Xét bài toán: "Cho đường thẳng (d) và hai điểm A, B cùng nửa mặt phẳng bờ (d), tìm trên (d) điểm M sao cho MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất".

Dựng A′ là hình chiếu của A trên (d) nên M là giao điểm của A′B với (d).



Áp dụng : Dựng A′ là hình chiếu của A trên Ox nên A′(1 ; – 2).

Suy ra M là giao điểm của A′B với Ox.

Phương trình (A′B) có dạng : y = ax + b với a = 3 và b = 5 (thay toạ độ điểm A′, B vào phương trình).

$\Rightarrow$ (A′B) : y = 3x – 5.

Cho $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$.

Vậy $M_0\left(\dfrac{5}{3};0\right)$ thì MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

37. Cho tam giác ABC, giả sử các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A của tam giác ABC lần lượt các đường thẳng BC tại D ; E và AD = AE. Chứng minh rằng $AB^2 + AC^2 = 4R^2$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2002 – 2003)

Giải

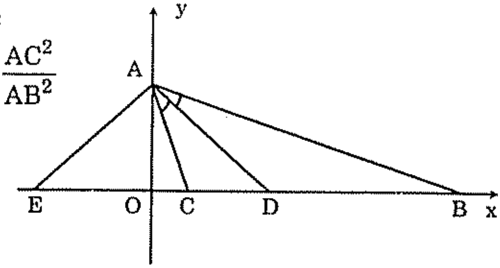
Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ A(0 ; 1), D(1 ; 0), E(–1 ; 0), C(c; 0), B(b ; 0)

Áp dụng tính chất phân giác

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{CD^2}{BD^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1-c)^2}{(b-1)^2} = \frac{1-c^2}{1+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{c} \Rightarrow B\left(\frac{1}{c};0\right).$$



Gọi I(x ; y) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có :

$$\begin{cases} IA^2 = IC^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-c)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \\ (x-c)^2 + y^2 = \left(x - \dfrac{1}{c}\right)^2 + y^2. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $y = 1 \Rightarrow I\left(\dfrac{1+c^2}{2c};1\right)$.

Vậy $4R^2 = 4AI^2 = 4\left(\dfrac{1+c^2}{2c}\right)^2 = \left(\dfrac{1+c^2}{c}\right)^2$

$$AC^2 + AB^2 = 1 + c^2 + 1 + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1+c^2}{c}\right)^2 \Rightarrow \quad AC^2 + AB^2 = 4R^2.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. a) Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \sqrt{\dfrac{3m-4}{m+3}}\,x - 1$ đồng biến ?

b) Với giá trị nào của k thì hàm số $y = (6 - 5k - k^2)x + 4$ nghịch biến ?

Giải

a) Hàm số $y = \sqrt{\dfrac{3m-4}{m+3}}\,x - 1$ đồng biến khi $\sqrt{\dfrac{3m-4}{m+3}} > 0$

nên $3m - 4 > 0$ và $m + 3 > 0$ hoặc $3m - 4 < 0$ và $m + 3 < 0$.

Do đó $m > \dfrac{4}{3}$ hoặc $m < -3$.

Vậy khi $m > \dfrac{4}{3}$ hoặc $m < -3$ thì hàm số đã cho đồng biến.

b) Ta có : $6 - 5k - k^2 = 6 - 3k - 2k - k^2 = (3 - k)(2 - k)$.

Hàm số $y = (6 - 5k - k^2)x + 4$ nghịch biến khi $(3 - k)(2 - k) < 0$

nên $3 - k > 0$ và $2 - k < 0$ hoặc $3 - k < 0$ và $2 - k > 0$.

Do đó $2 < k < 3$ hoặc $k \in \varnothing$.

Vậy khi $2 < k < 3$ thì hàm số đã cho nghịch biến.

2. Với giá trị nào của a thì hai đường thẳng $y = (a^2 - 2)x + 1$ và y $= (2a + 1)x - 4$ song song với nhau ?

Giải

Hai đường thẳng y = $(a^2 - 2) + 1$ và y = (2a + 1) – 4 có tung độ gốc khác nhau ($b = 1 \neq b' = -4$).

Do đó, chúng song song với nhau $\Leftrightarrow a^2 - 2 = 2a + 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ a = –1 hoặc a = 3.

Vậy khi a = –1 hoặc a = –3 thì hai đường thẳng đã cho song song.

3. Với điều kiện nào của m và k thì hai đường thẳng dưới đây trùng nhau ?

$y = (m^2 - 2)x + (6 - k)$; $y = (5m + 4)x + (2k - 3)$.

Giải

Hai đường thẳng $y = (m^2 - 2)x + (6 - k)$ và $y = (5m + 4)x + (2k - 3)$ trùng nhau khi và chỉ khi : $m^2 - 2 = 5m + 4$ và $6 - k = 2k - 3$

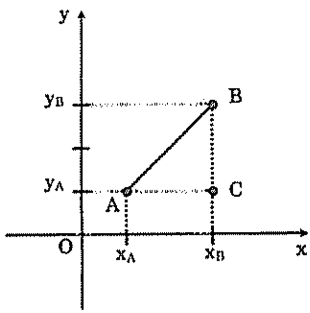
$\Rightarrow$ m = –1 hoặc m = 6 và k = 3.

Vậy khi m = –1 hoặc m = 6 và k = 3 thì hai đường thẳng đã cho trùng nhau.

4. a) Tính khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A ; y_A)$ và $B(x_B ; y_B)$ trong mặt phẳng toạ độ.

b) Áp dụng công thức trên để tìm khoảng cách giữa hai điểm M(–5 ; 4) và N(3 ; –2) trong mặt phẳng toạ độ.

Giải



a) Ta có : $AC = |x_B - x_A|$.

$BC = |y_B - y_A|$.

Theo định lí Py-ta-go trong tam giác ABC vuông tại C, ta có :

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

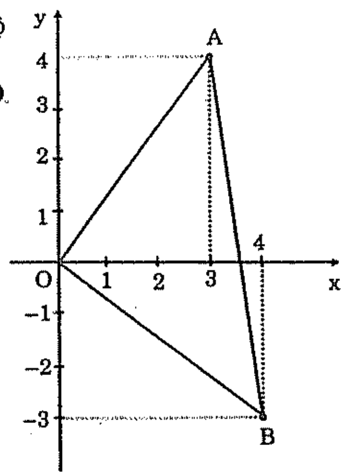
b) Ta có : $MN = \sqrt{(3+5)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{100} = 10$.

5. a) Vẽ tam giác OAB trên mặt phẳng toạ độ biết A(3 ; 4) ; B(4 ; –3).

b) Chứng minh tam giác OAB vuông cân tại O.

c) Tính diện tích tam giác OAB.

Giải



a) Xem hình vẽ bên.

b) Ta có : $OA = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$

$= \sqrt{25} = 5$;

$OB = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2}$

$= \sqrt{25} = 5$;

$AB = \sqrt{(4-3)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{50}$.

Suy ra : OA = OB nên tam giác OAB cân tại O.

$AB^2 = OA^2 + OB^2$ nên tam giác OAB vuông tại O.

Vậy tam giác OAB vuông cân tại O.

c) $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}.OA.OB = \dfrac{1}{2}.5.5 = \dfrac{25}{2}$ (đơn vị diện tích).

6. Cho ba đường thẳng : $(d_1) : y = \dfrac{1}{2}x + 2$; $(d_2) : y = \dfrac{-3}{2}x + 6$;

$(d_3) : y = (m - 2)x - 3$.

Tìm m để ba đường thẳng trên đồng quy.

Giải

Gọi điểm A $(x_A ; y_A)$ là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Vì $A \in (d_1)$ ta có $y_A = \dfrac{1}{2}x_A + 2$.

Vì $A \in (d_2)$ ta có $y_A = \dfrac{-3}{2}x_A + 6$.

Suy ra $\dfrac{1}{2}x_A + 2 = \dfrac{-3}{2}x_A + 6$ nên $x_A = 2$.

Thế $x_A = 2$ vào $y_A = \dfrac{1}{2}x_A + 2$ ta có $y_A = 3$.

Do đó toạ độ điểm A(2 ; 3).

Để ba đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) đồng quy thì $A \in (d_3)$

nên $3 = (m - 2).2 - 3$ hay $m = 5$

Vậy m = 5 thì ba đường thẳng đã cho đồng quy.

7. Trong mặt phẳng toạ độ cho A(a ; 0), B(1 ; 2), C(6 ; –10)

a) Tính AB, AC theo a.

b) Chứng minh rằng $\sqrt{t^2 - 2t + 5} + \sqrt{t^2 - 12t + 136} \ge 13$ với mọi t.

Giải

a) $AB = \sqrt{(a-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 1 + 4} = \sqrt{a^2 - 2a + 5}$;

$AC = \sqrt{(a-6)^2 + (0+10)^2} = \sqrt{a^2 - 12a + 36 + 100} = \sqrt{a^2 - 12a + 136}$.

b) Xét A(t ; 0), B(1 ; 2) ; C(6 ; –10).

Theo a) có $AB = \sqrt{t^2 - 2t + 5}$; $AC = \sqrt{t^2 - 36t + 136}$.

Ta cũng có $BC = \sqrt{(1-6)^2 + (2+10)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Xét ba điểm A, B, C ta có $AB + AC \ge BC$.

Do đó $\sqrt{t^2 - 2t + 5} + \sqrt{t^2 - 12t + 136} \ge 13$.

8. Cho ba đường thẳng : $(d_1) : y = (m^2 - 1)x - m^2 + 3$; $(d_2) : y = x + 5$;

$(d_3) : y = -x + 1$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị m, đường thẳng (d_1) luôn đi qua một điểm cố định.

b) Với giá trị nào của m thì $(d_1) // (d_2)$?

c) Chứng minh rằng nếu $(d_1) // (d_3)$ thì $(d_1) \perp (d_2)$.

d) Với giá trị nào của m thì 3 đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) đồng quy ?

Giải

a) (d_1) luôn đi qua điểm cố định (1 ; 2).

b) $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

c) (d_2) và (d_3) cắt nhau tại I(–2 ; 3).

Để (d_1) ; (d_2) ; (d_3) đồng quy thì $I \in (d_1) \Rightarrow m = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

9. Các điểm A(m ; 2) và B(3 ; m) nằm trên đường thẳng có hệ số góc m < 0. Tìm phương trình của đường thẳng đó.

Giải

Phương trình đường thẳng cần tìm : y = mx + n.

Vì A(m ; 2) ; B(3 ; m) thuộc đường thẳng nên : $m^2 + n^2 = 2$ và $m = 3m + n$.

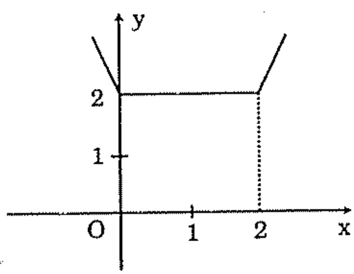
Suy ra $m = 1 - \sqrt{3}$ (vì m < 0) và $n = 2\sqrt{3} - 2$.

10. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của y và các giá trị tương ứng của x bằng cách dùng đồ thị và dùng phép toán.

Giải



a) $y = |x| + |x - 2|$

$$= \begin{cases} -2x + 2 & \text{với } x < 0 \\ 2 & \text{với } 0 \le x \le 2 \\ 2x - 2 & \text{với } x > 2. \end{cases}$$

b) Ta có: $\begin{cases} |x| \ge x \\ |x - 2| = |2 - x| \ge 2 - x \end{cases} \Rightarrow y \ge 2.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 0 \le x \le 2$.

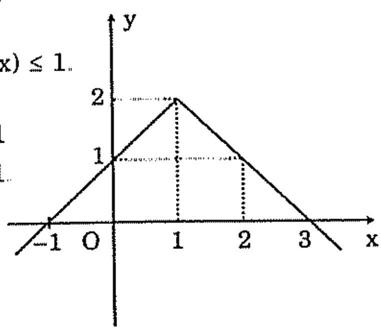
Giá trị nhỏ nhất của y = 2 khi $0 \le x \le 2$.

11. Cho hàm số $y = f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số trên.

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $f(x) \le 1$.

Giải



a) $y = f(x) = 2 - |x - 1| = \begin{cases} 3 - x & \text{nếu } x \ge 1 \\ 1 + x & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$

Với $x \ge 1$ ta có $f(x) \le 1$ khi $x \ge 2$;

$x < 1$ ta có $f(x) \le$ khi $x \le 0$.

12. Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ trong đó a, b, c, d là các hằng số.

Biết $f(1) = 2006$; $f(2) = 4012$; $f(3) = 6018$. Tính $f(5) + f(-1)$.

Giải

Đặt $g(x) = f(x) - 2006x$, ta có :

$g(1) = f(1) - 2006 = 0$, $g(2) = 0$; $g(3) = 0$

Suy ra : $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - x_0) = 0 = f(x) - 2006x$

$\Rightarrow f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - x_0) = 0 = f(x) - 2006x$, với mọi x

Vậy $f(5) + f(-1) = 24(5 - x_0) + 2006.5 + 24(1 + x_0) - 2006 = 8168$.

13. Tìm tất cả các hàm số f(x) thoả mãn :

$f(x) + af(1 - x) = (a - 1)x$, với mọi giá trị x (a là tham số).

Giải

Kết luận : $a \neq \pm 1$ thì $f(x) = \dfrac{a}{a+1} - x$, với mọi x

$a = 1$ thì $f(x) = \dfrac{1}{2}[g(x) - g(1 - x)]$ với g(x) là hàm số bất kì xác định $\forall x$.

$a = -1$: không tồn tại hàm số f(x).

14. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x^2 + 6\sqrt{(x^2+1)(x-2)} + 5}{x^2 + 3x - 4}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số. b) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số.

Giải

a) Hàm số $y = f(x)$ xác định khi và chỉ khi : $x \geq 2$.

b) $y = \dfrac{2x^2 + 6\sqrt{(x^2+1)(x-2)} + 5}{x^2 + 3x - 4} \leq \dfrac{2x^2 + x^2 + 1 + 9(x-2) + 5}{x^2 + 3x - 4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 + 1 = 9(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 9x + 19 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$ (thoả mãn).

15. Chứng minh rằng nếu hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả bất đẳng thức $f(x) \leq x$ và $f(x) + f(y) \leq f(x) + f(y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ thì $f(x) = x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải

$$\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(0) \leq 2f(0) \end{cases} \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$\begin{cases} f(x) \leq x \\ f([x + (-x)]) \leq f(x) + f(-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq x \\ f(x) \geq f(0) - f(-x) \geq -(-x) = x \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chương III. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN
HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ thức dạng $ax + by = c$ (∗), trong đó a, b và c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

2. Trong phương trình (∗), nếu giá trị của vế trái tại $x = x_0$ và $y = y_0$ bằng vế phải thì cặp số $(x_0 ; y_0)$ được gọi là một nghiệm của phương trình (∗).

3. Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng $ax + by = c$, kí hiệu là (d).

4. Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì đường thẳng (d) chính là đồ thị của hàm số bậc nhất $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

+ Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$ thì phương trình trở thành $ax = c$ hay $x = \frac{c}{a}$ và khi đó đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục tung.

+ Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình trở thành $by = c$ hay $y = \frac{c}{b}$ và khi đó đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục hoành.

5. Cho hai phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$, ta có hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (∗)

Nếu hai phương trình có nghiệm chung $(x_0 ; y_0)$ thì $(x_0 ; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (∗)

Nếu hai phương trình không có nghiệm chung thì ta nói hệ (∗) vô nghiệm.

Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

6. Tập nghiệm của hệ phương trình (∗) được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của hai đường thẳng $(d) : ax + by = c$ và $(d') : a'x + b'y = c'$.

Đối với hệ phương trình (∗), ta có :

– Nếu (d) cắt (d') thì hệ (∗) có một nghiệm duy nhất.

– Nếu (d) song song với (d') thì hệ (∗) vô nghiệm.

– Nếu (d) trùng với (d') thì hệ (∗) có vô số nghiệm.

7. Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Trong các cặp số (1 ; –1) ; (2 ; 3) ; (–3 ; –4) ; $\left(5\ ;\ \frac{-3}{2}\right)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình : 3x – 4y = 7 ?

Giải

Ta có $3(1) - 4(-1) = 7$ (đẳng thức đúng)

$3(2) - 4(3) = -6$ (đẳng thức sai)

$3(-3) - 4(-4) = 7$ (đẳng thức đúng)

$3(5) - 4\left(\frac{-3}{2}\right) = 21$ (đẳng thức sai)

Vậy (1, –1) ; (–3, –4) là nghiệm của phương trình 3x – 4y = 7.

2. Với mỗi phương trình sau, tìm nghiệm tổng quát của phương trình và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của nó.

a) $3x - y = 3$ b) $3x - 2y = 6$ c) $0x + 3y = 6$ d) $-3x + 0y = -9$

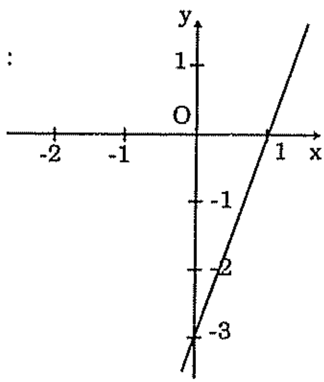
Giải

a) Ta có $3x - y = 3 \Leftrightarrow y = 3x - 3$.

Nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$\begin{cases} x \in R \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng $y = 3x - 3$

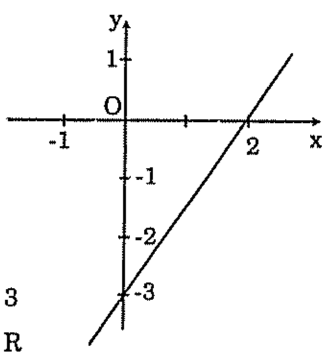


b) Ta có $3x - 2y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{3x}{2} - 3$

Nghiệm tổng quát của phương trình là :

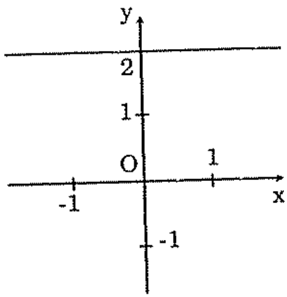
$$\begin{cases} x \in R \\ y = \frac{3x}{2} - 3 \end{cases}$$

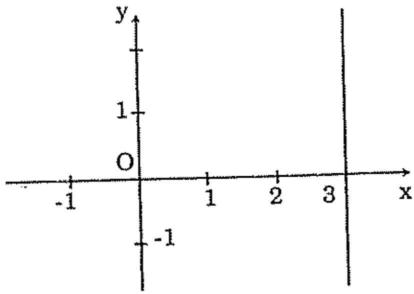
Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng : $y = \frac{3x}{2} - 3$.



c) $\begin{cases} x \in R \\ y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 3 \\ y \in R \end{cases}$





3. Hãy tìm giá trị của m trong mỗi trường hợp sau để :

a) Đường thẳng $3x - my = 11$ đi qua điểm $A(2 ; -1)$.

b) Đường thẳng $mx + 2y = -2$ đi qua điểm $B(-5 ; 2)$.

c) Đường thẳng $2mx + 0y = 35$ đi qua điểm $C\left(\frac{1}{2} ; -3\right)$.

d) Đường thẳng $(m + 2)x - (2m - 1)y = 2(2m + 1)$ đi qua điểm $D(4 ; -2)$.

Giải

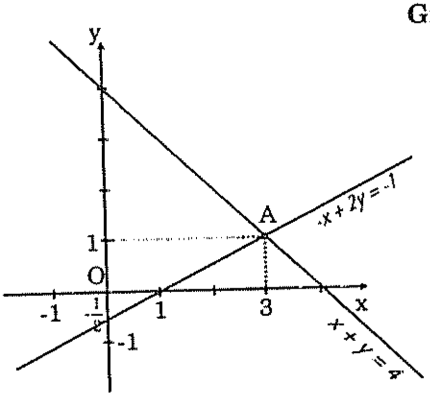
a) Điểm $A(2 ; -1)$ thuộc đường thẳng $3x - my = 11$ thì toạ độ điểm A phải thoả mãn phương trình này, nghĩa là $3.2 - m(-1) = 11$ nên $m = 5$.
Vậy $m = 5$.

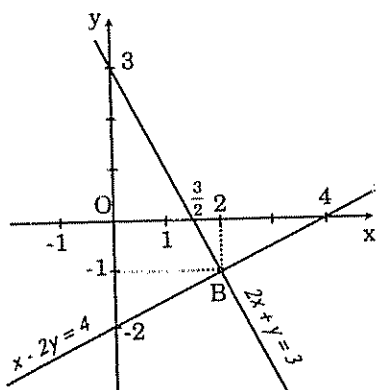
b) $m = \frac{6}{5}$ c) $m = 35$ d) $m = -1$

4. Vẽ mỗi đường thẳng sau trong cùng một mặt phẳng toạ độ rồi tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng đó :

a) $x + y = 4$ và $-x + 2y = -1$ b) $2x + y = 3$ và $x - 2y = 4$.

Giải





a) $A(3 ; 1)$ b) $B(2 ; 1)$

5. Bốn đường thẳng cho bởi các phương trình sau đây có đồng quy không ?
$(d_1) : 2x + y = 0$, $(d_2) : 3x + 2y = 1$, $(d_3) : -x + y = 3$, $(d_4) : -4x - 1{,}5y = 1$.

Giải

Vẽ hai đường thẳng (d_1) và (d_3). Tìm toạ độ giao điểm của chúng rồi kiểm tra xem điểm đó có thuộc hai đường thẳng (d_2) và (d_4) hay không ?

Vậy bốn đường thẳng đã cho đồng qui tại điểm có toạ độ là (−1 ; 2).

6. Mỗi cặp số sau có phải là một nghiệm của hệ phương trình tương ứng hay không ?

a) $(5\ ;-1)$, $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -x + y = -6 \end{cases}$ b) $\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right)$, $\begin{cases} -5x + 1,5y = -4,5 \\ \dfrac{10}{3}x - y = 3 \end{cases}$

Giải

a) Thay x = 5 và y = −1 vào hai phương trình trong hệ

$\begin{cases} 2.5 + 3(-1) = 7 \text{ (đẳng thức đúng)} \\ -5 + (-1) = -6 \text{ (đẳng thức đúng)} \end{cases}$. Vậy (5; −1) là nghiệm của hệ.

b) Có

7. Không cần vẽ đồ thị, hãy cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} y = 5x - 1 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -1,5x + y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x = -3y \\ -3x = 5y \end{cases}$

Giải

a) Ta có $5 = 5$; $-1 \neq 2$ ($a = a'$; $b \neq b'$)

Do đó hai đường thẳng $y = 5x - 1$ và $y = 5x + 2$ song song nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Ta có $2 \neq 3$ ($a \neq a'$)

Do đó hai đường thẳng $y = 2x - 3$ và $y = 3x - 2$ cắt nhau nên hệ phương trình đã cho có một nghiệm

c) $3x - 2y = 4 \Leftrightarrow y = \dfrac{3x}{2} - 2$

$-1,5x + y = -2 \Leftrightarrow y = 1,5x - 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{3x}{2} - 2$

Ta có $\dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$; $-2 = -2$ ($a = a'$; $b = b'$)

Vậy hai đường thẳng đã cho trùng nhau nên hệ đã cho có vô số nghiệm

d) $5x = -3y \Leftrightarrow y = \dfrac{-5x}{3}$; $-3x = 5y \Leftrightarrow y = \dfrac{-3}{5}x$

Ta có $\dfrac{-5}{3} \neq \dfrac{-3}{5}$ ($a \neq a'$)

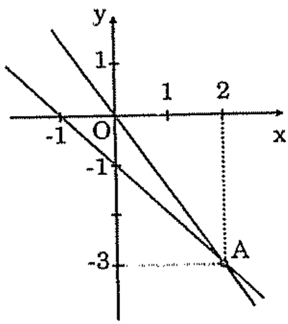
Vậy hai đường thẳng đã cho cắt nhau nên hệ phương trình đã cho có một nghiệm

8. Bằng đồ thị, hãy tìm nghiệm của các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0,5x + 0y = 2 \\ 0x + 3y = -6 \end{cases}$

Giải

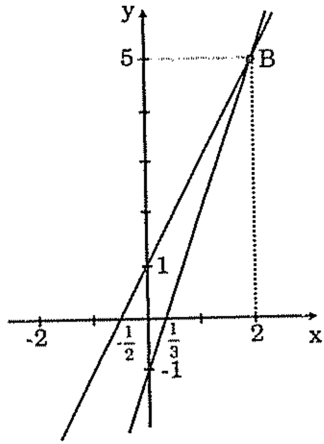
a)



Hai đường này cắt nhau tại A(2 ; −3)

Hệ phương trình đã cho có nghiệm (2 ; −3)

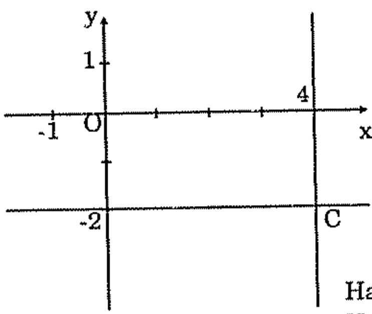
b)



Hai đường thẳng này cắt nhau tại B(2 ; 5)

Hệ phương trình đã cho có nghiệm (2 ; 5)

c)



Hai đường thẳng này cắt nhau tại C(4 ; -2)

Hệ phương trình đã cho có nghiệm (4 ; -2)

BÀI TẬP NÂNG CAO

9. Xác định m để hai hệ phương trình sau tương đương :

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} mx + y = -7 \\ -2x + my = 2 \end{cases}$$

Giải

Hệ phương trình $\begin{cases} x = 2 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ có nghiệm là (2 ; −3)

Để hai hệ phương trình đã cho tương đương thì nghiệm (2 ; −3) cũng là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = -7 \\ -2x + my = 2 \end{cases}$ (II)

Ta có $\begin{cases} 2m + (-3) = -7 \\ -4 - 3m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$

Kiểm tra với $m = -2$ thì hệ phương trình (II) có nghiệm $(2 ; -3)$

Vậy $m = -2$ thì hai hệ phương trình tương đương

10. Trong hệ toạ độ Oxy cho ba điểm $A(2 ; 5)$, $B(-1 ; -1)$, $C(4 ; 9)$.

a) Viết phương trình đường thẳng BC.

b) Chứng minh rằng đường thẳng BC và hai đường thẳng $y = 3$; $2y + x - 7 = 0$ là ba đường thẳng đồng quy.

c) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Giải

a) $(BC) : y = 2x + 1$

b) Đường thẳng $y = 3$ cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại $M(1 ; 3)$

Điểm M cũng nằm trên đường thẳng $2y + x - 7 = 0$

c) Toạ độ điểm A thỏa mãn phương trình đường thẳng BC

11. Xét các đường thẳng (d) có phương trình :

$$(m + 2)x + (m - 3)y - m + 8 = 0 \text{ (m là tham số)}$$

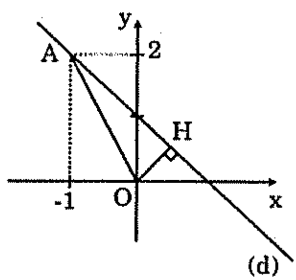
Định giá trị của m để khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Giải

Các đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định $A(-1 ; 2)$

$OH \le OA = \sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv A$



Phương trình OA có hệ số góc $a = \dfrac{y_A}{x_A} = -2$

Đường thẳng vuông góc với OA khi

$\dfrac{m+2}{3-m}.(-2) = -1$ $(m \ne 3)$

$\Leftrightarrow 2m + 4 = 3 - m \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{3}$

12. Cho hai đường thẳng : $(d_1) : 2m^2x + 3(m - 1)y - 3 = 0$

$(d_2) : mx + (m - 2)y - 2 = 0$ (m là tham số)

Hãy biện luận theo m vị trí tương đối của (d_1) ; (d_2).

Giải

Nếu $m = 0$ thì $d_1 \equiv d_2$

Nếu $m = 2$ thì d_1 cắt d_2

Giả sử $m \ne 0$ và $m \ne 2$

Nếu $\frac{2m^2}{m} \neq \frac{3(m-1)}{m-2} \Rightarrow m \neq 3$ và $m \neq \frac{1}{2}$ thì (d_1) cắt (d_2)

Nếu $\frac{2m^2}{m} = \frac{3(m-1)}{m-2} \Rightarrow m = 3$ hay $m = \frac{1}{2}$ thì $(d_1) \,//\, (d_2)$

🕮 BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

13. Tìm các số nguyên x, y thoả mãn đẳng thức :

a) $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

(Đề thi vào lớp 10, Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2003 – 2004)

b) $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy$

(Đề thi vào lớp 10, Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2006 – 2007)

Giải

a) $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy \Leftrightarrow (2y^2 - y - x)(x - 1) = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ 2y^2 - y - x = -1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x - 1 = -1 \\ 2y^2 - y - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

b) $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy \Leftrightarrow 8xy(xy - 1) + (x - y)^2 = 0$

Nếu xy là nghiệm nguyên của phương trình thì $xy(xy - 1) = 0$

$\Rightarrow 0 \le xy \le 1$. Suy ra

Nếu $xy = 0 \Rightarrow x = y = 0$; Nếu $xy = 1 \Rightarrow x = y = \pm 1$

§2. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Quy tắc thế :

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc thế gồm hai bước sau :

Bước 1 : Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

Bước 2 : Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho phương trình thứ hai trong hệ (phương trình thứ nhất cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia có được ở bước 1).

2. Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế :

– Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.

– Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

3. Quy tắc cộng đại số

Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành một hệ phương trình tương đương.

Quy tắc cộng đại số gồm hai bước :

Bước 1 : Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.

Bước 2 : Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia).

4. Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

– Nhân hai vế của một phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

– Áp dụng quy tắc cộng đại số để được phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).

– Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

14. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế :

a) $\begin{cases} \dfrac{7}{2}x - \dfrac{1}{3}y = -6 \\ \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{6}y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 1,2y = -1,08 \\ -1,3x + 0,5y = 0,31 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y = -14 \\ 3\sqrt{3}x + 2y = \sqrt{3}(4 - 3\sqrt{2}) \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2\sqrt{3}x + 3\sqrt{5}y = -21 \\ 4x - 2\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}(2 + \sqrt{5}) \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{2x - 3y}{4} - \dfrac{x + y - 1}{5} = 2x - y - 1 \\ \dfrac{4x + y - 2}{4} = \dfrac{2x - y - 3}{6} - \dfrac{x - y - 1}{3} \end{cases}$ f) $\begin{cases} (x-2)(6y+1) = (2x-3)(3y+1) \\ (2x+1)(12y-9) = (4x-1)(6y-5) \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} \dfrac{7}{2}x - \dfrac{1}{3}y = -6 \\ \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{6}y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x - 2y = -36 \\ 3x + 10y = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y - 36}{21} \\ 3\left(\dfrac{2y - 36}{21}\right) + 10y = -36 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y - 36}{21} \\ 72y = -216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x ; y) = (-2 ; -3)$.

b) $\begin{cases} 2x - 1,2y = -1,08 \\ -1,3x + 0,5y = 0,31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1,2y - 1,08}{2} \\ -1,3\left(\dfrac{1,2y - 1,08}{2}\right) + 0,5y = 0,31 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1,2y - 1,08}{2} \\ y = 1,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,3 \\ y = 1,4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x ; y) = (0,3 ; 1,4).

c) $\begin{cases} \sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y = -14 \\ 3\sqrt{3}x + 2y = \sqrt{3}(4 - 3\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x - 2\sqrt{3}\left(\dfrac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{6} - 3\sqrt{3}x}{2}\right) = -14 \\ y = \dfrac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{6} - 3\sqrt{3}x}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(9 + \sqrt{2}) = -9\sqrt{2} - 2 \\ y = \dfrac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{6} - 3\sqrt{3}x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-\sqrt{2}(9 + \sqrt{2})}{9 + \sqrt{2}} = -\sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x ; y) = ($-\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$).

d) $\begin{cases} -2\sqrt{3}x + 3\sqrt{5}y = -21 \\ 4x - 2\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}(2 + \sqrt{5}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}\left(\dfrac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{3}y}{4}\right) + 3\sqrt{5}y = -21 \\ x = \dfrac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{3}y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x ; y) = ($\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$).

e) $\begin{cases} \dfrac{2x - 3y}{4} - \dfrac{x + y - 1}{5} = 2x - y - 1 \\ \dfrac{4x + y - 2}{4} = \dfrac{2x - y - 3}{6} - \dfrac{x - y - 1}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(2x - 3y) - 4(x + y - 1) = 20(2x - y - 1) \\ 3(4x + y - 2) = 2(2x - y - 3) - 4(x - y - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} 114x = 76 \\ y = 34x - 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{-4}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x ; y) = $\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{-4}{3}\right)$.

f) $\begin{cases} (x - 2)(6y + 1) = (2x - 3)(3y + 1) \\ (2x + 1)(12y - 9) = (4x - 1)(6y - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y = -1 \\ 2x + 18y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x ; y) = (–2 ; 1).

15. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng :

a) $\begin{cases} x - \dfrac{5x-3y}{3} = \dfrac{3x-2y}{5} - 1 \\ 1 - \dfrac{2x-3y}{3} = \dfrac{4x-3y}{2} - y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2x+4}{5} + \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{3y+1}{4} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2\sqrt{3}x + 4\sqrt{5}y = 16 \\ 5\sqrt{3}x - 2y = -15 - \sqrt{5} \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3\sqrt{5}x + 4y = 15 - 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{5}x - \sqrt{3}y = -17 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{5}{8} \\ \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{-3}{8} \end{cases}$

f) $\begin{cases} (\sqrt{5}+2)x + (\sqrt{3}-\sqrt{2})y = 2 \\ (\sqrt{3}+\sqrt{2})x - (\sqrt{5}-2)y = 2 \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} x - \dfrac{5x-3y}{3} = \dfrac{3x-2y}{5} - 1 \\ 1 - \dfrac{2x-3y}{3} = \dfrac{4x-3y}{2} - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x - 21y = 15 \\ 16x - 21y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ 16x - 21y = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 16.3 - 21y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x ; y) = (3 ; 2).

b) (x ; y) = (2 ; 3)

c) $\begin{cases} -2\sqrt{3}x + 4\sqrt{5}y = 16 \\ 5\sqrt{3}x - 2y = -15 - \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10\sqrt{3}x + 20\sqrt{5}y = 80 \\ 10\sqrt{3}x - 4y = -30 - 2\sqrt{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y(20\sqrt{5} - 4) = 50 - 2\sqrt{5} \\ 5\sqrt{3}x - 2y = -15 - \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \dfrac{50 - 2\sqrt{5}}{20\sqrt{5} - 4} = \dfrac{\sqrt{5}(10\sqrt{5} - 2)}{2(10\sqrt{5} - 2)} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x ; y) = $(-\sqrt{3} ; \dfrac{\sqrt{5}}{2})$.

d) (x ; y) = $(-\sqrt{5} ; -\sqrt{3})$.

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{5}{8} \\ \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{-3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x+y} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{5}{8} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 10 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x ; y) = (5 ; 3).

f) $\begin{cases}(\sqrt{3}+\sqrt{2})x-(\sqrt{5}-2)y=2\\(\sqrt{5}+2)x+(\sqrt{3}-\sqrt{2})y=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-(\sqrt{5}-2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})y=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\\(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)x+(\sqrt{5}-2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})y=2(\sqrt{5}-2)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(\sqrt{3}+\sqrt{2})x-(\sqrt{5}-2)y=2\\x=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\\y=-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$(x\,;y)=(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\,;-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-2).$

16. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn số phụ :

a) $\begin{cases}\dfrac{-3}{x-y+1}+\dfrac{1}{x+y-2}=12\\\dfrac{2}{x-y+1}-\dfrac{3}{x+y-2}=-1\end{cases}$

b) $\begin{cases}x^2+2(y^2+2y)=10\\3x^2-(y^2+2y)=9\end{cases}$

c) $\begin{cases}\dfrac{7}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{5}{\sqrt{y+2}}=\dfrac{9}{2}\\\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{2}{\sqrt{y+2}}=4\end{cases}$

d) $\begin{cases}\dfrac{5}{\sqrt{x-7}}+\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{13}{6}\\\dfrac{7}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3}\end{cases}$

Giải

a) Đặt $u=\dfrac{1}{x-y+1}$ $(x-y\neq-1)$ và $v=\dfrac{1}{x+y-2}$ $(x+y\neq2)$

Ta có $\begin{cases}-3u+v=12\\2u-3v=-1\end{cases}$. Suy ra $\begin{cases}u=-5\\v=-3\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x\,;y)=\left(\dfrac{7}{24}\,;\,\dfrac{43}{30}\right)$.

b) Đặt $u=x^2$ và $v=y^2+2y$

Ta có $\begin{cases}u+2v=10\\3u-v=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+2v=10\\6u-2v=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=4\\v=3\end{cases}$

Suy ra $\begin{cases}x=2\\y=1\;;\;y=-3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-2\\y=1\;;\;y=-3\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là :

$(x\,;y)=(2\,;1)\,;(2\,;-3)\,;(-2\,;1)\,;(-2\,;-3)$

c) Đặt $u=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ $(x>1)$ và $v=\dfrac{1}{\sqrt{y+2}}$ $(y>-2)$

Ta có $\begin{cases} 7u - 5v = \dfrac{9}{2} \\ 3u + 2v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14u - 10v = 9 \\ 15u + 10v = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{y+2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x ; y) = (2 ; \dfrac{-3}{4})$.

17. Tìm giá trị của a và b :

Để hệ phương trình $\begin{cases} 2ax + (b+2)y = 3 \\ (a-1)x - by = 5 \end{cases}$ có nghiệm là $(x ; y) = (2 ; -1)$.

Giải

Vì $(x ; y) = (2 ; -1)$ là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} 2ax + (b+2)y = 3 \\ (a-1)x - by = 5 \end{cases}$ nên ta thu được hệ phương trình

$\begin{cases} 4a - (b+2) = 3 \\ 2(a-1) + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - b = 5 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

18. Tìm a và b :

a) Để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1 ; -2)$ và $B\left(-\dfrac{1}{3} ; -6\right)$.

b) Để đường thẳng $5x + ay = b$ đi qua điểm $I(-2 ; -3)$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1) : 3x - 4y = -5$, $(d_2) : -2x + 3y = 4$.

Giải

a) Vì đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1 ; -2)$ và $B(\dfrac{-1}{3} ; -6)$ nên

ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b = -2 \\ \dfrac{-1}{3}a + b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \end{cases}$

b) Gọi K là giao điểm của (d_1) và (d_2), toạ độ của K là nghiệm của hệ phương trình :

$\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ -2x + 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Nên $K(1 ; 2)$.

Vì đường thẳng $5x + ay = b$ đi qua hai điểm $I(-2 ; -3)$ và $K(1 ; 2)$

nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} -10 - 3a = b \\ 5 + 2a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$

19. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$ (m là tham số) có vô số nghiệm.

Giải

Từ phương trình $mx + y = m + 1$ ta có $y = m + 1 - mx$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta có :

$$x + m(m + 1 - mx) = 2 \Leftrightarrow (1 - m^2)x = (2 + m)(1 - m)$$

Để hệ phương trình có vô số nghiệm thì suy ra $\begin{cases} 1 - m^2 = 0 \\ (2 + m)(1 - m) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

Khi $m = 1$ thì hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 2$

Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x \in R \\ y = 2 - x. \end{cases}$

BÀI TẬP NÂNG CAO

20. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+z} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z+x} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 2 \\ y + \dfrac{1}{z} = 2 \\ z + \dfrac{1}{x} = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(y+z) = 8 \\ y(x+z) = 18 \\ z(x+y) = 20 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6} \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$.

Giải

a) Viết hệ đã cho dưới dạng $\begin{cases} xy + xz = 2(x + y + z) \\ xy + yz = 3(x + y + z) \\ xz + yz = 4(x + y + z) \end{cases}$

Suy ra : $xy = \dfrac{x + y + z}{2}$; $xz = \dfrac{3(x + y + z)}{2}$; $yz = \dfrac{5(x + y + z)}{2}$

Từ đó : $x : y : z = 3 : 5 : 15$

Hệ có nghiệm $(x ; y ; z) = \left(\dfrac{23}{10} ; \dfrac{23}{6} ; \dfrac{23}{2}\right)$.

b) Rút y từ phương trình thứ nhất, rút z từ phương trình thứ ba rồi thay vào phương trình còn lại của hệ ta được : $x = y = z = 1$

c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = -5. \end{cases}$

d) ĐK : $xy \neq 0$. Đặt $t = \dfrac{x}{y}$, phương trình (1) có dạng :

$$t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 6t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Nếu $t = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}y \Rightarrow y = \pm 2$

$t = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}y \Rightarrow y^2 = -9$ (loại)

Hệ có nghiệm : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2. \end{cases}$

21. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{8}{3} \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{zx}{z+x} = \dfrac{24}{7} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5xy = 6(x+y) \\ 7yz = 12(y+z) \\ 3xz = 4(x+z) \end{cases}$

Giải

a) Biến đổi hệ dưới dạng : $\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{8} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{7}{24}. \end{cases}$ Suy ra $x = 8$; $y = 4$; $z = 6$.

b) Xét hai khả năng

- $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ.
- $xyz \neq 0$ (nếu $x = 0$ thì từ (1) suy ra $y = 0$ và từ (2) suy ra $z = 0$

Hệ trở thành : $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{7}{12} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4. \end{cases}$

22. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x + y + xy = 1 \\ x + z + xz = 2 \\ y + z + yz = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1 + x^2} = y \\ \dfrac{2y^2}{1 + y^2} = z \\ \dfrac{2z^2}{1 + z^2} = x \end{cases}$

Giải

a) Biến đổi hệ trở thành $\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 2 \\ (x + 1)(z + 1) = 3 \\ (y + 1)(z + 1) = 6 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ z = -4. \end{cases}$

b) Biến đổi hệ trở thành $\begin{cases} (x + y)(x + z) = 2 \\ (y + z)(y + x) = 3 \\ (z + x)(z + y) = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = -1 \\ x + z = -2 \\ y + z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (0 ; 1 ; 2) và (0 ; –1 ; –2).

23. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x + y} = 1 - z \\ \dfrac{yz}{y + z} = 2 - x \\ \dfrac{zx}{z + x} = 2 - y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1 + x^2} = y \\ \dfrac{2y^2}{1 + y^2} = z \\ \dfrac{2z^2}{1 + z^2} = x \end{cases}$

Giải

a) Đưa hệ về dạng : $\begin{cases} xy + zx + zy = x + y \\ yz + xy + zx = 2(y + z) \\ zx + zy + xy = 2(z + x) \end{cases}$

Từ đó tìm được $x = 2$; $y = 2$; $z = 0$.

b) • $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ

• Nếu $x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$ và $z \neq 0$

$$\frac{1+x^2}{2x^2}=\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{1}{x^2}+1-\frac{2}{y}=0\quad(1)$$

Tương tự : $\frac{1}{y^2}+1-\frac{2}{z}=0$ (2) ; $\frac{1}{z^2}+1-\frac{2}{x}=0$ (3)

Từ (1) ; (2) ; (3) cho $\left(\frac{1}{x}-x\right)^2+\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{z}-1\right)^2=0\Rightarrow x=y=z=1.$

24. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases}x^2+2yz=x\\y^2+2zx=y\\z^2+2xy=z\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2-xy-xz+z^2=0\\x^2-xz-yz+3y^2=2\\y^2+xy+yz-z^2=2\end{cases}$.

Giải

a) Hệ trở thành

$$\begin{cases}x^2+2yz=x\\(x^2+2yz)-(y^2+2zx)=x-y\\(x^2+2yz)-(z^2+2xy)=x-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2yz=x\\(x-y)(x+y-2z-1)=0\\(x-z)(x+z-2y-1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2yz=x\\x-y=0\\x-z=0\end{cases}\text{ hay }\begin{cases}x^2+2yz=x\\x-y=0\\x+z-2y-1=0\end{cases}\text{ hay }\begin{cases}x^2+2yz=x\\x+y-2z-1=0\\x-z=0\end{cases}$$

$$\text{hay }\begin{cases}x^2+2yz=x\\x+y-2z-1=0\\x+y-2y-1=0\end{cases}$$

Từ đó tìm được tám nghiệm của hệ đã cho.

b) Cộng từng vế hai phương trình đầu rồi trừ từng vế cho phương trình cuối ta được : $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

Từ đó tìm được $(1 ; 1 ; 1)$ và $(-1 ; -1 ; -1)$ là nghiệm của hệ.

25. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình :

a) $\begin{cases}x^2+2xy-x-5y+6=0\\2y^2+xy-7x-5y+7=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}xy(x+y)=6\\yz(y+z)=12\\zx(z+x)=30\end{cases}$.

Giải

a) Hệ có nghiệm nguyên duy nhất $(x ; y)=(1 ; 2)$.

b) Từ hệ phương trình, ta có : $x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+zx^2=48$ và $(xyz)^2(48+2xyz)=2160$.

Đặt $t = xyz$ ta được : $t^3 + 24t^2 - 1080 = 0 \Leftrightarrow (t-6)(t^2 + 30t + 180) = 0$

Từ đó tìm được $x = 2$; $y = 1$; $z = 3$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

26. a) Cho các số a, b, x, y thoả mãn hệ : $\begin{cases} ax + by = 3 \\ ax^2 + by^2 = 5 \\ ax^3 + by^3 = 9 \\ ax^4 + by^4 = 17 \end{cases}$

Hãy tính giá trị của các biểu thức : $A = ax^5 + by^5$; $B = ax^{2001} + by^{2001}$

(Đề thi vào lớp 10, Toán Tin – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2001 – 2002)

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + x - xy - 2y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

(Đề thi vào lớp 10, Đại học Sư phạm Ngoại ngữ Hà Nội, năm 2003 – 2004)

Giải

a) Hệ trở thành $\begin{cases} ax^2 + by^2 + axy + byx = 3(x+y) \\ ax^3 + by^3 + ax^2y + bx^2y = 5(x+y) \\ ax^4 + by^4 + ax^3y + bxy^3 = 9(x+y) \\ ax^5 + by^5 + ax^4y + bxy^4 = 17(x+y) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 + xy(a+b) = 3(x+y) & (1) \\ 9 + 3xy = 5(x+y) & (2) \\ 17 + 5xy = 9(x+y) & (3) \\ ax^5 + by^5 = 17(x+y) & (4) \end{cases}$$

Từ (2) ; (3) ta được $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 4a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Vậy $A = ax^5 + by^5 = 33$; $B = ax^{2001} + by^{2001} = 2^{2001} + 1$.

b) Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} (x-2y)(x+y+1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được bốn nghiệm của hệ đã cho là :

$$\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}\ ;\ \frac{-\sqrt{5}}{5}\right);\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\ ;\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right);(0\ ;-1)\ ;(-1\ ;\ 0).$$

27. Giải hệ phương trình sau :

a)

1) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2\\[2mm] \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4\end{cases}$ *(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, toàn quốc năm 1992)*

2) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{3}{z}=-2\\[2mm] \dfrac{4}{xy}-\dfrac{3}{z^2}-\dfrac{2}{y}=3\end{cases}$ *(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 1, (vòng 2), Tp. Hồ chí Minh, năm học 2010 – 2011)*

b) Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình $\begin{cases}x+y+z=14\\ x+yz=19\end{cases}$

(Đề kiểm tra đội tuyển học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011)

Giải

a)

1) Điều kiện : $x, y, z \neq 0$

Thay $\dfrac{1}{z}=-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+2$ vào phương trình còn lại, ta được :

$$\frac{2}{xy}-\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2=4 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{4}{x}-\frac{4}{y}+\frac{2}{xy}+8=\frac{2}{xy}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}+4\right)+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{4}{y}+4\right)=0 \Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}-2\right)^2+\left(\frac{1}{y}-2\right)^2=0$$

Vậy $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ là nghiệm của hệ.

2) $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (-1\ ;-1\ ;\ 1)$.

b) Lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1) theo từng vế ta được :

$$yz-y-z=5 \Leftrightarrow (y-1)(z-1)=6$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ.

$$\begin{cases}x=5\\ y=2\\ z=7\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}x=7\\ y=3\\ z=4.\end{cases}$$

§3. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

Các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình :

Bước 1 : – Chọn các ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số ;
– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.
– Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2 : Giải hệ phương trình thu được.

Bước 3 : Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không thoả mãn điều kiện của ẩn, trả lời.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

28. Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được một số nhỏ hơn số đã cho là 27. Tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 77. Tìm số đã cho.

Giải

Gọi chữ số hàng chục là x ($x \in N^*$; $x \le 9$).

Gọi chữ số hàng đơn vị là y ($y \in N^*$; $y \le 9$).

Số đã cho là $10x + y$.

Số mới là $10y + x$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} 10x + y - 10y - x = 27 \\ 10x + y + 10y + x = 77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy số đã cho là 52.

29. Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 780 và nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 4 và số dư là 30.

Giải

Gọi số tự nhiên lớn là x và số tự nhiên nhỏ là y ($30 < y < x$)

Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 780 \\ x = 4y + 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 630 \\ y = 150 \end{cases}$

Vậy 630 là số tự nhiên lớn và 150 là số tự nhiên nhỏ.

30. Tính độ dài ban đầu hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Biết rằng nếu giảm mỗi cạnh góc vuông đi 2 m thì diện tích của tam giác giảm đi 12 m^2. Nếu một cạnh góc vuông tăng 4 m và cạnh góc vuông kia tăng 3 m thì diện tích của tam giác đó tăng thêm 31 m^2.

Giải

Gọi độ dài ban đầu hai cạnh góc vuông lần lượt là x (m), y (m) ($x > 2$; $y > 2$)

Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}(x-2)(y-2) = 12 \\ \frac{1}{2}(x+4)(y+3) - \frac{1}{2}xy = 31 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - (x-2)(y-2) = 24 \\ (x+4)(y+3) - xy = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 28 \\ 3x + 4y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$$

Vậy cạnh góc vuông ban đầu có độ dài lần lượt là 6 m và 8 m.

31. Trong phòng học có một số ghế dài. Nếu xếp mỗi ghế ba học sinh thì sáu học sinh không có chỗ ngồi. Nếu xếp mỗi ghế bốn học sinh thì thừa một ghế. Hỏi có bao nhiêu ghế và bao nhiêu học sinh ?

Giải

Gọi số ghế là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Gọi số học sinh là y ($y \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 6 = y \\ 4(x-1) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 6 = 4x - 4 \\ 3x + 6 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 36 \end{cases}$$

Vậy phòng học có 10 ghế dài và có 36 học sinh.

32. Một ô tô dự định đi từ A đến B lúc 12 giờ trưa. Nếu xe chạy với vận tốc 40 km/h thì sẽ đến B chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 60 km/h thì đến B sớm 1 giờ 20 phút so với dự định. Tính độ dài quãng đường AB và thời điểm ô tô xuất phát tại A.

Giải

Gọi độ dài quãng đường AB là x (km) ($x > 0$)

Gọi thời gian dự định đi đến B lúc 12 giờ trưa là y (giờ) $\left(y > \frac{4}{3}\right)$

Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} x = 40(y+2) \\ x = 60\left(y - \frac{4}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 8 \end{cases}$

Vậy quãng đường AB dài 400 km và thời điểm ô tô xuất phát tại A lúc 4 giờ sáng.

33. Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc và dự định làm xong trong 24 ngày. Họ cùng làm với nhau được 16 ngày thì đội thứ nhất được điều sang làm việc khác, đội thứ hai vẫn làm tiếp tục. Đội thứ hai tăng gấp đôi năng suất nên làm xong phần việc còn lại trong ba ngày rưỡi. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày xong công việc trên (với năng suất bình thường) ?

Giải

Gọi thời gian đội thứ nhất làm một mình xong công việc là x (ngày) (Điều kiện $x > 24$)

Do đó trong một ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Gọi là thời gian đội thứ hai làm một mình xong công việc là y (ngày) (y > 0)

Do đó trong một ngày đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Theo đề bài ta có $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24} \\ 16.\frac{1}{x} + 16.\frac{1}{y} + \frac{7}{2}.\frac{2}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 42 \\ y = 56 \end{cases}$

Vậy : Đội thứ nhất làm một mình trong 42 ngày thì xong việc

Đội thứ hai làm một mình trong 56 ngày thì xong việc.

34. Hai máy bơm nước vào ruộng. Nếu cho máy thứ nhất bơm suốt 8 giờ mới mở máy thứ hai cùng bơm thêm 4 giờ nữa thì đầy ruộng. Nếu cho máy bơm thứ nhất bơm suốt 10 giờ 30 phút mới mở máy thứ hai cùng bơm thêm 3 giờ nữa thì đầy ruộng. Nếu dùng một máy bơm thì phải bơm trong bao lâu nước mới đầy ruộng ?

Giải

Gọi thời gian để máy thứ nhất và máy thứ hai một mình bơm đầy ruộng lần lượt là x (giờ), y (giờ) (x, y > 1)

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{8}{x} + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \\ \frac{21}{2x} + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{4}{y} = 1 \\ \frac{27}{2x} + \frac{3}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 12 \end{cases}$$

35. Cho tam giác vuông có chu vi bằng 120 cm, cạnh huyền bằng 50 cm. Tính diện tích tam giác vuông.

Giải

Gọi hai cạnh vuông lần lượt là x (cm) và y (cm) (0 < x ; y < 25)

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 70 \\ x^2 + y^2 = 2500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 40 \\ y = 30 \end{cases}$

Vậy diện tích tam giác vuông bằng 600 cm^2.

BÀI TẬP NÂNG CAO

36. Xác định một đa thức bậc ba f(x) không có hạng tử tự do sao cho :

$$f(x) - f(x - 1) = x^2$$

Từ đó, chứng tỏ rằng tổng các bình phương của n số nguyên dương đầu tiên

$$f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Giải

Gọi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ là đa thức cần tìm. Ta có :

$ax^3 + bx^2 + cx - a(x-1)^3 - b(x-1)^2 - c(x-1) = x^2$, với mọi x.

$\Leftrightarrow 3ax^2 - (3a - 2b)x + a - b + c = x^2$, với mọi x.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ -3a + 2b = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Vậy $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{6} = \dfrac{x(x+1)(2x+1)}{6}$

Thay x lần lượt bằng n số nguyên dương đầu tiên : 1, 2, ..., n ta được

$f(1) - f(0) = 1^2$

$f(2) - f(1) = 2^2$ $\qquad \Rightarrow f(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

....

$f(n) - f(n-1) = n^2$

37. Mười hai người ăn 12 chiếc bánh. Mỗi người đàn ông ăn 2 chiếc, mỗi người đàn bà ăn $\frac{1}{2}$ chiếc và mỗi em bé ăn $\frac{1}{4}$ chiếc.

Hỏi có bao nhiêu đàn ông, đàn bà và trẻ em ?

Giải

Gọi x, y, z lần lượt là số đàn ông, đàn bà và trẻ em ($x, y, z \in N^*$; $x, y, z < 12$)

Ta có : $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{4} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 & (1) \\ 8x + 2y + z = 48 & (2) \end{cases}$

Nhân (1) với 2, rồi lấy (2) trừ đi ta được : $6x - z = 24$

$\Rightarrow z \vdots 6$ mà $0 < z < 12 \Rightarrow z = 6$. Suy ra $x = 5$, $y = 1$.

38. Có hai máy xúc thứ nhất và thứ hai. Thời gian máy xúc thứ nhất hoạt động một mình xong công việc nhiều hơn trường hợp cả hai máy cùng hoạt động xong công việc 8 giờ. Thời gian máy xúc thứ hai hoạt động một mình xong công việc nhiều hơn trường hợp cả hai máy cùng hoạt động xong công việc 4 giờ 30 phút.

Hỏi mỗi máy hoạt động một mình để làm công việc nói trên mất thời gian bao lâu ?

Giải

Gọi thời gian máy thứ nhất làm một mình xong việc là x(h)

Gọi thời gian máy thứ hai làm một mình xong việc là y(h) ($x, y > 0$)

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - \dfrac{xy}{x+y} = 8 \\ y - \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \dfrac{7}{2} \\ y - \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Suy ra : $y^2 - 9y - 15{,}75 = 0 \Leftrightarrow y = 10{,}5$; $y = -\dfrac{3}{2}$ (loại)

Vậy $x = y + 3{,}5 = 14$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

39. Một vận động viên thi bắn súng. Vận động viên đã bắn hơn 11 viên và đều bắn trúng vào các vòng 8, 9, 10 điểm. Tổng số điểm là 100 điểm. Hỏi vận động viên đã bắn bao nhiêu viên và kết quả bắn vào các vòng ra sao ?

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, trường chuyên Văn Toán huyện Đức Phổ, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 1991 – 1992)

Giải

Gọi x, y lần lượt là số lần bắn trúng vào các vòng 8, 9, 10 điểm ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$). Ta có : $\begin{cases} x + y + z > 11 \\ 8x + 9y + 10z = 100. \end{cases}$

Rõ ràng $8x + 8y + 8z < 8x + 9y + 10z = 100 \Rightarrow x + y + z \le 12$.

Vậy $x + y + z = 12$.

$$\begin{cases} 8x + 9y + 10z = 100 \\ x + y + z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow y + 2z = 4 \Rightarrow y = 4 - 2z$$

$y \ge 1 \Rightarrow 4 - 2z \ge 1 \Leftrightarrow z \le 1{,}5$. Vậy $z = 1$; $y = 2$; $x = 9$.

40. Giả sử rằng giá bán của viên kim cương (hột xoàn) tỉ lệ với bình phương khối lượng của nó, khi đem một viên kim cương cắt thành ba phần và vẫn bán với giá như trên (đúng tỉ lệ trên) thì tổng số tiền thu được tăng hay giảm và trong trường hợp chia cắt nào thì sự sai biệt về giá lớn nhất ?

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1995 – 1996)

Giải

Giả sử viên kim cương có khối lượng M bị cắt thành ba phần có khối lượng a, b, c.

Gọi A là giá bán của M ; x, y, z lần lượt là giá bán của a, b, c

Ta có : $\dfrac{A}{M^2} = \dfrac{x}{a^2} + \dfrac{y}{b^2} + \dfrac{z}{c^2} = \dfrac{A - (x + y + z)}{M^2 - (a^2 + b^2 + c^2)} = \dfrac{A - (x + y + z)}{2(ab + bc + ac)}$

Giá trị giảm $A - (x + y + z) = \dfrac{2A(ab + bc + ac)}{M^2}$

Ta có $3(ab + bc + ac) \le (a + b + c)^2 \Rightarrow A - (x + y + z) \le \dfrac{3}{4}A$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{4y+1}{5} = \dfrac{19}{10} \\ \dfrac{2-x}{4} - \dfrac{2y-1}{6} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt{3}x - \sqrt{2}y = \dfrac{23}{6} \\ -2\sqrt{2}x + 4\sqrt{3}y = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5\sqrt{3}x - 2y = -15 - \sqrt{5} \\ -2\sqrt{3}x + 4\sqrt{5}y = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4(x^2+2x) - 3(y^2+y) = -10 \\ 5(x^2+2x) + 2(y^2+y) = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5|x+1| - 3|y-2| = -1 \\ 2|x+1| + |y-2| = 4 \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{4y+1}{5} = \dfrac{19}{10} \\ \dfrac{2-x}{4} - \dfrac{2y-1}{6} = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(3x-1) - 2(4y+10) = 19 \\ 3(2-x) - 2(2y-10) = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -7. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3\sqrt{3}x - \sqrt{2}y = \dfrac{23}{6} \\ -2\sqrt{2}x + 4\sqrt{3}y = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18\sqrt{3}x - 6\sqrt{2}y = 23 \\ -6\sqrt{2}x + 12\sqrt{3}y = \sqrt{6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 108x - 12\sqrt{6}y = 46\sqrt{3} \\ -12x + 12\sqrt{6}y = 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 96x = 48\sqrt{3} \\ -12x + 12\sqrt{6}y = 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}. \end{cases}$

c) $(x\ ;\ y) = \left(-\sqrt{3}\ ;\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

d) Đặt $u = x^2 + 2x$ và $v = y^2 + y$

Ta có $\begin{cases} 4u - 3v = -10 \\ 5u + 2v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8u - 6v = -20 \\ 15u + 6v = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 2. \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} x^2 + 2x = -1 \\ y^2 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \text{ hay } y = -2 \end{cases}$

Vậy $(x\ ;\ y) = (-1\ ;\ 1)$; $(x\ ;\ y) = (-1\ ;\ -2)$.

e) Ta có $\begin{cases} |x+1| = 1 \\ |x-2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ hay } x = -2 \\ y = 4 \text{ hay } y = 0 \end{cases}$

Vậy $(x\ ;\ y) = \{(0\ ;\ 4)\ ;\ (0\ ;\ 0)\ ;\ (-2\ ;\ 4)\ ;\ (-2\ ;\ 0)\}$.

2. a) Cho bốn điểm A(1 ; 1), $B\left(-\frac{1}{4};-4\right)$, C(2 ; 5), $D\left(\frac{1}{2};-1\right)$. Hỏi bốn điểm A, B, C, D có thẳng hàng không ? Vì sao ?

b) Tìm y để ba điểm sau thẳng hàng : A(1 ; –1), $B\left(-\frac{1}{3};-5\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};\ y\right)$.

Giải

a) Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm A và C ta có : $y = 4x - 3$
Sau đó chứng tỏ B và D thuộc đường thẳng trên.

b) (AB) : $y = 3x - 4$

$y = -\frac{11}{2}$.

3. Trong mặt phẳng toạ độ cho ba điểm A(1 ; 1), B(2 ; 3), C(5 ; 7).

a) Viết phương trình các đường thẳng AB, BC.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua C và song song với đường thẳng AB.

c) Xác định toạ độ đỉnh thứ tư D của hình bình hành ABCD.

Giải

a) (AB) : $y = 2x - 1$ và (BC) : $4x - 3y = -1$.

b) (CD) : $y = 2x - 3$.

c) (AD) : $4x - 3y = 1$.

Toạ độ đỉnh D của hình bình hành ABCD là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 4x - 3(2x - 3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$

Vậy D(4 ; 5).

4. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau :

$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$ có nghiệm thoả mãn $x > 0$; $y > 0$.

Giải

Bằng phương pháp thế ta tìm được : $\begin{cases} x = \dfrac{m+2}{m+1} \ (m \neq \pm 1) \\ y = \dfrac{1}{m+1}. \end{cases}$

Để $x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{m+2}{m+1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+2 > 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+2 < 0 \\ m+1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -1 \\ m < -2 \end{array}\right.$

Để $y > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m+1} > 0 \Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Vậy $m > -1$ thì nghiệm của hệ thoả mãn điều kiện $x > 0$; $y > 0$.

5. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x + y = m + 1 \\ x^2y + xy^2 = 2m^2 - m - 3 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = 3.

b) Chứng minh hệ phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m.

Giải

a) Khi m = 3, ta có $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$

b) Ta có $\begin{cases} x + y = m + 1 \\ xy(x + y) = (m + 1)(2m - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m + 1 \\ xy(m + 1) = (m + 1)(2m - 3). \end{cases}$

- Khi $m + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ xy(x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \in R. \end{cases}$

  Do đó hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.

- Khi $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

  Suy ra $\begin{cases} x + y = m + 1 \\ xy = 2m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m + 1 - x \\ x^2 - (m + 1)x + 2m - 3 = 0. \end{cases}$

  Xét $x^2 - (m + 1)x + 2m - 3 = 0$

  $$\Leftrightarrow \left[x + \frac{1}{2}(m + 1)\right]^2 - \frac{1}{4}(m + 1)^2 + 2m - 3 = 0$$

  $$\Leftrightarrow \left[x + \frac{1}{2}(m + 1)\right]^2 = \frac{(m + 3)^2 + 4}{4} > 0, \text{ với mọi } m \in R$$

  nên luôn có nghiệm x. Do đó hệ đã cho có nghiệm.

  Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm với mọi m.

6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - my = 3 \\ mx + 3y = 4 \end{cases}$

Với giá trị nguyên nào của m thì nghiệm của hệ phương trình thoả mãn : $x < 0$ và $y > 0$.

Giải

Bằng phương pháp thế ta tìm được : $\begin{cases} x = \dfrac{4m + 9}{m^2 + 6} \\ y = \dfrac{8 - 3m}{m^2 + 6} \end{cases}$

Để $x < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4m + 9}{m^2 + 6} < 0 \Leftrightarrow 4m + 9 < 0$ (vì $m^2 + 6 > 0$) $\Leftrightarrow m < -\dfrac{9}{4}$

Để $y > 0 \Leftrightarrow 8 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{8}{3}$

Suy ra $-\dfrac{8}{3} < m < \dfrac{9}{4}$ mà $m \in Z$ nên $m \in \{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$.

7. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + 2\sqrt{xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy + 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 5 \\ \sqrt{2x+1} - \sqrt{y+2} = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} \end{cases}$

Giải

a) Điều kiện $x \ge 0$ và $y \ge 0$ (*)

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2(x^2+y^2)} + 2\sqrt{xy} = 16 \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2(x^2+y^2)} = x + y \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \text{ thoả (*)}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x ; y) = (4 ; 4)$.

b) $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy + 4 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 4 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4. \end{cases}$

c) $$\begin{cases} x - y = 5 \\ \sqrt{2x+1} - \sqrt{y+2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 5 \\ \sqrt{2y+11} - \sqrt{y+2} = 2 \end{cases}$$

Giải $\sqrt{2y+11} - \sqrt{y+2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -2 \\ 4\sqrt{y+2} = y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -2 \\ y^2 - 6y - 7 = 0 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 12 \\ y = 7 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 12 \\ y = 7. \end{cases}$

d) Điều kiện : $x \ne 0$ và $y \ne 0$

Ta có $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \dfrac{13}{6}xy \Leftrightarrow (x-y)^2 - \dfrac{25}{6}xy = 0$

Suy ra $xy = 6$.

Do đó ta có $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$

8. a) Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d) : $2x - 3y = 9$. Hãy tìm trên (d) các điểm có toạ độ là những số nguyên.

b) Cần lắp đặt một đường ống dẫn nước dài 21 m bằng hai loại ống : loại ống dài 2 m và loại ống dài 3 m.

Hỏi mỗi loại cần bao nhiêu ống ?

c) Cho A(2 ; 13) và B(17 ; 60). Có bao nhiêu điểm thuộc đoạn thẳng AB có hoành độ và tung độ là các số nguyên?

Giải

a) Ta có $2x - 3y = 9 \Leftrightarrow y = \dfrac{2x-9}{3} = x - 3 - \dfrac{x}{3}$

Dễ thấy $y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3} \in \mathbb{Z}$, đặt $t = \dfrac{x}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3t$

Vậy những điểm nằm trên đường thẳng (d) có toạ độ là những số nguyên được định bởi : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t - 3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{Z}$.

b) Gọi số ống dài 2m là x ; số ống dài 3m là y. Điều kiện $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $2x + 3y = 21 \Leftrightarrow y = 7 - x + \dfrac{x}{3}$

$y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3} \in \mathbb{Z}$, đặt $t = \dfrac{x}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3t$.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 7 - 2t \end{cases}$ với $t \in \mathbb{Z}$

$x, y > 0 \Leftrightarrow 0 < t < \dfrac{7}{2} \Rightarrow t \in \{1 ; 2; 3\}$.

Vậy có ba phương án chọn các loại ống.

c) Phương trình đường thẳng AB là $y = \dfrac{47}{15}x + \dfrac{101}{15}$. Cần tìm số nghiệm nguyên của phương trình mà $2 \le x \le 17$.

9. a) Cho hai đường thẳng $(d_1) : mx - y - m = 0$ và $(d_2) : x + my - 5 = 0$.

Chứng minh rằng với mọi m hai đường thẳng trên luôn luôn cắt nhau và giao điểm của chúng nằm trên một đường tròn cố định.

b) Vẽ đồ thị của hàm số sau đây :

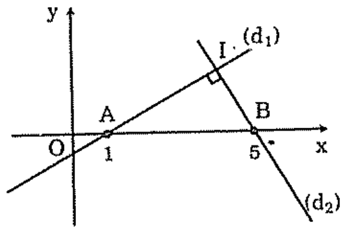
$$y = f(x) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}\right)^2.$$

Giải

a) • Nếu $m \neq 0$ thì (d_1) có hệ số góc $a_1 = m$, (d_2) có hệ số $a_2 = -\dfrac{1}{m}$

Vì $a_1.a_2 = -1 \Rightarrow d_1 \perp d_2$ nghĩa là d_1, d_2 cắt nhau.

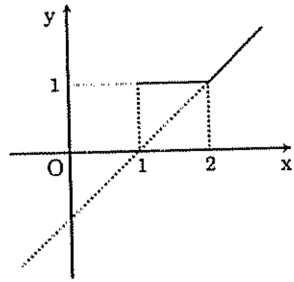
• Nếu $m = 0$ thì hai đường thẳng tương ứng là $y = 0$; $x = 5$, hiển nhiên chúng vuông góc nhau, (d_1) đi qua điểm cố định $A(1 ; 0)$ và (d_2) đi qua điểm cố định $B(5 ; 0)$ với mọi m, $(d_1) \perp (d_2)$ tại $I \Rightarrow I$ nằm trên đường tròn cố định đường kính AB.



b) TXĐ : $x \geq 1$

$$y = \frac{1}{2}(x + |x - 1|)$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ với } 1 \leq x \leq 2 \\ x - 1 \text{ với } x \geq 2 \end{cases}$$



10. a) Hãy xác định m sao cho ba đường thẳng sau đây đồng quy trên mặt phẳng Oxy ($m \neq -1 \pm \sqrt{2}$): $(d_1) : mx + y + 2m + 1 = 0$

$(d_2) : (m + 1)x + m^2y + 5 = 0$

$(d_3) : x + (m + 2)y + m + 4 = 0$

b) Hãy biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ các điểm M(x ; y) thoả mãn :

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{4y^2 + 4y + 1} = 6.$$

Giải

a) Toạ độ giao điểm A của hai đường thẳng (d_1), (d_3) là nghiệm của hệ.

$$\begin{cases} mx + y + 2m + 1 = 0 \\ x + (m + 2)y + m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -mx - (2m + 1) \\ (m^2 + 2m - 1)(x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy $A(-2 ; -1)$.

(d_1), (d_2) ; (d_3) đồng quy

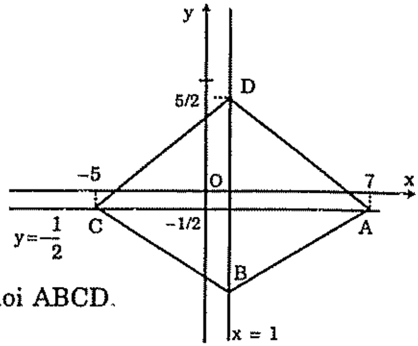
$\Leftrightarrow A \in (d_2) \Leftrightarrow (m - 1)(m + 3) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hay $m = -3$.

b) Xét các điểm M(x ; y) thoả hệ thức : $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{4y^2 + 4y + 1} = 6$

$\Leftrightarrow |x - 1| + |2y + 1| = 6.$

Có bốn khả năng xảy ra :

- $x \ge 1\ ;\ y \ge -\dfrac{1}{2}\ :\ x + 2y = 6$
- $x \ge 1\ ;\ y \le -\dfrac{1}{2}\ :\ x - 2y = 8$
- $x \ge 1\ ;\ y \ge -\dfrac{1}{2}\ :\ -x + 2y = 4$
- $x \le 1\ ;\ y \le -\dfrac{1}{2}\ :\ -x - 2y = 6.$



Đó chính là bốn cạnh của hình thoi ABCD.

11. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} |y| = x - 2 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{4} = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x| + 3y = 7 \\ 2x + 2|y - 1| = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = \sqrt{4z - 1} \\ y + z = \sqrt{4x - 1} \\ z + x = \sqrt{4y - 1} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z + \sqrt{x + y + z + 1} = 11 \\ 14x = 7y = 6z \end{cases}$

Giải

a) Hệ tương đương với : $\begin{cases} x - |y| = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$. Xét $y \ge 0$; $y < 0$, ta tìm được hệ có nghiệm duy nhất $(x\ ;\ y) = (3\ ;\ 1)$.

b) Xét 4 trường hợp :

- $x \le 0\ ;\ y \le 1$: Hệ trở thành : $\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 2x + 2(1 - y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{4} > 0 \\ y = \dfrac{15}{4} > 1 \end{cases}$ (loại)
- $x \le 0\ ;\ y > 1$: Hệ trở thành : $\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 2x + 2(y - 1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{8} > 0 \\ y = \dfrac{17}{8} \end{cases}$ (loại)
- $x > 0\ ;\ y \le 1$: Hệ trở thành : $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 2(y - 1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{8} > 0 \\ y = \dfrac{13}{8} > 1 \end{cases}$ (loại)
- $x > 0\ ;\ y > 1$: Hệ trở thành : $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 2(y - 1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} > 0 \\ y = \dfrac{9}{4} > 1. \end{cases}$

c) Nhân mỗi phương trình của hệ với 2 rồi cộng lại ta được

$$(\sqrt{4x-1}-1)^2+(\sqrt{4y-1}-1)^2+(\sqrt{4z-1}-1)^2=0$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x\,;y\,;z)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

d) Đặt $t=\sqrt{x+y+z+1}$; $t\ge 0$, phương trình (1) của hệ trở thành :

$t^2+t-12=0\Leftrightarrow(t-3)(t+4)=0\Leftrightarrow t=3$

Vậy $x+y+z=8$.

$14x=7y=6z\Rightarrow\frac{x}{3}=\frac{y}{6}=\frac{z}{y}=\frac{x+y+z}{3+6+7}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{3}{2}\,;y=3\,;z=\frac{7}{2}$.

12. a) Với giá trị nào của tham số m, phương trình sau có nghiệm duy nhất ?

$$|2x-m|+1=|x+3|$$

b) Với giá trị của m thì phương trình :

$|x+1|-|x-1|=mx+1$ có nghiệm duy nhất ?

Giải

a) Phương trình tương đương : $|2x-m|=|x+3|-1$

Đồ thị hàm số $y=|2x-m|$ và đồ thị $y=|x+3|-1$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{m}{2}=-4\\ \frac{m}{2}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-8\\ m=-4.\end{array}\right.$

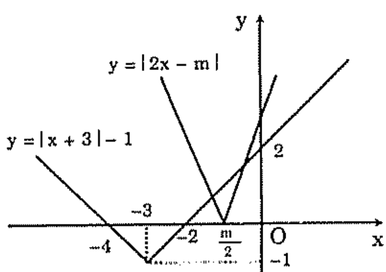
b) Vẽ hai đồ thị hai hàm số :

$y=|x+1|-|x-1|$ và $y=mx+1$

Rồi tìm điều kiện của m để hai đồ thị nói trên chỉ có một điểm chung.

Đường thẳng $y=mx+1$ đi qua điểm cố định $(0\,;1)$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $m\le 0$; $m>1$.



13. a) Định m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất (x ; y)

$\begin{cases}(m-1)x-my=3m-1\\ 2x-y=m+5\end{cases}$ thoả mãn : x^2+y^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho hệ phương trình : $\begin{cases}x-my=1\\ mx+y=3\end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm x, y thoả mãn $xy<0$.

Giải

a) Hệ tương đương : $\begin{cases}y=2x-m-5\\ (m+1)x=(m+1)^2\end{cases}$

Với m ≠ –1 hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = m+1 \\ y = m-3 \end{cases}$

$$x^2 + y^2 = (m + 1)^2 + (m - 3)^2 = 2(m - 1)^2 + 8 \geq 8$$

Vậy giá trị nhỏ nhất $(x^2 + y^2) = 8 \Leftrightarrow m = 1$

b) Với mọi m, hệ có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x = \dfrac{3m+1}{1+m^2} \\ y = \dfrac{3-m}{1+m^2} \end{cases}$

$$xy < 0 \Leftrightarrow (1 + 3m)(3 - m) < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{3} \text{ hay } m > 3.$$

14. a) Tìm các số nguyên dương khác nhau x, y thoả : $x^3 + 7y = y^3 + 7x$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^3 - y^3 = 3xy + 1$

c) Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình : $\begin{cases} x - y - z = -3 \\ x^2 - y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$

Giải

a) Phương trình tương đương : $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 7) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$ (vì $x \neq y$)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương,

ta có $7 = x^2 + y^2 + xy \geq 3xy \Rightarrow xy = 1$ hay $xy = 2$.

Suy ra $xy = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ (Thử lại)

b) Phương trình tương đương với :

$$(x - y - 1)(x^2 + y^2 + 1 + xy - y + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 + 1 + xy - y + x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 1 \\ (x+y)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 = 0 \end{array}\right.$$

....

c) $\begin{cases} x - y - z = -3 \\ x^2 - y^2 - z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + z - 3 \\ (y-3)(z-3) = 5 \end{cases}$

Vì $y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-2 ; 2 ; 4; 8\}$. Vậy hệ có bốn nghiệm là :

$(x ; y ; z) = (-3 ; -2 ; 2) ; (-3 ; 2 ; -2) ; (9 ; 4 ; 8) ; (9 ; 8 ; 4)$.

Chương IV. HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

§1. HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị của x thuộc R.

2. Tính chất

Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

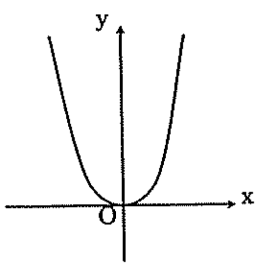
3. Nếu $a > 0$ thì $y > 0$ với mọi $x \neq 0$; $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$.

Nếu $a < 0$ thì $y < 0$ với mọi $x \neq 0$; $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 0$.

4. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một đường cong đi qua gốc toạ độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một parabol với đỉnh O.

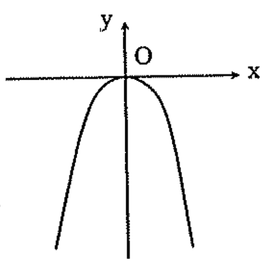
Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị (hình a).

Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị (hình b).



$a > 0$

Hình a



$a < 0$

Hình b

B/ BÀI TẬP

🕮 BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Cho hàm số $y = -x^2$

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $2 \leq x < \frac{5}{2}$.

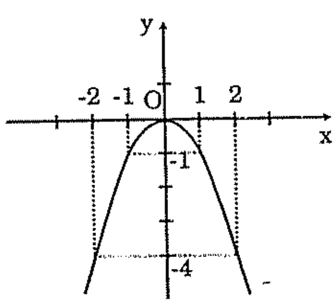
Giải

a) Vẽ (P)

- Tập xác định : R
- Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

- Vẽ đồ thị
- Nhận xét : Đồ thị hàm số $y = -x^2$ là đường parabol đi qua gốc toạ độ, nằm phía trục hoành và nhận trục tung làm trục đối xứng.



b) Hàm số $y = f(x) = -x^2$ có dạng $y = ax^2$ với $a = -1 < 0$ nên hàm số nghịch biến khi $x > 0$.

Ta có $0 < 2 \le x \le \frac{5}{2}$. Do đó $f(2) \ge f(x) \ge f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow -4 \ge f(x) \ge \frac{-25}{4}$

$$f(x) = -4 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f(x) = \frac{-25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $2 \le x \le \frac{5}{2}$ lần lượt là -4 ; $\frac{-25}{4}$.

2. Cho hai hàm số $y = \frac{-1}{4}x^2$ và $y = -x$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tìm toạ độ các giao điểm của hai đồ thị.

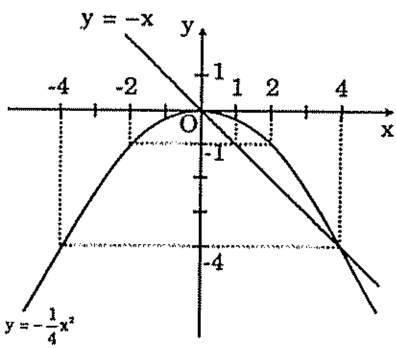
Giải

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{-1}{4}x^2$

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{-1}{4}x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Vẽ đồ thị hàm số $y = -x$

x	0	1
$y = -x$	0	-1



b) Gọi M(x ; y) là toạ độ giao điểm của hai đồ thị đã cho. Do đó toạ độ điểm M thoả :

$$\begin{cases} y = \frac{-1}{4}x^2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 = -x \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x = 4 \\ y = -4 \end{cases}$$

Vậy hai giao điểm cần tìm là (0 ; 0) và (4 ; -4).

3. Cho hàm số $y = ax^2$.

a) Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của nó cắt đường thẳng $y = 2x - 3$ tại điểm M có tung độ bằng -1.

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x - 3$ và của hàm số $y = ax^2$ với giá trị của a vừa tìm được trong câu a) trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

c) Tìm toạ độ các giao điểm của hai đồ thị.

Giải

a) Vì điểm M thuộc đồ thị $y = 2x - 3$ nên toạ độ điểm M thoả phương trình này, nghĩa là $-1 = 2x - 3$ nên $x = 1$.

Do đó $M(1 ; -1)$.

Vì điểm M cũng thuộc đồ thị $y = ax^2$ nên $-1 = a.1^2 = a$.

Vậy $a = -1$ nên $y = ax^2$ trở thành $y = -x^2$.

b) Học sinh tự vẽ đồ thị.

c) Hai giao điểm là $(1 ; -1)$ và $(-3 ; -9)$.

4. Tìm các điểm thuộc parabol (P) : $y = \frac{x^2}{2}$ sao cho các điểm đó cách đều hai trục toạ độ.

Giải

Xét điểm bất kì $A(x ; y)$.

Điểm A cách đều hai trục toạ độ $\Leftrightarrow |y| = |x| \Leftrightarrow y = \pm x$.

Do đó điểm A thuộc đường thẳng : $y = x$ hay $y = -x$.

Mặt khác $A \in (P)$ nên toạ độ của A thoả :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Hay $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2. \end{cases}$

Vậy có ba điểm $O(0 ; 0)$; $A(2 ; 2)$; $A'(-2 ; 2)$ thuộc parabol cách đều hai trục toạ độ.

5. Cho hàm số (P) : $y = (|m + 2| - 3)x^2$.

a) Tìm các giá trị của m để hàm số nghịch biến khi $x > 0$.

b) Tìm các giá trị của m để hàm số đồng biến khi $x > 0$.

Giải

Hàm số đã cho có dạng : $y = ax^2$ với $a = |m + 2| - 3$.

a) Hàm số nghịch biến với $x > 0 \Leftrightarrow a < 0 \Leftrightarrow |m + 2| - 3 < 0$

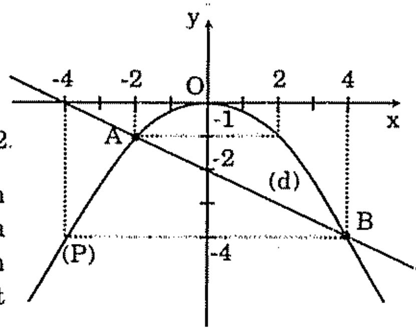
$\Leftrightarrow |m + 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < m + 2 < 3 \Leftrightarrow -5 < m < 1$.

b) $m > 1$ hoặc $m < -5$.

6. a) Vẽ đồ thị của hàm số (P) : $y = \frac{-x^2}{4}$ và đường thẳng (d) : $y = \frac{-x}{2} - 2$ trên cùng mặt phẳng toạ độ.

b) Giải bất phương trình sau bằng đồ thị $x^2 - 2x - 8 < 0$.

Giải



a) Xem hình bên.

b) Ta có $x^2 - 2x - 8 < 0$ (1)

$\Leftrightarrow -x^2 > -2x - 8 \Leftrightarrow \frac{-x^2}{4} > \frac{-x}{2} - 2.$

Phần parabol nằm phía trên đường thẳng (d) là cung AOB của (P). Chiếu vuông góc cung này lên Ox ta được tập nghiệm của bất phương trình (1) là $-2 < x < 4$.

Kiểm tra : $x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 9 \Leftrightarrow |x-1| < 3$

$\Leftrightarrow -3 < x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4.$

7. a) Tìm giá trị không âm của m để đồ thị hàm số (P) : $y = (|m-2| - 2)x^2$ đi qua điểm K(–3 ; 2).

b) Tìm giá trị không dương của m để đồ thị hàm số (P) : $y = (m^2 - 2m)x^2$ đi qua điểm H(2 ; 12).

Giải

a) $K \in (P) \Leftrightarrow 2 = (|m-2| - 2)(-3)^2 \Leftrightarrow |m-2| = \frac{20}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{38}{9} \\ m = \frac{-2}{9} \end{array}\right.$

Với $m \geq 0$, ta chọn $m = \frac{38}{9}$ là giá trị cần tìm.

b) $H \in (P) \Leftrightarrow 12 = (m^2 - 2m).2^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)(m-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \end{array}\right.$

Với $m \leq 0$, ta chọn $m = -1$ là giá trị cần tìm.

8. Cho hàm số $y = -3x^2$. Hãy tính : $f(3 - 2\sqrt{2})$; $f(3 + 2\sqrt{2})$; $f\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)$.

Giải

$f(3 - 2\sqrt{2}) = -3(3 - 2\sqrt{2})^2 = -3(17 - 12\sqrt{2}).$

$f(3 + 2\sqrt{2}) = -3(3 + 2\sqrt{2}) = -3(17 + 12\sqrt{2}).$

$f\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right) = -3\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)^2 = -3\left[\frac{(3-2\sqrt{2})^2}{1}\right]^2 = -3(3 - 2\sqrt{2})^4.$

BÀI TẬP NÂNG CAO

9. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2}{4}$

b) Gọi M là một điểm tuỳ ý nằm trên parabol (P). Gọi K là trung điểm OM. Khi điểm M di chuyển trên (P) thì K chuyển động trên đường nào ?

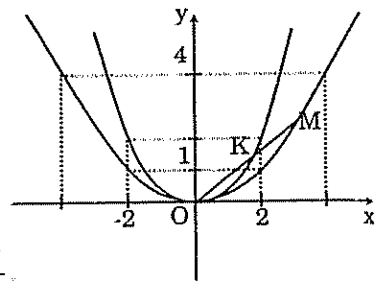
Giải

b) Gọi toạ độ của điểm $M(x_0 ; y_0)$, $M \in (P)$ nên : $y_0 = \dfrac{x_0^2}{4}$.

Gọi toạ độ của điểm K là (x ; y) ta cần biểu thị y theo x

K là trung điểm OM nên

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_0}{2} \\ y = \dfrac{y_0}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2x \\ y_0 = 2y. \end{cases}$$



Suy ra : $2y = \dfrac{1}{4}.(2x)^2 \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{2}$.

Điểm K di chuyển trên (P) : $y = \dfrac{x^2}{2}$.

10. Cho parabol $y = \dfrac{x^2}{2}$, điểm $A\left(0 ; \dfrac{1}{2}\right)$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = -\dfrac{1}{2}$. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc parabol.

Chứng minh rằng MA bằng khoảng cách MH từ điểm M đến đường thẳng (d).

Giải

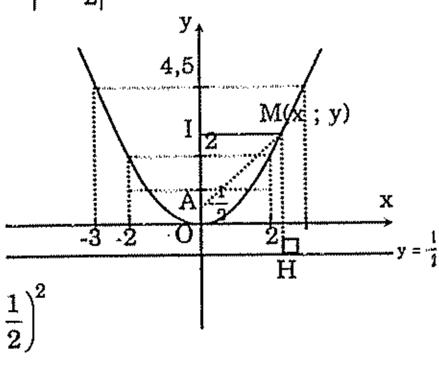
Ta luôn có $MH = y + \dfrac{1}{2}$

Kẻ $MI \perp Oy$, ta có : $MI = |x|$; $AI = \left|y - \dfrac{1}{2}\right|$

$$\Rightarrow MA^2 = MI^2 + AI^2$$

$$= x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4}.$$



Do $y = \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 = 2y$.

$$MA^2 = 2y + y^2 - y + \frac{1}{4} = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow MA = y + \dfrac{1}{2}$ (do $y \geq 0$). Vậy MA = MH.

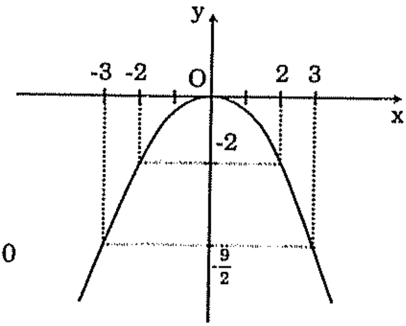
11. a) Cho hàm số (P) : $y = ax^2$. Xác định a biết rằng M(2 ; –2) thuộc đồ thị (P). Chứng tỏ rằng parabol đó đi qua điểm N(–4 ; –8) và không đi qua điểm E(6 ; –10).

b) Tìm những điểm trên parabol cách đều hai trục toạ độ.

c) Tìm toạ độ điểm A, B là giao điểm của parabol với đường thẳng (d) : $y = x - \frac{3}{2}$. Tính S_{AOB}.

d) Giải bất phương trình : $x^2 + 2x - 3 \le 0$ bằng đồ thị.

Giải



a) (P) : $y = -\frac{x^2}{2}$.

b) Xét $M\left(x_0 ; -\frac{x_0^2}{2}\right) \in (P)$

M cách đều hai trục toạ độ nên

$|x_0| = \left|-\frac{x_0^2}{2}\right| \Leftrightarrow |x_0|(|x_0| - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = 0$ hay $x_0 = \pm 2$

Các điểm cần tìm : O(0 ; 0) ; M(2 ; –2) ; M(–2 ; –2).

c) $A\left(-3 ; -\frac{9}{2}\right)$ và $B\left(1 ; -\frac{1}{2}\right)$. $S_{OAB} = 3$ (đvdt).

d) $-3 \le x \le 1$.

12. Vẽ đồ thị các hàm số sau :

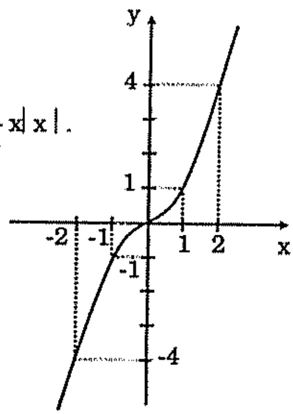
a) $y = x|x|$

b) $y = -\frac{1}{3}x|x|$.

Giải

a) $y = |x|x = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \ge 0 \\ -x^2 & \text{với } x < 0. \end{cases}$

b) $y = -\frac{1}{3}x|x| = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2 & \text{với } x \ge 0 \\ \frac{1}{3}x^2 & \text{với } x < 0. \end{cases}$



$y = |x|x$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

13. Cho hàm số : $y = ax^2 + bx + c$ $(a \ne 0)$ có đồ thị (P).

Xác định a, b, c biết rằng hàm số đạt giá trị cực trị bằng 1 và đi qua hai điểm A(2 ; 0) và B(–2 ; –8).

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, huyện Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1997 – 1998)

Giải

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Nếu $a > 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$a < 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

Hàm số đạt giá trị cực trị bằng 1 $\Rightarrow -\frac{b^2 - 4a}{4a} = 1$.

Ta có a, b, c là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 & (\text{do qua } A(2\ ;\ 0)) \\ 4a - 2b + c = -8 & (\text{do qua } B(-2\ ;\ -8)) \\ 4ac - b^2 = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1\ ;\ b = 2\ ; c = 0 \\ a = -\frac{1}{4}; b = 2\ ; c = -3 \end{cases}$$

Vậy có hai hàm số thoả mãn yêu cầu bài toán :

$$y = -x^2 + 2x \text{ và } y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3.$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI. CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Định nghĩa :

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn ; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$.

2. Giải phương trình bậc hai khuyết :

+ Với c = 0 : phương trình có dạng :

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = -\frac{b}{a} \ (a \neq 0).$$

+ Với b = 0 : phương trình có dạng : $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$ (1)

Điều kiện để phương trình có nghiệm :

$$-\frac{c}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ -\frac{c}{a} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ ac < 0 \end{array}\right. \text{ (a, c trái dấu)}$$

Với điều kiện trên, (1) $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

3. Giải phương trình bậc hai dạng đầy đủ bằng công thức nghiệm :

Đối với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ và biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$.

– Nếu $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \; ; \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

– Nếu $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

– Nếu $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.

Chú ý : Nếu $ac < 0$ (a, c trái dấu), phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt.

4. Đối với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ và $b = 2b'$; $\Delta' = b'^2 - ac$

+ Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} ; \; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

+ Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$.

+ Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

BÀI TẬP CƠ BẢN

14. Giải các phương trình sau :

a) $(x - 1)^2 = 2x + 1$

b) $(2x + 3)^2 = (-x + 1)(x + 9)$

c) $(2x + 3)^2 + (3x - 2)^2 = 26$

d) $(x + 2)^2 = (2x - 2)(x + 3)$

e) $x^2 - 1{,}9x - 3{,}3 = 0$

f) $\sqrt{3}x^2 + (2 + \sqrt{3})x + \dfrac{\sqrt{3}}{4} + 1 = 0$

g) $(5 - 3\sqrt{2})x^2 + (\sqrt{2} - 2)x + 2\sqrt{2} - 3 = 0$

h) $(2 - \sqrt{5})x^2 + x + (\sqrt{5} - 1) = 0$

i) $x^2 - \sqrt{2}x = -\dfrac{1}{2}$

k) $(\sqrt{5} - 1)x^2 - 2\sqrt{5}x = -\sqrt{5} - 1$

Giải

a) $(x - 1)^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$.

Vậy $S = \{0 ; 4\}$.

b) $(2x + 3)^2 = (-x + 1)(x + 9) \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 = -x^2 - 8x + 9$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 20x = 0 \Leftrightarrow 5x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = -4$.

Vậy $S = \{0 ; -4\}$.

c) $(2x + 3)^2 + (3x - 2)^2 = 26 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 + 9x^2 - 12x + 4 = 26$

$\Leftrightarrow 13x^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy $S = \{-1 ; 1\}$.

d) $(x + 2)^2 = (2x - 2)(x + 3) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + 4x - 6$

$\Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10}$.

Vậy $S = \{-\sqrt{10} ; \sqrt{10}\}$.

e) $x^2 - 1{,}9x - 3{,}3 = 0 \Leftrightarrow 10x^2 - 19x - 33 = 0.$

Có $\Delta = b^2 - 4ac = (-19)^2 - 4.10.(-33) = 1681 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 41.$

Vậy $S = \left\{3; \dfrac{-11}{10}\right\}.$

f) $\sqrt{3}x^2 + (2 + \sqrt{3})x + \dfrac{\sqrt{3}}{4} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}x^2 + 4(2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} + 4 = 0$

Có $\Delta' = b'^2 - ac = 4(2 + \sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})(\sqrt{3} + 4)$

$= 4(7 + 4\sqrt{3}) - 12 - 16\sqrt{3} = 16$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 4.$ Vậy $S = \left\{\dfrac{-1}{2}; \dfrac{-4\sqrt{3} - 3}{6}\right\}.$

g) $(5 - 3\sqrt{2})x^2 + (\sqrt{2} - 2)x + 2\sqrt{2} - 3 = 0$

Phương trình có dạng : $a + b + c = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{2} - 3}{5 - 3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} - 3}{7}.$

Vậy $S = \left\{1 ; \dfrac{\sqrt{2} - 3}{7}\right\}.$

h) $(2 - \sqrt{5})x^2 + x + (\sqrt{5} - 1) = 0$

Phương trình có dạng : $a - b + c = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = \dfrac{-c}{a} = \dfrac{-(\sqrt{5} - 1)}{2 - \sqrt{5}} = 3 + \sqrt{5}.$

Vậy $S = \{-1 ; 3 + \sqrt{5}\}.$

i) $x^2 - \sqrt{2}x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

$\Delta' = 0$ nên phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ Vậy $S = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$

k) $(\sqrt{5} - 1)x^2 - 2\sqrt{5}x = -\sqrt{5} - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{5} - 1)x^2 - 2\sqrt{5}x + \sqrt{5} + 1 = 0$

Có $\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{5})^2 - 4(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = 20 - 16 = 4$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2.$ Vậy $S = \left\{\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} ; 1\right\}.$

15. Cho phương trình (ẩn x) : $(m^2 - 4)x^2 + 2(m + 2)x + 1 = 0$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

a) • Khi $m = \pm 2$, thử trực tiếp ta thấy phương trình chỉ có nghiệm khi $m = 2$.

• Khi $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ (*)

$\Delta' = 4m + 8.$

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 4m + 8 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -2$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $-2 < m \ne 2$.

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m > -2$.

b) Phương trình có nghiệm duy nhất trong hai trường hợp :

• Trường hợp 1 : $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 2(m+2) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

• Trường hợp 2 : $\begin{cases} m^2 - 4 \ne 0 \\ 4m + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

16. Rút gọn các biểu thức sau :

$$A = \frac{2x^3 - 17x^2 - 55x}{2x^4 + 11x^3 + 15x^2} \qquad B = \frac{2x^2 - 3xy - 2y^2 - 8x + y + 6}{2x^2 + 3xy + y^2 - 4x - 3y + 2}$$

Giải

a) $A = \dfrac{2x^3 - 17x^2 - 55x}{2x^4 + 11x^3 + 15x^2} = \dfrac{x(2x^2 - 17x - 55)}{x^2(2x^2 + 11x + 15)}$

$= \dfrac{x(2x+5)(x-11)}{x^2(2x+5)(x+3)} = \dfrac{x-11}{x(x+3)}.$

b) Xét $2x^2 - 3xy - 2y^2 - 8x + y + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - (3y + 8)x - 2y^2 + y + 6 = 0$ (1)

Xem (1) là phương trình bậc hai ẩn x

$\Delta = (3y + 8)^2 - 8(-2y^2 + y + 6) = (5y + 4)^2$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{2-y}{2}$; $x_2 = 2y + 3$.

Do đó $2x^2 - 3xy - 2y^2 - 8x + y + 6 = 2\left(x - \dfrac{2-y}{2}\right)(x - 2y - 3)$

$= (2x + y - 2)(x - 2y - 3)$

Lí luận tương tự :

$2x^2 + 3xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = (2x + y - 2)(x + y - 1).$

Vậy $B = \dfrac{(2x+y-2)(x-2y-3)}{(2x+y-2)(x+y-1)} = \dfrac{x-2y-3}{x+y-1}.$

17. Giải và biện luận phương trình (ẩn x) : $(m - 3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$

Giải

Xét $m = 3$: Phương trình có dạng $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{2}.$

$m \ne 3$: $\Delta' = 9m - 18.$

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 2$: Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2.$

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 2$: Phương trình vô nghiệm.

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 2$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{m + 3\sqrt{m-2}}{m-3}\ ;\ x_2 = \frac{m - 3\sqrt{m-2}}{m-3}.$$

18. a) Cho phương trình (ẩn x) : $ax^2 + bx + c = 0$. Biết rằng $a \neq 0$ và $5a + 4b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b) Chứng minh rằng với mọi a, b, c thoả mãn điều kiện: $a + b + c \neq 0$ thì phương trình : $a(x - b)(x - c) + b(x - c)(x - a) + c(x - a)(x - b) = 0$ có nghiệm.

Giải

a) Vì $a \neq 0$, nên phương trình đã cho là phương trình bậc hai

Ta có $5a + 4b + 6c = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{5a + 6c}{4}$.

$$\text{Do đó } \Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{5a+6c}{4}\right)^2 - 4ac = \frac{25a^2 + 60ac + 36c^2}{16} - 4ac$$

$$= \frac{21a^2 + 35c^2 + (2a-c)^2}{16} > 0$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b) Biến đổi phương trình đã cho về dạng :

$(a + b + c)x^2 - 2(ab + bc + ca)x + 3abc = 0$ (1)

Do $a + b + c \neq 0$ nên (1) là phương trình bậc hai có :

$$\Delta' = (ab + bc + ca)^2 - 3abc(a + b + c)$$

$$= \frac{1}{2}[(ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2] \geq 0.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm.

19. Cho hàm số $y = x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 3m + 2$ có đồ thị (P). Chứng minh rằng đồ thị (P) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt. Định giá trị của m để (P) cắt trục hoành tại hai điểm A, B thoả mãn : $-3 < x_A < x_B < 6$.

Giải

Đồ thị (D) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi phương trình : $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$ (ẩn x) có nghiệm với mọi m.

Ta có $\Delta = [-(2m + 3)^2] - 4.(m^2 + 3m + 2)$

$= 4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 12m - 8$

$= 1 \Rightarrow$ (đpcm)

Do đó phương trình đã cho có nghiệm $x_1 = m + 1$; $x_2 = m + 2$.

Vì $x_A < x_B$ nên $x_A = m + 1$; $x_B = m + 2$

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} m + 1 > -3 \\ m + 2 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < 4.$$

Vậy $-4 < m < 4$ là giá trị của m cần tìm.

BÀI TẬP NÂNG CAO

20. a) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

$$A = 2x^3 - (a + 2)x^2 - ax + a^2$$
$$B = x^6 - (y^2 + 1)x^2 + y$$
$$C = x^4 - 10x^3 - 2(a - 11)x^2 + 2(5a + 6)x + 2a + a^2$$

b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 5y = 14$$

Giải

a) $A = a^2 - (x^2 + x)a + 2x^3 - 2x^2$

Xem A là tam thức bậc hai ẩn là a, ta có :

$$\Delta = (x^2 + x)^2 - 4(2x^3 - 2x^2) = (x^2 - 3x)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow a = x^2 - x$ hay $a = 2x$.

Vậy $A = (x^2 - x - a)(2x - a)$

Tương tự: $B = (yx^2 - 1 + x^4)(x^2 - y)$

$C = (x^2 - 6x - a)(x^2 - 4x - a - 2)$.

b) Viết lại phương trình dưới dạng

$x^2 + 3(y + 1)x + 2y^2 + 5y + m = 14 + m$ (1), trong đó m sẽ xác định sau

Xem vế trái của (1) là tam thức bậc hai của x, ta có

$$\Delta = y^2 - 2y + 9 - 4m.$$

(1) có nghiệm nguyên thì Δ là một bình phương đúng ; ta chọn m = 2

Khi ấy : $\Delta = (y - 1)^2$ và có hai nghiệm $x = -y - 2$ hay $x = -2y - 1$

(1) $\Leftrightarrow (x + y + 2)(x + 2y + 1) = 16$ (2).

Do $x, y > 0 \Rightarrow x + y + z \geq 4$ $(x, y \in \mathbb{Z})$. Tương tự : $x + 2y + 1 \geq 4$.

Suy ra $\begin{cases} x + y + 2 = 4 \\ x + 2y + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$

21. Giải và biện luận phương trình :

$$2(2m - 1)x^2 + (2m^2 - 7m + 4)x + m^2 - 4m = 0$$

Giải

- $m = \frac{1}{2}$: phương trình có nghiệm $x = \frac{4 - m}{2}$.
- $m \neq \frac{1}{2}$: phương trình có nghiệm $x = \frac{4 - m}{2}$ hay $x = \frac{m}{1 - 2m}$.

22. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $A = \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$

b) $B = \dfrac{3x^4 + mx^2 + 3}{x^4 + 2x^2 + 1}$ (m là hằng số và $m \neq 6$)

Giải

a) Giá trị nhỏ nhất của A là –1 (tại x = 2) và giá trị lớn nhất của A là 9 (tại $x = -\frac{1}{2}$).

b) Giá trị nhỏ nhất của B là $\frac{m+6}{4}$ (tại x = ±1) ; giá trị lớn nhất của B là 3 (tại x = 0).

23. a) Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình (ẩn x) sau : $a^2x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ vô nghiệm.

b) Chứng minh rằng với a, b không đồng thời bằng 0, phương trình :

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1$$ luôn có nghiệm.

Giải

a) Do a là độ dài cạnh tam giác ⇒ $a^2 \neq 0$: phương trình đã cho là phương trình bậc hai.

$\Delta = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 + 2ab - c^2)(a^2 + b^2 - 2ab - c^2)$

$= (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c) < 0$

⇒ phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện : $x \neq 0$; $x \neq 1$

Phương trình trở thành : $x^2 - (1 + a^2 + b^2)x + a^2 = 0$ (1)

$$\Delta = (1 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2 = [(a + 1)^2 + b^2][(a - 1)^2 + b^2] \geq 0$$

Giả sử x = 0 là nghiệm của (1) thì $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$; x = 1 là nghiệm của (1) thì $1 - (1 + a^2 + b^2) + a^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 0 \Rightarrow b = 0$.

Do $a^2 + b^2 \neq 0$ nên (1) có nghiệm khác 0 hay khác 1 ⇒ (đpcm).

24. a) Cho các số a, b, c thoả mãn điều kiện a > 0, b > a + c. Chứng minh rằng phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

b) Nếu phương trình : $x^2 + ax + b = 0$ có các nghiệm hữu tỉ (a, b ∈ Z) thì các nghiệm đó là những số nguyên.

c) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, ta có $n^2 + 5n + 16$ không chia hết cho 169.

Giải

a) Do $b > a + c \Rightarrow -c > a - b \Rightarrow -4ac > 4a^2 - 4ab$ (vì a > 0)

$$\Delta = b^2 - 4ac > 4a^2 - 4ab + b^2 = (2a - b)^2 \geq 0.$$

b) $\Delta = a^2 - 4b \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

Để $x_{1,2} \in \mathbb{Q}$ thì $\Delta = k^2$. Lí luận : a, k cùng tính chẵn lẻ ⇒ $x_{1,2} \in \mathbb{Z}$

c) Giả sử tồn tại số nguyên n sao cho $n^2 + 5n + 16 = 169k$ ⇒ phương trình: $x^2 + 15x + 16 - 169k = 0$ có nghiệm nguyên

$\Rightarrow \Delta = 13(52k - 3) = m^2 \Rightarrow (52k - 3) \vdots 13 \Rightarrow 3 \vdots 13$ (vô lí)

25. a) Cho a, b, c là các số không âm thoả mãn điều kiện : $a + 2b + 3c = 1$.

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm :

$4x^2 - 4(2a + 1)x + 4a^2 + 192abc + 1 = 0$ (1)

$4x^2 - 4(2b + 1)x + 4b^2 + 96abc + 1 = 0$ (2)

b) Cho a, b, c là các số khác 0 và thoả mãn điều kiện :

$ac + bc + 3ab \le 0$. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm :

$$(ax^2 + bx + c)(bx^2 + cx + a)(cx^2 + ax + b) = 0$$

Giải

a) Xét $\Delta'_1 = 16a(1 - 48bc)$; $\Delta'_2 = 16b(1 - 24ac)$

Lại có : $(1 - 48bc) + (1 - 24ac) = 2[1 - 12c(a + 2b)] = 2(6c - 1)^2 \ge 0$

(do $a + 2b + 3c = 1 \Rightarrow a + 2b = 1 - 3c$).

b) Điều phải chứng minh tương đương với ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm : $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ; $bx^2 + cx + a = 0$ (2);

$cx^2 + ax + b = 0$ (3).

Do $ac + bc + 3ab \le 0 \Rightarrow ac \le 0$ hay $bc \le 0$ hay $ab \le 0$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

26. a) Cho hai phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ; $a \ne 0$

$mx^2 + nx + p = 0$ (2) ; $m \ne 0$

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình trên vô nghiệm thì phương trình sau luôn luôn có nghiệm :

$$(an - bm)x^2 + 2(ap - mc)x + bp - nc = 0 \quad (3)$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2003 – 2004)

b) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có các hệ số a, b, c là các số nguyên lẻ. Chứng minh rằng phương trình nếu có nghiệm thì các nghiệm ấy không thể là số hữu tỉ.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận Tân Bình, (Vòng 2), Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011)

Giải

a) Giả sử (1) vô nghiệm : $b^2 - 4ac < 0$.

Đặt $A = an - bm$; $B = ap - mc$, $C = bp - cn \Rightarrow cA - bB + aC = 0$ (*)

(3) trở thành : $Ax^2 + Bx + C = 0$ (4)

Biện luận :

i) Nếu A = 0 theo (*) ta được : $C = \frac{b}{a}B$.

Phương trình (4) trở thành : $2Bx + C = 0 \Leftrightarrow 2Bx + \frac{b}{a}B = 0$.

- $B = 0$: x – tùy ý $\Rightarrow$ (3) có nghiệm.
- $B \ne 0$: (4) $\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow$ (3) có nghiệm.

ii) Nếu $A \neq 0$: $\Delta' = B^2 - AC$.

- $AC \le 0 \Rightarrow \Delta' \ge 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm.
- $AC > 0$: do $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow b^2 < 4ac \Rightarrow b^2AC < 4acAC$.

Từ (*) cho $bB = cA + aC \Rightarrow b^2B^2 = (cA + aC)^2 \ge 4acAC > b^2AC$

Suy ra : $b^2(B^2 - AC) > 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 > 0 \\ B^2 - AC > 0 \end{cases}$, nghĩa là $\Delta' > 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm.

Trường hợp (2) vô nghiệm, chứng minh tương tự.

b) Bài toán phụ : Chứng minh rằng số chính phương lẻ chia cho 8 dư 1.

Giải

Xét số chính phương lẻ m^2 ($m \in Z$) m là số lẻ, đặt $m = 2n + 1$ ($n \in Z$)

Ta có $m^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$ chia cho 8 dư 1.

Chứng minh được $\Delta = b^2 - 4ac$ (a, b, c lẻ) chia cho 8 dư 5.

27. a) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng (d) : $2x - y - a^2 = 0$ và parabol : $y = ax^2$ (a là tham số dương). Định a để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng tỏ rằng khi đó A và B nằm bên phải trục tung.

b) Gọi x_A và x_B lần lượt là hoành độ của A và B, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $T = \dfrac{4}{x_A + x_B} + \dfrac{1}{x_A . x_B}$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán Amsterdam – Chu Văn An, Tp. Hà Nội, năm học 1998 – 1999)

Giải

a) Phương trình $ax^2 - 2x + a^2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$

Lí luận hai nghiệm x_1 và x_2 dương.

b) Giá trị nhỏ nhất của T là $2\sqrt{2}$ $\left(\text{tại } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

§3. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Nếu x_1 ; x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

2. Muốn tìm hai số u và v biết $u + v = S$; $uv = P$, ta giải phương trình $x^2 - Sx + P = 0$

(Điều kiện để có u và v là $S^2 - 4P \ge 0$)

3. Nếu a + b + c = 0 thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm

$$x_1 = 1 \; ; \; x_2 = \frac{c}{a}.$$

Nếu a – b + c = 0 thì phương trình :

$$ax^2 + bx + c = 0 \; (a \neq 0) \text{ có hai nghiệm } x_1 = -1 \; ; \; x_2 = -\frac{c}{a}.$$

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

28. Tính nhẩm nghiệm của phương trình :

a) $15x^2 - 4x - 11 = 0$

b) $\frac{5}{3}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{37}{15} = 0$

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0$

d) $(2\sqrt{2} - 3)x^2 + (2\sqrt{2} + 3)x + 6 = 0$

Giải

a) Phương trình có dạng : a + b + c = 15 – 4 – 11 = 0.

Do đó phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-11}{15}$.

Vậy $S = \left\{1; \frac{-11}{15}\right\}$.

b) $S = \left\{-1; \frac{37}{25}\right\}$.　c) $S = \left\{1; 5 - 2\sqrt{6}\right\}$.　d) $S = \left\{-1; 6(3 + 2\sqrt{2})\right\}$.

29. Dùng hệ thức Vi-ét để nhẩm nghiệm của phương trình :

a) $x^2 - 2x - 48 = 0$

c) $x^2 - (3 + \sqrt{5})x + 3\sqrt{5} = 0$

b) $x^2 + 11x + 30 = 0$

d) $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{6})x + 3\sqrt{2} = 0$

Giải

a) $x_1 = -6$; $x_2 = 8$.

b) $x_1 = -5$; $x_2 = -6$.

c) $x_1 = 3$; $x_2 = \sqrt{5}$.

d) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{6}$.

30. Không giải phương trình $x^2 + 7x + 12 = 0$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm (nếu có) của phương trình đã cho. Hãy tính :

a) $x_1^2 + x_2^2$

b) $x_1 - x_2$

c) $x_1^2 - x_2^2$ (với $x_1 \geq x_2$)

d) $\frac{x_1 - 5}{x_2} + \frac{x_2 - 5}{x_1}$

e) $x_1^3 - x_2^3$ (với $x_1 \leq x_2$)

f) $x_1^4 + x_2^4$

Giải

Phương trình có $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4.12 = 1 > 0$ nên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Ta có : $x_1 + x_2 = -7$ và $x_1x_2 = 12$.

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-7)^2 - 2.12 = 25$.

ii) Nếu A ≠ 0 ... có hai nghiệm

∘ AC ≤ 0

∘ AC > ...

Từ (*)

Suy ...

... $x_2 = (-7)^2 - 4.12 = 1$. Do đó $x_1 - x_2 = \pm 1$.

... ta nhận $x_1 - x_2 = 1$

... $x_2) = 1.(-7) = -7$.

... $-5x_2 = \dfrac{(x_1^2 + x_2^2) - 5(x_1 + x_2)}{x_1x_2}$

... ta nhận $x_1 - x_2 = -1$

... $x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = -1.[25 + (-7)] = -18$.

b) ... $)^2 - 2(x_1x_2)^2 = 25^2 - 2.12^2 = 337$.

... trong mỗi trường hợp sau :

... ; $xy = 286$ b) $x - y = -10$; $xy = 759$

... $= 61$; $xy = -30$.

Giải

. Ta có $x + y = -35$; $xy = 286$ nên x, y là nghiệm của phương trình $x^2 + 35x + 286 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 35^2 - 4.286 = 81$ nên $\sqrt{\Delta} = 9$.

Vậy $\begin{cases} x = -13 \\ y = -22 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -22 \\ y = -13 \end{cases}$ là hai số cần tìm.

b) Ta có $x - y = x + (-y) = -10$

$xy = 759 \Leftrightarrow x(-) = -759$

Do đó x ; −y là nghiệm của phương trình $x^2 + 10x - 759 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = (-5)^2 - (-759) = 784$ nên $\sqrt{\Delta'} = 28$

Vậy $\begin{cases} x = 33 \\ -y = -23 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -33 \\ -y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23 \\ y = 33 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -33 \\ y = -23 \end{cases}$ là hai số cần tìm.

c) Đặt $S = x + y$; $P = xy$ (điều kiện $S^2 \ge 4P$)

$x^2 + y^2 = S^2 - 2P = 61$ (1)

$xy = P = -30$ (2)

Từ (1) và (2) có $S^2 = 1 \Leftrightarrow S = \pm 1$

Nếu $S = 1$; $P = -30$ có $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -5 \\ y = 6 \end{cases}$

Nếu $S = -1$; $P = -30$ có $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 5 \\ y = -6 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} x = 6 \\ y = -5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -5 \\ y = 6 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 5 \\ y = -6 \end{cases}$ là các giá trị cần tìm.

32. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 5 = 0$.
Hãy lập một phương trình bậc hai biết hai nghiệm của phương trình đó là $\dfrac{x_1-2}{x_2}$; $\dfrac{x_2-2}{x_1}$.

Giải

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(-5) = 29 > 0$.
Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2.
Áp dụng định lí Vi – ét, ta có $x_1 + x_2 = 3$ và $x_1x_2 = -5$

Ta có $\dfrac{x_1-2}{x_2} + \dfrac{x_2-2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2}{x_1x_2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 - 2(x_1+x_2)}{x_1x_2}$

$$= \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1+x_2)}{x_1x_2} = \frac{9+10-6}{-5} = \frac{-13}{5}.$$

$$\frac{x_1-2}{x_2}.\frac{x_2-2}{x_1} = \frac{x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4}{x_1x_2} = \frac{x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4}{x_1x_2}$$

$$= \frac{-5-6+4}{-5} = \frac{7}{5}.$$

Vậy $\dfrac{x_1-2}{x_2}$ và $\dfrac{x_2-2}{x_1}$ là hai nghiệm của phương trình

$$X^2 + \frac{13}{5}X + \frac{7}{5} = 0 \Leftrightarrow 5X^2 + 13X + 7 = 0.$$

33. Cho phương trình $(m + 2)x^2 - (m + 4)x + 2 - m = 0$.
a) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc m.
b) Tính nghiệm kép của phương trình đã cho.

Giải

a) Phương trình đã cho có nghiệm x_1, $x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ (m+4)^2 + 4(m+2)(m-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m^2 + 8m + 16 + 4m^2 - 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ 5m^2 + 8m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \leq \dfrac{-8}{5} \text{ hay } m \geq 0. \end{cases}$$

Áp dụng định lí Vi-ét, ta có : $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{m+4}{m+2} = 1 + \dfrac{2}{m+2} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{2-m}{2+m} = -1 + \dfrac{4}{m+2}. \end{cases}$

Suy ra $2S - P = 3 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1x_2 - 3 = 0$.
Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc m.

b) $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hay $m = \frac{-8}{5}$.

Khi $m = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x = 1$.

Khi $m = \frac{-8}{5}$ thì phương trình có nghiệm kép $x = 3$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

34. a) Cho phương trình $x^2 - 5x - 1 = 0$. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình trên. Tính :

$A = (x_1^2 - 4x_1 - 1)(x_2^2 - 4x_2 - 1)$ và $B = (x_1^3 - 5x_1^2 + 2)(x_2^3 - 5x_2^2 + 2)$

b) Cho phương trình : $mx^2 + (m^2 - 1)x + 5 = 0$ (1)

Định m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn :

$$x_1^3 + x_2^3 = 0$$

c) Định m để phương trình : $5x^2 + mx - 28 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn hệ thức : $5x_1 + 2x_2 = 1$.

Giải

a) Phương trình : $x^2 - 5x - 1 = 0$ có $ac = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm phân biệt x_1, x_2. Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có :

$$x_1 + x_2 = 5 \; ; \; x_1.x_2 = -1$$

Do x_1, x_2 là nghiệm phương trình nên : $x_1^2 - 4x_1 - 1 = x_1$

và $x_2^2 - 4x_2 - 1 = x_2$.

Suy ra $A = x_1.x_2 = 1$. Tương tự $B = 13$.

b) $m = -1$ là giá trị cần tìm

c) Do $a.c = 5.(-28) < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Hệ thức Vi-ét : $x_1 + x_2 = -\frac{m}{5}$ (1) ; $x_1x_2 = -\frac{28}{5}$ (2).

Kết hợp với điều kiện đầu bài : $5x_1 + 2x_2 = 1$ (3).

Từ (1) và (3) cho : $x_1 = \frac{2m+5}{15}$; $x_2 = -\frac{m+1}{3}$ thay vào (2) và biến đổi ta được : $2m^2 + 7m - 247 = 0 \Leftrightarrow m = -13$ hay $m = \frac{19}{2}$.

35. a) Cho phương trình : $(m^2 + m + 1)x^2 - (m^2 + 2m + 2)x - 1 = 0$ (*). Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình trên, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của : $S = x_1 + x_2$.

b) Cho phương trình : $(m^2 + m + 1)x^2 - (m^2 + 8m + 3)x - 1 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng : $S = x_1 + x_2$.

Giải

a) Do $ac = -(m^2 + m + 1) = -\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt. Hệ thức Vi-ét :

$$S = x_1 + x_2 = \frac{m^2 + 2m + 2}{m^2 + m + 1} = \frac{2}{3} + \frac{(m+2)^2}{3(m^2 + m + 1)} \geq \frac{2}{3}.$$

Lại có : $S = 2 - \dfrac{m^2}{m^2 + m + 1} \leq 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\dfrac{2}{3}$ (tại $m = -2$). Giá trị lớn nhất của S là 2 (tại $m = 0$).

b) Tương tự ta tính được giá trị nhỏ nhất của S là $-\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$ (tại $m = -\dfrac{12 + \sqrt{39}}{3 + 2\sqrt{39}}$).

Giá trị lớn nhất của S là $\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$ (tại $m = \dfrac{\sqrt{39} - 12}{3 - 2\sqrt{39}}$).

36. Cho phương trình : $x^2 - 5mx - 4m = 0$, có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

a) Chứng minh rằng : $x_1^2 + 5mx_2 - 4m > 0$.

b) Định giá trị của m để biểu thức

$$\frac{m^2}{x_1^2 + 5mx_2 + 12m} + \frac{x_2^2 + 5mx_1 + 12m}{m^2}$$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ hay $m < -\dfrac{16}{25}$

Hệ thức Vi-ét : $x_1 + x_2 = 5m$; $x_1x_2 = -4m$.

$$x_1^2 + 5mx_2 - 4m = (5mx_1 + 4m) + 5mx_2 - 4m$$
$$= 5m(x_1 + x_2) = 25m^2 > 0 \ (m \neq 0).$$

b) Từ trên suy ra : $x_1^2 + 5mx_1 + 12m = 25m^2 + 16m$

Vậy $S = \dfrac{m^2}{25m^2 + 16m} + \dfrac{25m^2 + 16m}{m^2} \geq 2$ (BĐT Cô-si).

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m = -\dfrac{2}{3}$. Vậy min S = 2 (tại $m = -\dfrac{2}{3}$).

37. a) Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có nghiệm chung $2x^2 + (3m + 1)x - 9 = 0$ và $6x^2 + (7m - 1)x - 19 = 0$? Tìm nghiệm chung đó.

b) Chứng minh rằng nếu hai phương trình : $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + cx + d = 0$ có nghiệm chung thì : $(b - d)^2 + (a - c)(ad - bc) = 0$.

Giải

a) Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, ta có:

$$2x_0^2 + (3m+1)x_0 - 9 = 0 \ (1) \text{ và } 6x_0^2 + (7m-1)x_0 - 19 = 0 \quad (2)$$

Suy ra : $(m + 2)x_0 = 4$

Do x_0 là nghiệm nên $m \neq -2$ và $x_0 = \dfrac{4}{m+2}$, thay vào (1) và biến đổi ta được : $3m^2 - 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ hay $m = \dfrac{2}{3}$.

Ngược lại: Với m = 2, thay trực tiếp vào hai phương trình đã cho ta thấy x = 1 là nghiệm chung.

Với $m = \dfrac{2}{3}$ thì $x = \dfrac{3}{2}$ là nghiệm chung.

b) Gọi x_0 là nghiệm chung hai phương trình, từ đó suy ra

$$(a - c)x_0 = d - b \quad (1).$$

- Nếu a = c thì d = b vì x_0 là nghiệm. Lúc đó hệ thức cần chứng minh hiển nhiên đúng.
- Nếu $a \neq c$ thì $x = \dfrac{d-b}{a-c}$, thay vào phương trình $x^2 + ac + b = 0$ đồng thời biến đổi tương đương ta được :

$$(b - d)^2 + (a - c)(ad - bc) = 0$$

38. Cho phương trình : $(m + 1)x^2 + 2(m + 4)x + m + 1 = 0$ (1)

a) Định m để phương trình có nghiệm trái dấu.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm âm.

Giải

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \dfrac{m+1}{m+1} = 1 < 0 \end{cases}$

vô nghiệm.

b) Phương trình có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0;\ \Delta' \geq 0 \text{ (vì } P > 0) \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m >$

39. a) Tìm các số a, b sao cho hai phương trình ẩn x sau : $x^2 + ax + 1 = 0$ và $x^2 + bx + 2 = 0$ có một nghiệm chung và $|a| + |b|$ nhỏ nhất.

b) Tìm giá trị của m để phương trình : $x - \sqrt{1 - x^2} = m$ (1) có một nghiệm duy nhất.

c) Cho phương trình : $x^3 - (2m + 1)x^2 + (3m + 1)x - (m + 1) = 0$ (1) (x là ẩn số). Định m để phương trình (1) có ba nghiệm dương phân biệt.

Giải

a) Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, ta có:

$$x_0^2 + ax_0 + 1 = 0 \text{ và } x_0^2 + bx_0 + 2 = 0 \Rightarrow (a - b)x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{a-b}$$

Thay x_0 vào phương trình $x_0^2 + ax_0 + 1 = 0$, biến đổi ta được :

$$2a^2 - 3ab + b^2 + 1 = 0 \ (*).$$

Dễ dàng thấy (*) cũng là điều kiện đủ để hai phương trình có nghiệm chung :

Từ (*) ta có $3ab = 2a^2 + b^2 + 1 > 0 \Rightarrow ab = |ab|$

Ta có: $2x_0^2 + (a + b)x_0 + 3 = 0$ có $\Delta = (a + b)^2 - 24 \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq 24$

$\Rightarrow |a + b| \geq 2\sqrt{6}$. Lại có $|a| + |b| = |a + b| = 2\sqrt{6}$.

Khi ấy phương trình : $2x^2 + (a + b)x + 3$ có nghiệm kép $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Thay $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ vào các phương trình ta tính được $a = \frac{-5\sqrt{6}}{6}$; $b = \frac{-7\sqrt{6}}{6}$.

$x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ vào các phương trình ta tính được $a = \frac{5\sqrt{6}}{6}$; $b = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.

b) Phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{1 - x^2} = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ 2x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (2) có một nghiệm thỏa $x \geq m$.

Đặt $t = x - m$, (2) trở thành: $2(t + m)^2 - 2m(t + m) + m^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2t^2 + 2mt + m^2 - 1 = 0 \quad (3)$

Ta cần định m để (3) có nghiệm $t \geq 0$.

- (3) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow p < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.
- (3) có nghiệm kép không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\sqrt{2}$.
- (3) có một nghiệm bằng 0, nghiệm còn lại âm $\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

Vậy với $m = -\sqrt{2}$ hay $-1 < m \leq 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

c) Phương trình đã cho tương đương: $(x - 1)(x^2 - 2mx + m + 1) = 0$.

Phương trình có 3 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0; S > 0; P > 0$ và $m \neq 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow m > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ và $m \neq 2$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

40. a) Chứng minh rằng nếu a, b là những số dương thì phương trình :

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x + b} = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $(x_1 > x_2)$:

$\frac{a}{3} < x_1 < \frac{2a}{3}, -\frac{2b}{3} < x_2 < -\frac{b}{3}$.

(Đề thi học sinh giỏi Hungary năm 1915)

b) Cho phương trình $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$.

i) Định m để phương trình có hai nghiệm.

ii) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $A = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4|$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2003 – 2004)

Giải

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x+b} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0;\ x \neq a;\ x \neq b \\ 3x^2 - 2(a-b)x - ab = 0 \quad (1) \end{cases}$

Do $ab > 0 \Rightarrow 3(-ab) < 0 \Rightarrow$ (1) có hai nghiệm trái dấu, giả sử $x_1 > 0$; $x_2 < 0$.

Vì x_1 là nghiệm của (1) nên $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_1 + b} = \dfrac{1}{a - x_1} \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} < \dfrac{1}{a - x_1}$

$\Rightarrow x_1 > a - x_1 \Rightarrow x_1 > \dfrac{a}{2} > \dfrac{a}{3}$.

Lại có: $x_1 + b > x_1 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1 + b} < \dfrac{1}{x_1} \Rightarrow \dfrac{2}{x_1} > \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_1 + b} = \dfrac{1}{a - x_1}$

$\Rightarrow 2(a - x_1) > x_1 \Rightarrow x_1 < \dfrac{2a}{3}$.

Vậy $\dfrac{a}{3} < x_1 < \dfrac{2a}{3}$. Lí luận tương tự : $\dfrac{-2b}{3} < x_2 < -\dfrac{b}{3}$.

b) i) Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow |m| \leq 2$.

ii) Hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = -m$; $x_1x_2 = \dfrac{m^2 - 2}{2}$

$$A = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4| = |(m+2)(m-3)|.$$

Do $|m| \leq 2 \Rightarrow (m+2)(m-3) \leq 0$. Vậy $A = -\left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{25}{4} \leq \dfrac{25}{4}$.

Giá trị lớn nhất của A là $\dfrac{25}{4}$ (tại $m = \dfrac{1}{2}$)

41. a) Cho các phương trình $x^2 + bx + c = 0$ và $x^2 + b_1x + c_1 = 0$ trong đó b, c, b_1 và c_1 là những số nguyên sao cho $(b - b_1)^2 + (c - c_1)^2 > 0$. Chứng minh rằng nếu cả hai phương trình có một nghiệm chung thì nghiệm thứ hai là hai số nguyên phân biệt.

(Đề thi vô địch Toán Tây Ban Nha, năm học 1988)

b) Cho phương trình : $x^2 - 97x + a = 0$ có các nghiệm là luỹ thừa bậc 4 của các nghiệm của phương trình : $x^2 - x + b = 0$. Hãy tính a.

(Đề thi lớp 10 Chuyên Toán – trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1997 – 1998)

c) Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm và tính các nghiệm ấy theo m: $x + |x^2 - 2x + m| = 0$

(Đề thi lớp 10 Chuyên Toán, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2002 – 2003)

d) Cho phương trình $2x^2 + mx + 2n + 8 = 0$ (x là ẩn số và m, n là các số nguyên. Giả sử phương trình có các nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng $m^2 + n^2$ là hợp số.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, chuyên Toán THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh năm học 2010 – 2011)

Giải

a) Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình; x_1; x_2 là hai nghiệm còn lại. Hệ thức Vi-ét: $x_0 + x_1 = -b$; $x_0x_1 = c$ và $x_0 + x_2 = -b_1$; $x_0x_2 = c_1$

Nếu $x_1 = 2 \Rightarrow b = b_1$ và $c = c_1$ (trái với giả thiết $(b - b_1)^2 + (c - c_1)^2 > 0$)

Vậy $x_1 \neq x_2$; $b \neq b_1$.

x_0 là nghiệm chung nên $x_0 = \dfrac{c_1 - c}{b - b_1}$. Lại có $f(x) = x^2 + bx + c$ có hệ số x^2

là 1, hệ số nguyên, nên $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -b - x_0 \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -b_1 - x_0 \in \mathbb{Z} \end{cases}$ do $b \neq b_1 \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

Do đó x_1, x_2 là hai số nguyên phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình $x^2 - x - b = 0$.

Theo đầu bài, x_1^4 ; x_2^4 là nghiệm phương trình : $x^2 - 97x + a = 0$.

Điều kiện có nghiệm : $b \leq \dfrac{1}{4}$ và $a \leq \dfrac{9409}{4}$.

Suy ra hệ thức Vi-ét : $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = b$ và $x_1^4 + x_2^4 = 97$; $x_1^4.x_2^4 = a$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 - 2b \text{ và } x_1^4 + x_2^4 = (1 - ab)^2 - 2b^2.$$

Suy ra $(1 - 2b)^2 - 2b^2 = 97 \Leftrightarrow b^2 - 2b - 48 = 0 \Leftrightarrow b = -6$; $b = 8$ (loại)

Với $b = -6$ thì $x_1x_2 = -6 \Rightarrow a = (x_1x_2)^4 = 1296$.

c) Ta có : $x + |x^2 - 2x + m| = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| = -x$ (1)

Điều kiện có nghiệm $x \leq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 3x + m)(x^2 - x + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - 3x + m - 0 & (2) \\ x^2 - x + m = 0 & (3). \end{array}\right.$$

- Nếu $m > 0$, xét trường hợp cả hai phương trình có nghiệm $\begin{cases} S_1 = 2; \ P_1 = m > 0 \\ S_2 = 3; \ P_2 = m > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Cả hai phương trình đều có hai nghiệm đều dương (loại).

- Nếu $m = 0$ (2) có dạng : $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 3$ (loại)

  (3) có dạng : $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x = 1$ (loại)

- Nếu m < 0, (2) và (3) đều có $P_1 = P_2 = m < 0$, nên hai phương trình đều có nghiệm trái dấu; $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{9 - 4m}}{2}$ và $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}$.

d) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình ($x_1, x_2 \in Z$)

Theo hệ thức Vi–ét ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{-m}{2}$; $x_1x_2 = n + 4$

Do đó $m = -2(x_1 + x_2)$, $n = x_1x_2 - 4$

Từ đó, ta được $m^2 + n^2 = (x_1^2 + 4)(x_2^2 + 4)$ là hợp số.

§4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Phương trình trùng phương : là phương trình có dạng :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (a \neq 0) \ (1)$$

Cách giải: Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, phương trình (1) trở thành : $at^2 + bt + c = 0$

– Giải phương trình bậc hai theo t và chọn các giá trị $t \geq 0$.

– Thay $t = x^2$, ta tìm được các giá trị thích hợp của x.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức :

Để giải phương trình ta làm như sau :

– Tìm điều kiện xác định của phương trình.

– Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức.

– Giải phương trình vừa nhận được.

– Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thoả mãn điều kiện xác định, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

42. Giải các phương trình sau :

a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

b) $x^4 - (3\sqrt{2} - 5)x^2 + 10 - 7\sqrt{2} = 0$

c) $x^4 - 10(2 - \sqrt{2})x^2 - 2\sqrt{2} + 3 = 0$

d) $(\sqrt{5} - 3)x^4 - (4\sqrt{5} + 1)x^2 + 3\sqrt{5} + 4 = 0$

Giải

a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

Đặt $t = x^2$; $t \geq 0$, phương trình được viết dưới dạng $t^2 - 25t + 144 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4.144 = 625 - 576 = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 + 7}{2} = 16 \ ; \ t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 - 7}{2} = 9$$

So với điều kiện $t \geq 0$, các giá trị t_1, t_2 thỏa mãn.

Với $t = 16$ thì $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

Với $t = 9$ thì $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Vậy $S = \{-4; -3; 3; 4\}$.

b) $S = \varnothing$.

c) $S = \{\sqrt{2} + 1; -\sqrt{2} - 1; 2 - 2\sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}\}$.

d) $S = \{-1; 1\}$.

43. Giải các phương trình sau :

a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ b) $x(4x^2 + 12x + 9) = 4x^2 - 9$

c) $(2x^2 + x - 4)^2 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$ d) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$

Giải

a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

Vậy $S = \{-3; -2; 2\}$.

b) $x(4x^2 + 12x + 9) = 4x^2 - 9 \Leftrightarrow x(2x + 3)^2 = (2x + 3)(2x - 3)$

$\Leftrightarrow (2x + 3)[x(2x + 3) - (2x - 3)] = 0 \Leftrightarrow (2x + 3)(2x^2 + x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 3 = 0 \\ 2x^2 + x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3}{2} \\ 2x^2 + x + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm vì } \Delta = -23 < 0) \end{array}\right.$$

Vậy $S = \left\{\dfrac{-3}{2}\right\}$.

c) $(2x^2 + x - 4)^2 - 4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x^2 + x - 4)^2 - (2x - 1)^2 = 0$

Vậy $S = \left\{-\dfrac{5}{2}; -1; 1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

d) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 25x^2 - 60x + 36 \Leftrightarrow x^4 = (5x - 6)^2$

Vậy $S = \{-6; 1; 2; 3\}$.

44. Giải các phương trình sau :

a) $\dfrac{2}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x^2 - 2x} = \dfrac{4 - x}{x^2 + 2x}$ b) $\dfrac{x + 4}{2x^2 - 3x} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3 - 2x}{x^2 + 4x}$

c) $\dfrac{2x + 3}{2x + 1} - \dfrac{2x + 5}{2x + 7} = 1 - \dfrac{6x^2 + 9x - 9}{4x^2 + 16x + 7}$

d) $\dfrac{38}{x^4 - x^2 + 20x - 100} = \dfrac{x + 10}{x^2 + x - 10} - \dfrac{x + 10}{x^2 - x + 10}$

Giải

a) $\dfrac{2}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x^2 - 2x} = \dfrac{4 - x}{x^2 + 2x} \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x - 2)(x + 2)} - \dfrac{1}{x(x - 2)} = \dfrac{4 - x}{x(x + 2)}$

ĐKXĐ : $x \neq \pm 2$ và $x \neq 0$

Phương trình trở thành $2x - (x + 2) = (4 - x)(x - 2)$

$$\Leftrightarrow 2x - x - 2 = 4x - 8 - x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy $S = \{3\}$.

b) $\dfrac{x+4}{2x^2-3x}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{3-2x}{x^2+4x} \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x(2x-3)}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{3-2x}{x(x+4)}$

ĐKXĐ : $x \neq 0$; $x \neq \dfrac{3}{2}$; $x \neq -4$. Vậy $S = \{7\}$.

c) $\dfrac{2x+3}{2x+1}-\dfrac{2x+5}{2x+7}=1-\dfrac{6x^2+9x-9}{4x^2+16x+7}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{2x+1}-\dfrac{2x+5}{2x+7}=1-\dfrac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}$

ĐKXĐ : $x \neq \dfrac{-1}{2}$; $x \neq \dfrac{-7}{2}$. Vậy $S = \left\{0; -\dfrac{1}{2}\right\}$.

Biến đổi phương trình trở thành : $2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 1) = 0$.

d) Ta có $x^2 - x + 10 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{39}{4} > 0$.

$x^4 - x^2 + 20x - 100 = x^4 - (x - 10)^2 = (x^2 + x - 10)(x^2 - x + 10)$

ĐKXĐ : $x^2 + x - 10 \neq 0$ (*)

Biến đổi phương trình trở thành :

$38(x + 10)(x^2 - x + 10) - (x + 10)(x^2 + x - 10)$

$\Leftrightarrow 30 = (x + 10)(x^2 - x + 10 - x^2 - x + 10)$

$\Leftrightarrow x^2 = 81 \Leftrightarrow x = \pm 9$, thỏa điều kiện (*). Vậy $S = \{-9; 9\}$.

45. Giải các phương trình sau :

a) $(x^2-2)^4 + 45(x^2-2)^2 - 196 = 0$ b) $4(x + 2)^4 + 5(x + 2)^2 - 9 = 0$

c) $x^2 - x - 2\sqrt{x^2-x+3} = 0$ d) $3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2+x} + 1 - x$.

Giải

a) $(x^2 - 2)^4 + 45(x^2 - 2)^2 - 196 = 0$.

Đặt $t = (x^2 - 2)^2$; $t \geq 0$, phương trình trở thành : $t^2 + 45t - 196 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 45^2 + 4.196 = 2809 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 53$

$t_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-45+53}{2} = 4$ (nhận) ;

$t_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-45-53}{2} = -49$ (loại)

Với $t = 4$ thì $(x^2 - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2=2 \\ x^2-2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=0 \end{array}\right.$

Vậy $S = \{-2; 0; 2\}$.

b) $S = \{-1; -3\}$.

c) $x^2 - x - 2\sqrt{x^2-x+3} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 3) - 2\sqrt{x^2-x+3} - 3 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x^2-x+3}$, $t \geq 0$

Vậy $S = \{-2; 3\}$.

d) $3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2 + x} + 1 - x \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 2\sqrt{x^2 + x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3(x^2 + x) - 2\sqrt{x^2 + x} - 1 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + x}$, $t \geq 0$

Vậy $S = \left\{\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}\ ;\ \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right\}$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

46. Giải các phương trình sau :

a) $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

b) $x^3 + 2x - 5\sqrt{3} = 0$

c) $x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

d) $x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0$

e) $x^3 + 3x - 3 = 0$

f) $x^3 + 6x + 2 = 0$

Giải

a) $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$. $S = \left\{-1;\ \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) $x^3 + 2x - 5\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}.x + 5) = 0$. $S = \{\sqrt{3}\}$.

c) $x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow (x + \sqrt{2})[x^2 + (2 - \sqrt{2})x + 2] = 0$. $S = \{-\sqrt{2}\}$.

d) $x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow 3x^3 = 9x^2 - 27x + 27 \Leftrightarrow 4x^3 = (3 - x)^3$

Vậy $S = \left\{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1\right\}$.

e) Đặt $y - \dfrac{1}{y} = x$, phương trình đã cho có dạng

$$y^3 - \frac{1}{y^3} - 3 = 0 \ (y \neq 0). \text{ Đặt } t = y^3.$$

Phương trình trở thành : $t^2 - 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Suy ra : $y = \sqrt[3]{\dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}}$ và $x_1 = x_2 = \sqrt[3]{\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{13} - 3}{2}}$.

f) Đặt $x = t - \dfrac{2}{t}$, phương trình đã cho có dạng

$$t^6 + 2t^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow t^3 = -4;\ t^3 = 2$$

Suy ra : $x = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ là nghiệm của phương trình.

47. Giải phương trình sau :

a) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$

b) $x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$

c) $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$

d) $(x + 4)(x + 6)(x - 2)(x - 12) = 25x^2$

e) $(x + 5)(2x + 12)(2x + 20)(x + 12) = 3x^2$

f) $x^4 + x^2 - \sqrt{2}x + 2 = 0$

Giải

a) Nhận xét : $x = 0$ không là nghiệm của phương trình

Với $x \neq 0$, chia cả hai vế phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được :

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ và $|t| \geq 2$

(1) trở thành : $2t^2 + 3t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = -4; t = \dfrac{5}{2}$

$$S = \{-2 \pm \sqrt{3}; \frac{1}{2}; 4\}$$

b) $S = \{\pm 1\}$

c) Đặt $t = x + 4$, phương trình trở thành :

$(t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 16 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Vậy $S = \{-3; -5\}$

d) Phương trình trở thành : $(x^2 + 10x + 24)(x^2 - 14x + 24) = 25x^2 \quad (1)$

Đặt $t = x^2 - 2x + 24$, (1) trở thành $(t + 12x)(t - 12x) = 25x^2$

$\Leftrightarrow t^2 = (13x)^2 \Leftrightarrow t = \pm 13x$. Vậy $S = \{3; 8; \dfrac{15 + \sqrt{129}}{2}\}$.

e) $S = \left\{-8; \dfrac{-15}{2}; \dfrac{-35 \pm \sqrt{265}}{4}\right\}$.

f) $x^2 - \sqrt{2x} = 2 = \left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2} > 0 \Rightarrow$ vế trái phương trình dương, với mọi x. Vậy $S = \varnothing$.

48. Giải phương trình sau :

a) $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$

b) $x^4 - 10x^3 - 2(a - 11)x^2 + 2(5a + 6)x + 2a + a^2 = 0 \ (a > -6)$

c) $x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0$

Giải

a) Đặt $a = \sqrt{2}$, phương trình có dạng : $a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0$.

$\Delta = (2x + 1)^2 \Rightarrow a = x^2 + x + 1; a = x^2 - x$

Vậy $S = \left\{\dfrac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}\ ;\ \dfrac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} + 1}}{2}\right\}$.

b) Phương trình trở thành :

$a^2 - 2(x^2 - 5x - 1)a + (x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x) = 0$.

$\Delta = (x - 1)^2 \Rightarrow a = x^2 - 4x - 2 ; a = x^2 - 6x$

$S = \{2 \pm \sqrt{6 + a} ; 3 \pm \sqrt{a + 9}\}$.

c) Đặt $\sqrt{6} = a$, phương trình trở thành : $x^2a^2 - a - x^6 + x^2 = 0$.

$$\Delta = (2x^4 - 1)^2 \Rightarrow a = x^2 \text{ ; } a = \frac{1 - x^4}{x^2}. \text{ Vậy } S = \left\{\pm\sqrt[4]{6} \text{ ; } \pm\sqrt{\frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}}\right\}.$$

49. Giải các phương trình sau :

a) $(x^2 - 16)(x - 3)^2 + 9x^2 = 0$ b) $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$

c) $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$

Giải

a) Biến đổi phương trình về dạng : $x^4 - 6x^2(x - 3) - 16(x - 3)^2 = 0$.

Nhận xét : $x = 3$ không là nghiệm phương trình, chia cả hai vế cho $(x - 3)^2$

$$\frac{x^4}{(x - 3)^2} - 6\frac{x^2}{x - 3} - 16 = 0$$

Đặt $t = \frac{x^2}{x - 6}$, phương trình có dạng: $t^2 - 6t - 16 = 0 \Leftrightarrow t = 8$ hay $t = -2$

Vậy : $S = \{-1 \pm \sqrt{13}\}$

b) $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 2)(x^2 + x - 7) = 0$.

$$S = \left\{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}\right\}.$$

c) Biến đổi phương trình về dạng : $(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$.

$S = \{-9 \text{ ; } 11\}$.

50. a) Giải phương trình sau : $32x^4 + (4x - 1)^4 = \frac{1}{27}$.

b) Định m để phương trình $x^3 + \frac{1}{x^3} = m\left(x + \frac{1}{x}\right)$ có nghiệm.

Giải

a) Áp dụng : $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{27}(a + b + c)^4 \Leftrightarrow a = b = c$,

ta được : $(2x)^4 + (2x)^4 + (1 - 4x)^4 = \frac{1}{27}(2x + 2x + 1 - 4x)^4$

$$\Leftrightarrow 2x = 1 - 4x. \text{ Vậy } S = \left\{\frac{1}{6}\right\}.$$

b) Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow |t| \geq 2$. Phương trình trở thành:

$$t[t^2 - (3 + m)] = 0 \Leftrightarrow t^2 = m + 3.$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m + 3 \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 1$.

51. a) Cho phương trình $x^4 - 4x^3 + 8x = m$.

* Giải phương trình khi $m = 5$.
* Định m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

b) Cho phương trình ẩn x : $x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 40x + m = 0$. Xác định m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

a) Với m = 5, phương trình có dạng : $(x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) - 5 = 0$.

$S = \{1 ; 1 \pm\sqrt{6}\}$.

Phương trình trở thành : $t^2 - 4t - m = 0$.

(Đặt $t = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$).

Phương trình đã cho có bốn nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + 1 > 0 \\ t_2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -4 < m < 5$.

b) Biến đổi phương trình trở thành : $(x^2 + 4x)^2 - 10(x^2 + 4x) + m = 0$.

52. a) Tìm giá trị của m để phương trình sau có nghiệm :

$$(m - 3)x^4 - 2mx^2 + 6m = 0$$

b) Tìm m để phương trình : $mx^4 - 10mx^2 + m + 8 = 0$ (1)

- Có bốn nghiệm phân biệt.
- Có bốn nghiệm $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ thoả mãn điều kiện :

$$x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$$

Giải

a) $0 \leq m \leq 3$

b) • $m < -8$ hay $m > \dfrac{1}{3}$: phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

• $m = 1$

53. a) Cho phương trình $x^4 + ax^3 + x^2 + ax + 1 = 0$ (x : ẩn số). Biết rằng phương trình có nghiệm. Chứng minh rằng : $a^2 > 2$.

b) Chứng minh rằng nếu $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm thì : $5(a^2 + b^2) \geq 4$.

c) Giải các phương trình sau:

i) $\dfrac{1}{(x^2 + x + 1)^2} + \dfrac{1}{(x^2 + x + 2)^2} = \dfrac{13}{36}$

ii) $3\left(\dfrac{x + 3}{x - 2}\right)^2 + 168\left(\dfrac{x - 3}{x + 2}\right)^2 - 46\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 0$

iii) $\dfrac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \dfrac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$

iv) $x\dfrac{8 - x}{x - 1}\left(x - \dfrac{8 - x}{x - 1}\right) = 15$.

Giải

a) Nhận xét : x = 0 không là nghiệm phương trình.

Với $x \neq 0$ chia cả hai vế phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được :

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ và $|t| \geq 2$

Phương trình có dạng: $t^2 + at - 1 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1-t^2}{t}$

$$a^2 = \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^2} = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2 > t^2 - 2 > 2 \text{ (do } |t| > 2)$$

b) Lí luận tương tự câu a).

c) i) Đặt $t = \dfrac{1}{x^2+x+1} - \dfrac{1}{x^2+x+2}$, phương trình có dạng

$$t^2 - 2t - \frac{13}{36} = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{6} \text{ hay } t_2 = -\frac{13}{6}$$

Ứng với $t_1 = \dfrac{1}{6}$, ta có $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 6$. Đặt $y = x^2 + x$

$\Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1,\ y_2 = -4$

Vậy $\left[\begin{array}{l} x^2 + x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 4 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Ứng với $t_1 = -\dfrac{13}{6}$, ta có : $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = -\dfrac{6}{13}$.

Đặt $y = x^2 + x \Rightarrow y^2 + 3y + 4 = \dfrac{45}{13} = 0$ (vô nghiệm).

Vậy $S = \left\{\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

ii). Đặt $y = \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right) : \left(\dfrac{x-3}{x+2}\right) = \dfrac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x-3)}$.

Chia cả hai vế phương trình cho $\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2$, phương trình có dạng

$3y^2 - 46y + 168 = 0 \Leftrightarrow y = 6,\ y = \dfrac{28}{3}$.

Vậy $S = \{1; 5; 6; \dfrac{6}{5}\}$.

iii). Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình :

Chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức ở vế trái cho x :

$$\frac{4}{4x + \dfrac{7}{x} - 8} + \frac{3}{4x + \dfrac{7}{x} - 10} = 1$$

Đặt $t = 4x + \dfrac{7}{x}$, phương trình trở thành : $\dfrac{4}{t-8} + \dfrac{3}{t-10} = 1$

$\Leftrightarrow t^2 - 25t + 144 = 0 \Leftrightarrow t = 9$; $t = 16$

$S = \left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right\}$

iv) Đặt $a = x.\dfrac{8-x}{x-1} = \dfrac{8x - x^2}{x-1}$; $b = x - \dfrac{8-x}{x-1} = \dfrac{x^2-8}{x-1}$

Ta có : $ab = -25$; $a + b = 8$. Suy ra : $a = 3$; $b = 5$ hay $a = 5$; $b = 3$

$S = \left\{\dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}; \dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{2}\right\}$.

🕮 BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

54. a) Giải phương trình : $(4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) = 4$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2002 – 2003)

b) Giải phương trình : $x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - bc)x + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ (x : ẩn số)

(Đề thi chọn đội tuyển Toán 9, Quận I TP. Hồ Chí Minh, năm học 1999 – 2000)

Giải

a) Biến đổi phương trình về dạng : $(12x^2 + 11x + 2)(12x^2 + 11x - 1) = 4$

Đặt $t = 12x^2 + 11x - 1$, ta được : $t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hay $t = -4$

$S = \left\{\dfrac{-11 \pm \sqrt{217}}{24}\right\}$.

b) Biến đổi phương trình về dạng : $(x + a)^3 - 3bc(x + a) + b^3 + c^3 = 0$.

Đặt $y = x + a$, phương trình trở thành : $y^3 - 3bcy + b^3 = c^3 = 0$.

Nếu $b = c$: phương trình có nghiệm $x_1 = -a - 2b$; $x_2 = x_3 = -a + b$.

$b \neq c$: phương trình có nghiệm $x = -a - b - c$.

55. Giải các phương trình sau :

a) $\dfrac{4x}{x^2 - 8x + 7} + \dfrac{5x}{x^2 - 10x + 7} = -1$.

(Đề thi vào lớp 10, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh, năm học 2001 – 2002)

b) $x\dfrac{5-x}{x+1}\left(x + \dfrac{5-x}{x+1}\right) = 6$.

(Đề thi vào lớp 10, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2006 – 2007)

c) $-x^2 + 2 = \sqrt{2 - x}$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, Trường THPT Trần Đại Nghĩa, TP. Hồ Chí Minh năm học 2001 – 2002)

Giải

a) $S = \left\{\frac{9+\sqrt{53}}{2}\ ;\ \frac{9-\sqrt{53}}{2}\right\}$.   b) $S = \{1\ ;\ 2\}$.

c) Điều kiện $x \le 2$

Biến đổi phương trình về dạng :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2-x}-\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{2} = \sqrt{2-x}-\frac{1}{2} \\ x-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}-\sqrt{2-x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{2-x} = x & (1) \\ \sqrt{2-x} = 1-x & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 11 \text{ hay } x = -2 < 0 \text{ (loại)}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ hay } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$$

Vậy $S = \left\{1;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

§5. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình, ta làm như sau :

Bước 1 : Lập phương trình :

- Chọn ẩn số và nêu điều kiện thích hợp của ẩn số.
- Biểu thị các dữ liệu chưa biết qua ẩn số.
- Lập phương trình biểu thị tương quan giữa ẩn số và các dữ liệu đã biết.

Bước 2 : Giải phương trình.

Bước 3 : Đối chiếu nghiệm của phương trình (nếu có) với điều kiện của ẩn số và với đề bài để kết luận.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

56. Tìm hai số biết tổng của hai số là 11 và tổng bình phương của hai số ấy là 61.

Giải

Gọi số thứ nhất là x ; số thứ hai là y.

Theo đề bài ta có : $x + y = 1$ và $x^2 + y^2 = 61$.

Suy ra $x^2 + (11-x)^2 = 61 \Leftrightarrow 2x^2 - 22x + 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 30 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm : $x_1 = 5$; $x_2 = 6$.

Vậy hai số cần tìm là 5 và 6.

57. Tìm hai số biết tổng của hai số là 25 và trung bình nhân của hai số đó là 12.

Giải

Gọi số thứ nhất là x, số thứ hai là y.

Theo đề bài ta có : $x + y = 25$ và $\sqrt{xy} = 12$.

Suy ra $x + y = 25$ và $xy = 144$.

Do đó x, y là nghiệm của phương trình : $X^2 - 25X + 144 = 0$

Giải ta được $X_1 = 9$; $X_2 = 6$. Vậy hai số cần tìm là 9 ; 16.

58. Cho tam giác vuông có chu vi bằng 120 cm, cạnh huyền bằng 50 cm. Tính diện tích tam giác vuông.

Giải

Gọi hai cạnh góc vuông lần lượt là x (cm) và y (cm)

(Điều kiện : $0 < x; y < 25$).

Theo đề bài ta có : $x + y = 70$ và $x^2 + y^2 = 2500$.

Suy ra $x^2 + (70 - x)^2 = 2500 \Leftrightarrow 2x^2 - 140x + 2400 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 70x + 1200 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm : $x_1 = 30$; $x_2 = 40$.

Vậy diện tích tam giác vuông là 1200 cm^2.

59. Cho đường tròn (O ; R) và điểm M ngoài (O) với MO = 2R. Từ M kẻ cát tuyến MCD qua tâm O và cát tuyến MAB (MA < MB). Biết AB = R. Tính MA, MB theo R.

Giải

Đặt $x = MA$ ($x > 0$). Do đó $MB = x + R$.

Ta có $MA.MB = MC.MD = 3R^2 \Leftrightarrow x(x + R) = 3R^2 \Leftrightarrow x^2 + Rx - 3R^2 = 0$.

Giải ra ta được :

$$x_1 = \frac{-R + R\sqrt{13}}{2} \text{ (nhận) ; } x_2 = \frac{-R - R\sqrt{3}}{2} \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } MA = \frac{-R + R\sqrt{13}}{2} \text{ ; } MB = \frac{R + R\sqrt{13}}{2}.$$

60. Một chiếc thuyền xuôi dòng được 108 km rồi ngược về 60 km. Thời gian xuôi dòng và ngược dòng tổng cộng mất 11 giờ. Vận tốc xuôi dòng hơn vận tốc ngược dòng là 6 km/h. Hỏi vận tốc thuyền xuôi dòng và ngược dòng.

Giải

Gọi vận tốc thuyền khi ngược dòng là x (km/h) (Điều kiện $x > 0$).

$\Rightarrow$ Vận tốc thuyền khi xuôi dòng là $x + 6$ (km/h)

Theo đề bài ta có : $\dfrac{108}{x+6} + \dfrac{60}{x} = 11$ hay $11x^2 - 102x - 360 = 0$.

Giải ra ta được : $x_1 = 12$ (nhận) ; $x_2 = \dfrac{-30}{11}$ (loại)

Kết luận : Vận tốc thuyền ngược dòng là 12 (km/h).
Vận tốc thuyền xuôi dòng là 18 (km/h).

61. Một người đi từ A đến B trong một giờ. Lúc trở về người đó đi $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc lớn hơn lúc đi là 2 km/h. Phần đường còn lại người đó đi với vận tốc nhỏ hơn lúc đi là 1 km/h nên lúc về chậm hơn lúc đi là 40 giây. Tính đoạn đường AB.

Giải

Gọi vận tốc của người ấy là x (km/h) (Điều kiện x > 1)

Theo đề bài ta có : $\frac{x}{3(x+2)} + \frac{2x}{3(x-1)} - 1 = \frac{1}{90}$.

Đáp số : 13 km.

62. Một phòng họp có 180 người được xếp đều trên các dãy ghế. Nếu thêm 80 người thì phải kê thêm hai dãy ghế và mỗi dãy ghế phải bố trí thêm ba người nữa. Hỏi lúc đầu phòng họp có bao nhiêu dãy ghế ?

Giải

Gọi số dãy ghế lúc đầu là x (dãy) (Điều kiện x nguyên dương).

Theo đề bài ta có : $\frac{260}{x+2} - \frac{180}{x} = 3$.

hay $3x^2 - 74x + 360 = 0$

Giải ra ta được : $x_1 = 18$ (nhận) ; $x_2 = \frac{20}{3}$ (loại).

Vậy lúc đầu phòng họp có 18 dãy ghế.

63. Một công ty vận tải dự định dùng xe tải nhỏ chở 24 tấn hàng. Vì không còn xe tải nhỏ nên công ty phải dùng xe tải lớn hơn một tấn để giao số hàng đúng hợp đồng. Do đó số xe ít hơn dự định là hai xe. Hỏi trọng tải của mỗi xe lớn ?

Giải

Gọi trọng tải của xe lớn là x (tấn) (Điều kiện x > 1).

Theo đề bài ta có : $\frac{24}{x-1} - \frac{24}{x} = 2$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

64. a) Tính độ dài các cạnh của một hình chữ nhật có chu vi bằng 108 m và có đường chéo bằng 156 m. Trong trường hợp đường chéo bằng d cm, phải chọn d như thế nào để bài toán có lời giải ?

b) Tính các cạnh và chiều cao của một tam giác vuông biết rằng : tổng hai cạnh góc vuông là 17 cm, đồng thời tổng cạnh huyền và chiều cao tương ứng là $17\frac{8}{13}$ cm.

Giải

a) Gọi kích thước của hình chữ nhật là x (m), y (m) ($0 < y < x < 204$).

Theo đề bài, ta có : $\begin{cases} x + y = 204 \\ x^2 + y^2 = 156^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 204 \\ (x + y)^2 - 2xy = 156^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 204 \\ xy = 8640. \end{cases}$$

Vậy x, y là nghiệm phương trình : $t^2 - 204t + 8640 = 0$.

Giải ra ta được : $t = 144$; $t = 60$.

Vậy kích thước kinh chữ nhật cần tìm là : 144 m và 60 m.

• Độ dài các cạnh hình chữ nhật là nghiệm của phương trình :

$$t^2 - 204t + \frac{204^2 - d^2}{2} = 0$$

Để bài toán có lời giải thì d phải có điều kiện : $102\sqrt{2} \le d \le 204$.

Khi $d = 102\sqrt{2}$ thì hình chữ nhật là hình vuông có cạnh bằng 102 m.

b) Gọi cạnh huyền là a, hai cạnh góc vuông là b và c ($b < c$) h là chiều cao tương ứng với cạnh huyền.

Ta có : $\begin{cases} b + c = 17 \\ a + h = 17\dfrac{8}{13} \end{cases}$

Lại có : $bc = ah$, $a^2 = b^2 + c^2$.

Từ các điều kiện, ta có phương trình : $13a^2 - 458a + 3757 = 0$

Do $a < 17\dfrac{18}{13}$, nên $a = 13 \Rightarrow h = 4\dfrac{8}{13}$

$bc = ah = 13.4\dfrac{8}{13} = 60$, $b + c = 17$ nên b, c là nghiệm phương trình :

$X^2 - 17X + 60 = 0 \Rightarrow b = 5, c = 12$ ($b < c$).

65. a) Một người mua 18000 đồng tiền trứng. Nhưng vì trứng nhỏ quá, chị ta đã đòi người bán thêm hai quả nữa, do đó giá bán một tá trứng giảm đi 3600 đồng. Vậy chị ấy đã mua bao nhiêu quả trứng ?

b) Tìm số tự nhiên biết rằng nếu ta đem số đó nhân với số tạo bởi cùng các chữ số nhưng đảo ngược thứ tự ta sẽ được kết quả bằng 2430.

Giải

a) Gọi số trứng đã mua là x (quả) ($x \in \mathbb{N}^*$, đơn vị : quả trứng)

Ta có phương trình : $\dfrac{18000}{x-2}.12 - \dfrac{18000}{x}.12 = 3600$.

Từ đó, tìm được số trứng đã mua là 12 quả.

b) Tích của hai số có cùng số chữ số mà nhỏ hơn 10000 thì hai số đó chỉ có hai chữ số.

Gọi a là chữ số hàng chục, b là chữ số hàng đơn vị a, b ∈ {1, 2, ..., 9}.

Ta có phương trình : $(10a + b)(10b + a) = 2430 \Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow 101ab = 10(243 - a^2 - b^2) \Rightarrow a = 5$ hay $b = 5$.

Khi $a = 5$, ta được : $2b^2 + 101b - 436 = 0 \Leftrightarrow b = 4$; $b = -\dfrac{109}{2}$ (loại).

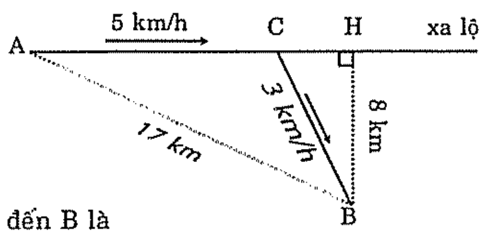
Khi $b = 5$, ta được : $2a^2 + 10a - 4360 = 0 \Leftrightarrow a = 4$; $a = -\dfrac{109}{2}$ (loại).

Vậy có hai số tìm được là 54 và 45.

66. a) Một người đi từ A đến B cách A 17 km theo đường thẳng. B cách một xa lộ 8 km. Lúc khởi hành người đó đi trên xa lộ với vận tốc 5 km/h. Hỏi người đó phải rời xa lộ chỗ nào để đi đến B trên đường đất sao cho thời gian từ A đến B ít nhất ? Biết rằng vận tốc đi bộ của người đó trên đường đất là 3 km/h.

b) Tìm ba số dương. Biết rằng tích của các số đó bằng 1,25 ; tích của số thứ nhất với bình phương số thứ hai là 5 và tổng của ba số đó đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải



a) $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2}$

$= \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (km)

Đặt $HC = x$ $(0 < x < 15)$

$CB = \sqrt{x^2 + 64}$

Thời gian đi từ A qua C để đến B là

$$t = \frac{15 - x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 + 64}}{3} = 3 + \frac{1}{15}\left(5\sqrt{x^2 + 64} - 3x\right)$$

Xét $y = 5\sqrt{x^2 + 64} - 3x$ $(y > 0)$

$y^2 = 25(x^2 + 64) + 9x^2 - 30x\sqrt{x^2 + 64}$

$= 9(x^2 + 64) + 25x^2 - 30x\sqrt{x^2 + 64} + 1024$

$= (3\sqrt{x^2 + 64} - 5x)^2 + 32^2 \geq 32^2$

$\Rightarrow y \geq 32$. Vậy $t \geq 3 + \dfrac{CH}{CN} = \dfrac{AC}{BC}.32 = \dfrac{77}{15}$

Suy ra $AC = AH - HC = 15 - 6 = 9$ (km) thì thời gian từ A đến B nhỏ nhất.

b) Gọi số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba cần tìm lần lượt là x, y, z. (Điều kiện : $x, y, z > 0$)

Ta có : $\begin{cases} x.y.z = 1,25 \\ xy^2 = 5 \\ S = x + y + z \text{ nhỏ nhất} \end{cases} \Rightarrow y = 4z$ và $x = \dfrac{1,25}{4z^2}$.

Vậy $S = \dfrac{1,25}{4z^2} + 5z = \dfrac{1,25}{4z^2} + 2,5z + 2,5z \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1,25}{4z^2}(2,5z)(2,5z)} = \dfrac{15}{4}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow z^3 = 0,125 \Leftrightarrow z = 0,5$.

Tìm được: $y = 2$, $x = 1,25$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

67. Có ba đội xây dựng cùng làm một công việc. Làm chung được 4 ngày thì đội III được điều động làm việc khác, hai đội còn lại làm thêm 12 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Biết rằng năng suất của đội I cao hơn năng suất của đội II, năng suất của đội III là trung bình cộng của năng suất đội I và đội II và nếu mỗi đội làm một mình một phần ba công việc thì mất tất cả 37 ngày mới xong. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày xong công việc trên ?

(Đề thi vào lớp 10 trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh – Toán CD, – Năm học 2003 – 2004)

Giải

Gọi thời gian các đội I ; II ; III làm riêng xong công việc lần lượt là x, y, z. Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) + 12\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 1 \\ \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \\ \dfrac{1}{3}(x + y + z) = 37. \end{cases}$$

Suy ra $z = 36$ và được hệ $\begin{cases} \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{1}{18} \\ x + y = 75. \end{cases}$

$\Rightarrow$ x, y là nghiệm của phương trình : $t^2 - 75t + 18.75 = 0$.

Suy ra $t = 45$, $t = 30$.

68. Hai thành phố A và B cách nhau 48 km, gió thổi từ A đến B với vận tốc không đổi 6 km/ giờ. Lúc 8 giờ, một người đi mô tô từ A đến B, nghỉ ngơi 30 phút rồi trở lại A, anh về đến A lúc 10 giờ 50 phút.

Vận tốc mô tô được cộng thêm hoặc trừ bớt vận tốc của gió, tùy theo mô tô chạy xuôi chiều hoặc ngược chiều gió. Hãy tính vận tốc riêng của mô tô (vận tốc mô tô khi tốc độ gió bằng 0).

(Đề thi vào lớp 10 trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh – Toán CD – Năm học 2004 – 2005)

Giải

Gọi vận tốc riêng của môtô là x (km/h) (x > 6).

Theo đầu bài ta có phương trình :

$$\frac{48}{x+6} + \frac{48}{x-6} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 7x^2 - 288x - 252 = 0.$$

$$x_1 = \frac{144+150}{7} = 42 \text{ (thích hợp)};\ x_2 = \frac{144-150}{7} = -\frac{6}{7} < 0 \text{ (loại)}.$$

Vậy vận tốc riêng của mô tô là 42 km/h.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1. Cho phương trình : $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $3x_1 - 4x_2 = 11$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đều dương.

c) Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m.

Giải

a) $\Delta = (2m-3)^2 \geq 0, \forall m \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = 1 - m$

- Nếu $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 1 - m$ thay vào $3x_1 - 4x_2 = 11$ ta tính $m = \frac{33}{8}$.
- Nếu $x_1 = 1 - m$; $x_2 = -\frac{1}{2}$ thay vào $3x_1 - 4x_2 = 11$ ta tính được $m = -2$.

b) Phương trình có nghiệm : $x = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ Không có giá trị nào của m để phương trình có hai nghiệm đều dương.

c) Hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m : $2(x_1 + x_2) + 4x_1x_2 = -1$.

2. Giải các phương trình :

a) $x^2 + \frac{2x}{x-1} = 8$

b) $(x^2 + 7x + 10)(x^2 + 11x + 28) - 72 = 0$

c) $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$

Giải

a) Điều kiện : $x \neq 1$

Phương trình tương đương với :

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + x - 4) = 0 \Rightarrow S = \left\{2\,;\,\frac{\sqrt{17} \pm 1}{2}\right\}.$$

b) Phương trình tương đương với :

$(x^2 + 9x + 14)(x^2 + 9x + 20) - 72 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 9x + 17)^2 = 9^2$.

$S = \{-1 ; -8\}$

c) Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm phương trình.

Với $x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho x^2, ta được :

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0.$$

Đặt $y = x - \frac{1}{x}$, phương trình trở thành : $y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -1 ; y = 4$.

3. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x + y)^2 - 4(x + y) = 12 \\ (x - y)^2 - 2(x - y) = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14 \\ x^2 + y^2 + xy = 84 \end{cases}$

Giải

a) Hệ tương đương : $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x - y^2 = 0 & (1) \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2) = 0. & (2) \end{cases}$

Ta có từ (1) : $x = y \vee x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$

Lại có : $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (x + y - 2)^2 = 0$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ $(x ; y) = (0 ; 0) ; (2 + \sqrt{2} ; 2 + \sqrt{2}), (2 - \sqrt{2} ; 2 - \sqrt{2})$.

b) Hệ tương đương với $\begin{cases} (x + y - 6)(x + y + 2) = 0 \\ (x - y - 3)(x - y + 1) = 0. \end{cases}$

c) Hệ tương đương với $\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) = 0 \\ x^6 + y^6 = 1. \end{cases}$

d) Hệ tương đương với $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14 \\ (x + y)^2 - xy = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14 \\ (x + y + \sqrt{xy})(x + y - \sqrt{xy}) = 84 \end{cases}$

4. a) Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn :

$$4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 4 = 0 \qquad (x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{1}{m + 1} \ (m \neq 1)$$

b) Gọi a, b là các nghiệm của phương trình : $x^2 + 5x - 8 = 0$. Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là : $x_1 = \frac{a}{b + 1}$ và $x_2 = \frac{b}{a + 1}$.

c) Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình ẩn x sau : $x^2 - ax + 1 = 0$.

Tính : $S_7 = x_1^7 + x_2^7$ theo a.

Giải

a) Từ $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = \dfrac{1}{m+1}(m \neq -1) \Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) = -\dfrac{1}{m+1}$

Đặt $S = x_1 + x_2$; $P = x_1x_2$, ta có : $\begin{cases} 4P - 5S = -4 \\ P - S = -\dfrac{m}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \dfrac{4}{m+1} \\ P = \dfrac{4-m}{m+1} \end{cases}$

Phương trình cần lập : $x^2 - Sx + P = 0$

$\Leftrightarrow (m + 1)x^2 - 4x + 4 - m = 0$ $(m \neq -1)$.

b) Phương trình cần lập là $3X^2 + 9X + 2 = 0$

c) Kí hiệu : $S_n = x_1^n + x_2^n$. Hệ thức Vi-ét : $\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$

Tính được : $S_2 = a^2 - 2$; $S_4 = a^4 - 4a^2 + 2$; $S_3 = a^3 - 3a$

$S_7 = (x_1^4 + x_2^4)(x_1^3 + x_2^3) - x_1^3x_2^3(x_1 + x_2) = a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a$.

5. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 4)x + m^2 - 8 = 0$ (m là tham số). Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và :

a) $x_1 + x_2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

b) ${x_1}^2 + {x_2}^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

a) $\Delta' = 8m + 24$. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3$.

$$x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = -3\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{97}{3} \leq \frac{97}{3}$$

b) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = m^2 + 32m + 88 = (m + 3)(m + 29) + 1 \geq 1$.

6. Trong cùng một mặt phẳng toạ độ cho parabol (P) $y = x^2$ và đường thẳng (D) $y = mx + 1$. Xác định m để (D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$ sao cho :

a) $(x_A - 1)^2 + (x_B - 1)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. b) Độ dài AB ngắn nhất.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $x^2 - mx - 1 = 0$ (*)

Do $ac = -1 < 0 \Rightarrow$ (*) có nghiệm x_A ; x_B, $\forall m$.

Hệ thức Vi-ét : $x_A + x_B = m$, $x_A.x_B = -1$

a) $(x_A - 1)^2 + (x_B - 1)^2 = (m - 1)^2 + 3 \geq 3$

b) $A, B \in (D) \Rightarrow y_A = mx_A + 1$; $y_B = mx_B + 1$

$AB = \sqrt{(m^2 + 4)(m^2 + 1)} \geq \sqrt{4.1} = 2$.

7. Trong cùng một mặt phẳng toạ độ cho parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (D) : $y = x - 3$. A, B nằm trên (P) có hoành độ lần lượt là -1 ; 2.

a) Xác định vị trí điểm C trên cung AB để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

b) Xác định điểm M trên (P) và điểm N trên (D) để độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất.

Giải

a) Phương trình (AB) : y = x + 2.

Phương trình đường thẳng (d) // (AB) tiếp xúc (P) : y = x + b.

Phương trình hoành độ điểm chung của (P) và (d) : $x^2 - x - b = 0$

(d) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{4}$.

Tiếp điểm $C\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$.

* (P) trên (d) $\Leftrightarrow x^2 \geq x - \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

* $\widehat{AB}$ dưới AB $\Leftrightarrow x^2 \leq x + 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.

Mọi điểm C′ khác C thuộc $\widehat{AE}$ của (P) đều có khoảng cách đến AB nhỏ hơn khoảng cách từ C đến AB.

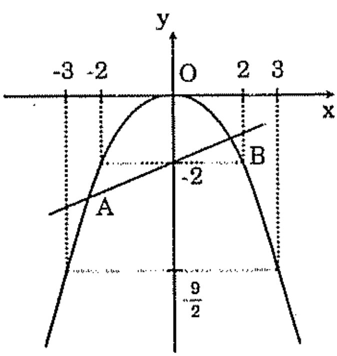
b) M ≡ C, N là giao điểm của đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng (d).

8. Trong cùng một mặt phẳng toạ độ cho parabol (P) : $y = -\dfrac{1}{2}x^2$, điểm I(0 ; –2) và điểm M(m ; 0) với m là tham số khác 0.

a) Vẽ parabol (P).

b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm M, I. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với độ dài AB > 4.

Giải



b) Phương trình (MI) : $y = \dfrac{2}{m}x - 2$.

Phương trình hoành độ điểm chung của (P) và (d) : $mx^2 + 4x - 4m = 0$ (*)

(*) có : $ac = -4m^2 < 0,\ \forall m \neq 0$

$\Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

$AB^2 > (x_B - x_A)^2 = (x_B + x_A)^2 - 4x_B.x_A$

$= \dfrac{16}{m^2} + 16 > 16$

Suy ra AB > 4.

9. a) Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 3 cm thì diện tích tam giác đó tăng thêm 36 cm^2, và nếu một cạnh giảm đi 2 cm, cạnh kia giảm đi 4 cm thì diện tích của tam giác giảm đi 26 cm^2.

b) Tính hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 37 m và diện tích bằng 210 m^2.

Giải

a) Gọi độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là x, y (cm)
(Điều kiện $x > 2$; $y > 4$). Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}(x+3)(y+3) - xy = 72 \\ (x-2)(y-4) + 52 = xy.\end{cases}$$

b) Gọi độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là x, y (m) $(x > y > 0)$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}x^2 + y^2 = 1369 \\ xy = 420\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 35 \\ y = 12\end{cases}$

Vậy độ dài hai cạnh góc vuông cần tìm là 35 m và 12 m.

10. Một người dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km bằng xe máy trong một thời gian đã định. Sau khi đi 1 giờ người đó nghỉ 10 phút. Do đó để đến B đúng hẹn, người ấy phải tăng vận tốc thêm 6 km/h. Tính vận tốc ban đầu của người đó.

Giải

Gọi vận tốc ban đầu của người đó x (km/h)

Ta có phương trình : $\frac{7}{6} + \frac{120 - x}{x + 6} = \frac{120}{x}$.

Giải phương trình ta được : $x = 48$ (nhận) ; $x = -90$ (loại).

11. a) Cho $0^0 < \alpha < 90^0$. Chứng minh rằng phương trình (ẩn x) sau vô nghiệm

$$x^2 - 4\sin^{1005}\alpha.x + 5 - 4\cos\alpha = 0.$$

b) Biết rằng $a + b + c < 0$ và phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm. Hãy xác định dấu của c ?

Giải

a) Với $0^0 < \alpha < 90^0$ có : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\Delta' = 4\sin^{2010}\alpha + 4\cos\alpha - 5$$

Do $0 < \sin\alpha < 1 \Rightarrow \sin^{2010}\alpha < \sin^2\alpha \Rightarrow \sin^{2010}\alpha + \cos\alpha < \sin^2\alpha + \cos\alpha$

$$= -\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \le \frac{5}{4} \Rightarrow 4\sin^{2010}\alpha + 4\cos\alpha - 5 < 0 \Rightarrow \Delta' < 0.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Giả sử $c \ge 0$. Do phương trình vô nghiệm nên $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$\Rightarrow 4ac > b^2 \ge 0 \Rightarrow c > 0$ và $a > 0 \Rightarrow a + c > 0$

Lại có : $a + b + c < 0 \Rightarrow a + c < -b \Rightarrow (a + c)^2 < b^2 < 4ac$

$\Rightarrow (a - c)^2 < 0$ (vô lý). Vậy $c < 0$.

12. Tìm m để phương trình ẩn x : $x^2 + mx + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn : $\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 7$

Giải

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq 2$.

Ta có $\dfrac{x_1^2}{x_2^2} + \dfrac{x_2^2}{x_1^2} > 7 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 > 9 \Leftrightarrow (m^2 - 2)^2 > 9$

$\Leftrightarrow m < -\sqrt{5}$ hoặc $m > \sqrt{5}$ (thoả điều kiện có nghiệm).

3. Cho phương trình (ẩn x) : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$; $k \neq -1$). Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 = kx_2$ là $(k + 1)^2ac = kb^2$.

Giải

$$\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - \frac{4k}{(k+1)^2}.b^2 = \frac{b^2(k-1)^2}{(k+1)^2} \geq 0.$$

Phương trình có : $x_1 = kx_2$ hoặc $x_2 = kx_1 \Leftrightarrow (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = 0$

$\Leftrightarrow x_1x_2 - k[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + k^2x_1x_2 = 0$

$\Leftrightarrow (k + 1)^2x_1x_2 = k(x_1 + x_2)^2 \Leftrightarrow (k + 1)^2.\dfrac{c}{a} = k\dfrac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow (k + 1)^2ac = kb^2$.

14. Cho phương trình : $(m - 1)x^2 + 2(m - 1)x - m = 0$ (x là ẩn số).

a) Định m để phương trình có nghiệm kép. Tính nghiệm kép này.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm.

Giải

a) Phương trình có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-1)(2m-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Lúc đó $x_1 = x_2 = -1$.

b) Phương trình có hai nghiệm : $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \dfrac{1}{2}$.

15. Cho phương trình : $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 4m + 5 = 0$ (x : ẩn số).

a) Định m để phương trình có nghiệm.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương.

Giải

a) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{2}{3}$.

b) Phương trình có hai nghiệm $x_2 > x_1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{2}{3}$.

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

§1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Định lí Py-ta-go

- *Định lí thuận :* tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + BC^2$.
- *Định lí đảo :* tam giác ABC có : $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$.

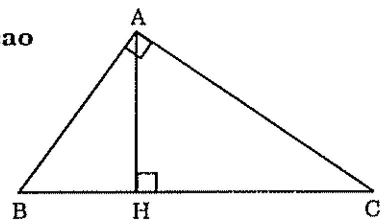
2. Hệ thức liên hệ giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

Xét tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH. Ta có :

- $AB^2 = BH.BC$; $AC^2 = CH.BC$

3. Các hệ thức liên quan đến đường cao

- $AH^2 = BH.HC$
- $AH.BC = AB.AC$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$



B/ BÀI TẬP

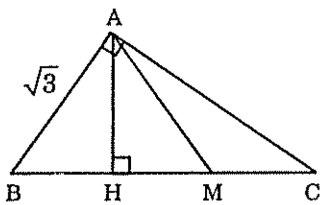
BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Tam giác ABC vuông tại A, gọi M là trung điểm của BC. Biết tam giác ABM là tam giác đều có cạnh là $\sqrt{3}$ cm.

a) Tính độ dài AC và đường cao AH của tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác ABC.

Giải



a) $BC = 2AM = 2AB = 2\sqrt{3}$ (cm) ;

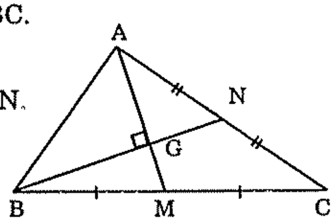
$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 3$ (cm) ;

$AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{3}{2}$ (cm).

b) $S = \dfrac{1}{2}AB.AC = 1{,}5\sqrt{3}$ (cm^2).

2. Tam giác ABC vuông cân tại A và AB = a. Các đường trung tuyến AM và BN vuông góc với nhau. Tính AC và BC.

Giải



Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow BG = \dfrac{2}{3}BN$.

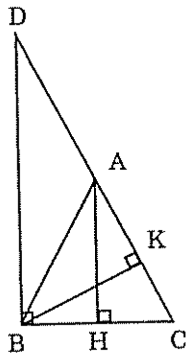
Ta có : $AB^2 = BN.BG \Rightarrow a^2 = \dfrac{2}{3}BN^2$

$\Rightarrow BN = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lại có $AN^2 = BN^2 - AB^2 = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow AN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$ và $BC = a\sqrt{3}$ (làm tương tự).

3. Cho tam giác ABC cân tại A với hai đường cao AH và BK. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{4AH^2}$ b) $BC^2 = 2CK.AC$.



Giải

Dựng đường thẳng vuông góc với BC tại B cắt đường thẳng AC tại D

$\Rightarrow AH // BD$, mà $HB = HC$ (gt)

$\Rightarrow AD = AC \Rightarrow AH$ là đường trung bình của ΔBDC.

a) Áp dụng hệ thức lượng trong ΔABC vuông tại B, ta có :

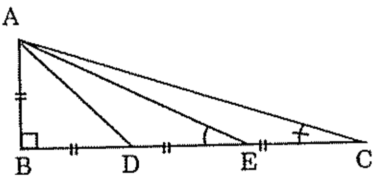
$\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BD^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{4AH^2}$ (vì $BD = 2AH$).

b) $BC^2 = CK.CD = 2CH.AC$ (vì $AD = AC$).

4. a) Tam giác ABC vuông tại B có $BC = 3AB$. Trên cạnh BC ta lấy các điểm D và E sao cho $BD = DE = EC$. Chứng minh $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} + \widehat{ACB}$.

b) Một tam giác vuông có cạnh huyền là 25cm và đường cao ứng với cạnh huyền là 12cm. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của tam giác vuông này.

Giải



a) Đặt $AB = BD = DE = CE = 1$.

Ta có : $AD^2 = AB^2 + BD^2 = 2$

$DE.DC = 2$

$\Rightarrow AD^2 = DE.DC$

$\Rightarrow \dfrac{DE}{AD} = \dfrac{AD}{DC} \Rightarrow \Delta DEA \backsim \Delta DAC$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DEA}$.

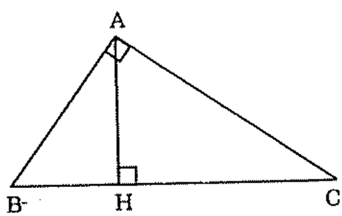
Vậy $\widehat{ADB} = \widehat{DAC} + \widehat{ACB} = \widehat{DEA} + \widehat{ACB}$.

b) Xét ΔABC vuông tại A, có $BC = 25cm$, đường cao $AH = 12cm$ ($AB < AC$).

Đặt $BH = x \Rightarrow CH = 25 - x$.

Do $AB < AC \Rightarrow BH < CH \Rightarrow x < 25 - x$

$\Rightarrow 0 < x < \dfrac{25}{2}$.



Áp dụng hệ thức lượng trong ΔABC vuông tại A : $AH^2 = BH.HC$

$\Rightarrow x(25 - x) = 144 \Leftrightarrow x^2 - 25x + 144 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 9)(x - 16) = 0$

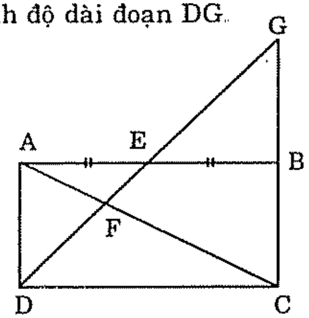
$\Leftrightarrow x = 16 \; ; \; x = 9.$

So điều kiện ta được : $BH = 9cm \Rightarrow AB = \sqrt{BH.BC} = \sqrt{9.25} = 15$ (cm).

5. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 36cm, AD = 24cm. E là trung điểm của AB, đường thẳng DE cắt AC ở F, cắt CB ở G.

a) Chứng minh $FD^2 = EF.FG$.   b) Tính độ dài đoạn DG.

Giải



Dễ dàng tính DF = 20cm ;

EF = 10cm và FG = 40cm.

Vậy : $DF^2 = 400$; $EF.FG = 400$

$\Rightarrow \quad DF^2 = EF.FG$.

Suy ra : DG = 2DE = 60 (cm).

6. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường trung tuyến AM và đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

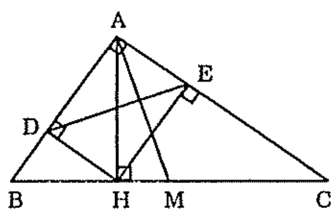
a) Chứng minh rằng $DE^2 = BH.HC$.

b) Chứng minh DE vuông góc với AM.

c) Giả sử diện tích tam giác ABC bằng 2 lần diện tích tứ giác AEHD. Chứng minh tam giác ABC vuông cân.

Giải

a) $DE^2 = AH^2 = BH.HC$.



b) Dễ dàng chứng minh $\widehat{HAE} = \widehat{AED}$;

$\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$

$\Rightarrow \widehat{MED} + \widehat{MAC} = \widehat{HAE} + \widehat{MCA}$

$= 90^\circ$ (ΔAHC vuông tại H).

Vậy $AM \perp DE$.

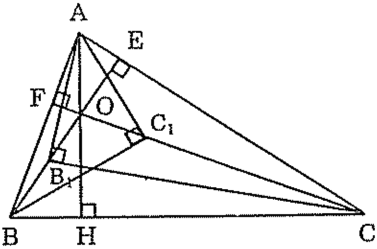
c) Ta có : $S_{ABC} = 2S_{AEHD} = 4S_{ADE}$.

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \frac{AE.AD}{AB.AC} = \frac{AH^4}{(AB.AC)^2} = \frac{AH^2}{BC^2} \le \frac{AM^2}{BC^2} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow S_{AED} \le \frac{1}{4} S_{ABC}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv M \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và các đường cao cắt nhau tại O. Trên các đoạn thẳng OB, OC lấy tương ứng hai điểm B_1 và C_1. Chứng minh rằng nếu : $\widehat{AB_1C} = \widehat{AC_1B} = 90^\circ$ thì $AB_1 = AC_1$.

Giải



$B_1A^2 = AE.AC$

$C_1A^2 = AF.AB.$

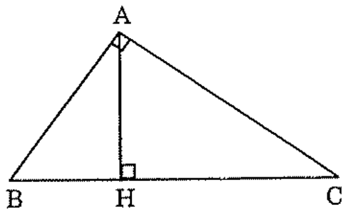
Lại có : $\Delta AEB \backsim \Delta AFC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AF.AC.$

Suy ra : $AB_1^2 = AC_1^2 \Rightarrow AB_1 = AC_1.$

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết chu vi tam giác ABH bằng 30cm và chu vi tam giác ACH bằng 40cm. Tính chu vi tam giác ABC.

Giải



$\Delta AHB \backsim \Delta HCA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{CV(HAB)}{CV(HCA)} = \dfrac{30}{40} = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow AB = 3k,\ AC = 4k$

Vậy $BC = 5k.$

$\Delta ABC \backsim \Delta HBA$ (g.g)

$\Rightarrow \quad \dfrac{CV(ABC)}{CV(HBA)} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow CV\ (ABC) = 50cm.$

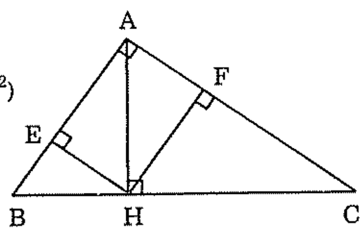
BÀI TẬP NÂNG CAO

Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC. Chứng minh rằng :

a) $BC^2 = 3AH^2 + BE^2 + CF^2.$ b) $\dfrac{AB^3}{AC^3} = \dfrac{BE}{FC}.$

c) $AH^3 = BC.BE.CF$ và $AH^3 = BC.HE.HF$

Giải



a) $BC^2 = (BH + HC)^2 = BH^2 + HC^2 + 2BH.HC$

Lại có : $BH^2 = BE^2 + EH^2$

$CH^2 = CF^2 + HF^2$

$\Rightarrow BH^2 + CH^2 = BE^2 + CF^2 + (EH^2 + HF^2)$

$= BE^2 + CF^2 + EF^2$

$= BE^2 + CF^2 + AH^2$

Lại có : $2BH.HC = 2AH^2$

$\Rightarrow BC^2 = 3AH^2 + BE^2 + CF^2.$

b) $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{BH}{CH} \Rightarrow \dfrac{AB^4}{AC^4} = \dfrac{BH^2}{CH^2} = \dfrac{BE.AB}{CF.AC} \Rightarrow \dfrac{AB^3}{AC^3} = \dfrac{BE}{CF}.$

c) $AH^2 = BH.HC \Rightarrow AH^4 = BH^2.CH^2 = (BE.AB)(CF.AC)$

$= BE.CF(AB.AC) = BE.CF.BC.AH.$

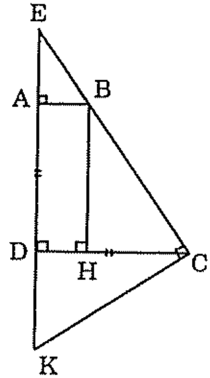
Suy ra $AH^3 = BE.CF.BC.$

Lại có : $AH^2 = AE.AB$; $AH^2 = AF.AC$

$\Rightarrow AH^4 = AE.AF.AB.AC = HE.HF.BC.AH \Rightarrow AH^3 = HE.HF.BC.$

10. Cho hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$ và AD = DC (AB < CD). Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng DA, CB.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{EC^2}$.



Giải

Kẻ BH ⊥ DC ; CK ⊥ CE

$\Rightarrow \Delta DCK = \Delta HBC$ (c.g.c) $\Rightarrow CK = CB$.

ΔCKE có $\widehat{C} = 90°$, DC ⊥ KE

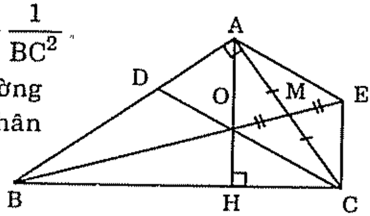
nên $\dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{CE^2} + \dfrac{1}{CK^2}$.

Do đó $\dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{CA^2} = \dfrac{1}{CE^2} + \dfrac{1}{CK^2} = \dfrac{1}{CE^2} + \dfrac{1}{BC^2}$.

11. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH, đường trung tuyến BM, đường phân giác CD đồng quy tại O.

a) Chứng minh rằng BH = AC

b) Cho biết BC = a. Tính AB, AC theo a.



Giải

a) Gọi E là điểm đối xứng của O qua M.

Tứ giác OAEC là hình bình hành ⇒ OA // EC, AE // OC.

ΔBCE có OH // EC $\Rightarrow \dfrac{BH}{CH} = \dfrac{BO}{EO}$. (1)

ΔBAE có OD // EA $\Rightarrow \dfrac{BO}{EO} = \dfrac{BD}{AD}$ (2)

ΔABC có CD là đường phân giác $\Rightarrow \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BC}{AC}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) có $\dfrac{BH}{CH} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow BH.AC = CH.BC$.

Mặt khác ΔABC vuông tại A, AH là đường cao

$\Rightarrow BH^2 = CH.BC$ và $BH.BC = AB^2$. Ta có $BH^2 = BH.AC \Rightarrow BH = AC$.

b) ΔABC vuông tại A $\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Ta có : $AC.a + AC^2 = a^2$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + AC.a + AC^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 \Rightarrow (\frac{a}{2} + AC)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}a}{2}\right)^2.$$

Vậy $AC = \dfrac{\left(\sqrt{5} - 1\right)a}{2}$.

🕮 BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

12. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$).

a) Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC. Chứng minh rằng : $BD\sqrt{CH} + CE\sqrt{BH} = AH\sqrt{BC}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm hoặc 2007 – 2008)

b) Biết $S_{ABH} = 24cm^2$, $S_{ACH} = 13{,}5cm^2$. Tính BC.

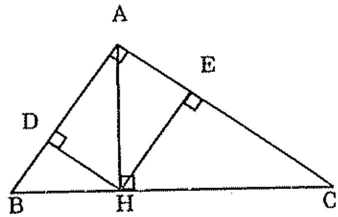
(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, trường chuyên Văn – Toán huyện Đức Phổ, Tỉnh Quãng Ngãi, năm học 1991 – 1992)

Giải

a) $BD.\sqrt{CH} + CE.\sqrt{BH} = AH\sqrt{BC}$

$\Leftrightarrow BD\sqrt{CH.BC} + CE\sqrt{BH.BC} = AH.BC = AB.AC$

$\Leftrightarrow BD\sqrt{AC^2} + CE\sqrt{AB^2} = AB.AC \Leftrightarrow \dfrac{BD}{AB} + \dfrac{CE}{AC} = 1$ (Đẳng thức đúng)



Áp dụng định lí Talét, ta có :

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BH}{BC}; \frac{CE}{AC} = \frac{CH}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AB} + \frac{CE}{AC} = \frac{BH + CH}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$

b) $S_{ABH} = \dfrac{1}{2}AH.BH$, $S_{ABH} = 24$

$\Rightarrow AH.BH = 48.$

Tương tự $AH.CH = 27.$

Mặt khác ΔABC vuông tại A, AH là đường cao, nên $AH^2 = BH.CH$

Do đó $(AH.BH).(AH.CH) = 48.27$

$AH^4 = 6^4$

$AH = 6$

$$BH = \frac{AH.BH}{AH} = \frac{48}{6} = 8$$

$$CH = \frac{AH.CH}{CH} = \frac{27}{6} = 4{,}5.$$

13. Cho tam giác ABC có $AB = 1$, $\widehat{A} = 105°$, $\widehat{B} = 60°$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ ED song song với AB (D thuộc AC).

Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{4}{3}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9, trường THCS Hoa Lư, Quận 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2005 – 2006)

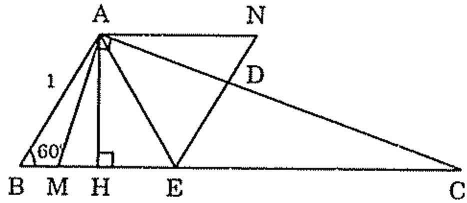
Giải

Dựng đường thẳng vuông góc AC tại C cắt BC tại M. Đường thẳng qua A song BC cắt đường thẳng ED tại N

$\Rightarrow$ ABEN là hình thoi

$\Rightarrow$ $\Delta ABM = \Delta AND$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ $\Rightarrow AM = AD$.



Áp dụng hệ thức lượng trong ΔMAC có $\hat{A} = 90°$, $AH \perp BC$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

ΔABC đều có $AH \perp BE$, $AB = 1 \Rightarrow AH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra : $\dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{4}{3}$.

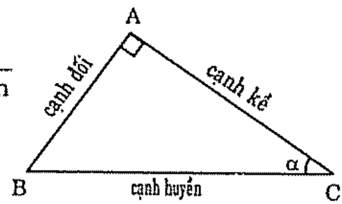
§2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Định nghĩa : Cho góc nhọn α

$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}, \cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}, \text{cotg}\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}.$$



Nhận xét : • $0 < \sin\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$

• $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

2. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

Nhận xét : Với $0° < \alpha_1 < \alpha_2 < 90°$ thì $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$; $\tan\alpha_1 < \tan\alpha_2$

$\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$; $\cot\alpha_1 > \cot\alpha_2$.

B/ BÀI TẬP

🕮 BÀI TẬP CƠ BẢN

14. Tính :

a) $\sin 42° - \cos 48°$

b) $\sin^2 61° + \sin^2 29°$

c) $\tan 40°.\tan 45°.\tan 50°$

d) $\cos^2 38° + \cos^2 52° + \cos^2 60°$.

Giải

Áp dụng tỉ số lượng giác hai góc phụ nhau, ta tính được

a) 0 b) 1 c) 1 d) $\dfrac{5}{4}$.

15. Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính giá trị của các biểu thức sau :

$A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ$

$B = \cos^2 15^\circ - \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ - \cos^2 45^\circ + \cos^2 55^\circ - \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ$

$C = \tan 20^\circ.\tan 40^\circ.\tan 50^\circ.\tan 60^\circ.\tan 70^\circ.$

Giải

a) 4.

b) Ta có : $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$; $\cos 65^\circ = \sin 25^\circ$; $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ$.

Vậy $B = (\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) - (\cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ) + (\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ) - \cos^2 45^\circ$

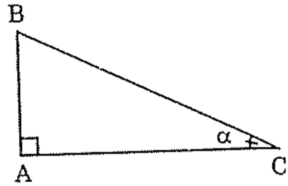
$$= 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

c) $D = \sqrt{3}$.

16. Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần :

a) $\sin 48^\circ$; $\cot 15^\circ$; $\tan 65^\circ$; $\cos 50^\circ$; $\cot 42^\circ$

b) $\sin 65^\circ$; $\cos 65^\circ$; $\tan 65^\circ$; $\cot 24^\circ$.



Giải

a) Ta có : $\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC} < \dfrac{AB}{AC} = \tan\alpha$ (vì $BC > AC$).

Áp dụng kết quả trên và lưu ý đối với góc nhọn, hàm sin, hàm tang là hàm đồng biến, hàm côsin và hàm côtang là hàm nghịch biến.

$\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$, $\cot 15^\circ = \tan 75^\circ$, $\cot 42^\circ = \tan 48^\circ$.

Do : $40^\circ < 48^\circ < 65^\circ < 75^\circ \Rightarrow \sin 40^\circ < \sin 48^\circ < \tan 48^\circ < \tan 65^\circ < \tan 75^\circ$

Suy ra : $\cos 50^\circ < \sin 48^\circ < \cot 42^\circ < \tan 65^\circ < \cot 15^\circ$.

b) $25^\circ < 65^\circ < 66^\circ \Rightarrow \sin 25^\circ < \sin 65^\circ < \tan 65^\circ < \tan 66^\circ$

$\Rightarrow \cos 65^\circ < \sin 65^\circ < \tan 65^\circ < \cot 24^\circ$.

17. Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của góc α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

$A = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$B = (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sin\alpha)^2$

$$C = \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 - (\cos\alpha + \sin\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Giải

Áp dụng $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ta có :

$A = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 = 1^3 = 1$

$B = 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2.1 = 2.$

$$C = \frac{-4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = -4.$$

18. Biết tgα = 2. Tính giá trị của biểu thức : $A = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha$.

Giải

$$\frac{A}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 2\tan\alpha - 3 \Rightarrow A = (\tan^2\alpha + 2\tan\alpha - 3) : (1 + \tan^2\alpha)$$

$$= (4 + 2.2 - 3) : (1 + 4) = 1.$$

19. Tính số đo của góc nhọn α biết :

a) $\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha = 2$ b) $7\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha = \frac{13}{2}$.

Giải

Cách 1 :

a) $\tan\alpha + \cot\alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2 \Leftrightarrow (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Cách 2 : $\tan\alpha + \cot\alpha = 2 \Leftrightarrow \tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} = 2 \Leftrightarrow \dots$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$$

b) $7\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha = \frac{13}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2\alpha + 5 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ.$$

20. a) Với $0^\circ < \alpha_1 < \alpha_2 < 90^\circ$. Chứng minh rằng :

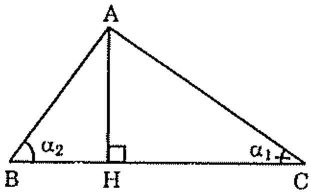
$\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$ và $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$.

b) Với $\alpha + \beta < 45^\circ$. Chứng minh rằng : $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Giải

a) Dựng ΔABC có $\widehat{B} = \alpha_2$; $\widehat{C} = \alpha_1$, do $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \widehat{C} < \widehat{B}$

$\Rightarrow AB < AC$. Kẻ $AH \perp BC$, ta có :



$$\sin\alpha_1 = \frac{AH}{AC} < \frac{AB}{AB} = \sin\alpha_2.$$

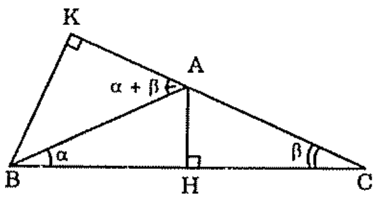
$\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 = 1 = \sin^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2$

mà $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2 \Rightarrow \sin^2\alpha_1 < \sin^2\alpha_2$

suy ra : $\cos^2\alpha_1 > \cos^2\alpha_2 \Rightarrow \cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$.

b) Dựng ΔABC có $\widehat{B} = \alpha$; $\widehat{C} = \beta \Rightarrow \widehat{A} > 90^\circ$.

Kẻ $AH \perp BC$, $BK \perp AC$.



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\widehat{KAP} = \frac{BK}{AB}.$$

Ta có : $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$$= \frac{AH}{AB}.\frac{HC}{AC} + \frac{AH}{AC}.\frac{BH}{AB}$$

$$= \frac{AH.BC}{AB.AC} = \frac{BK.BC}{AB.AC} = \frac{BK}{AB} = \sin(\alpha + \beta).$$

BÀI TẬP NÂNG CAO

21. Tam giác ABC có các góc thoả mãn :

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\le\tan\frac{C}{2} \text{ và } \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\le 2\cot\frac{C}{2}.$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Giải

Từ điều kiện giả thiết, ta được : $2+\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\cot\frac{A}{2}\le 4$

$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cot\frac{A}{2}\le 2$ (1)

Lại có : $\tan\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\cot\frac{A}{2}\ge 2\sqrt{\tan\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\tan\frac{B}{2}.\cot\frac{A}{2}}=2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cot\frac{A}{2}=2$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \tan^2\frac{A}{2}=\tan^2\frac{B}{2}\Leftrightarrow\frac{\widehat{A}}{2}=\frac{\widehat{B}}{2}\Leftrightarrow\widehat{A}=\widehat{B}$.

Lúc đó $\begin{cases}\tan\frac{A}{2}\le\tan\frac{C}{2}\\ \cot\frac{A}{2}\le\cot\frac{C}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\widehat{A}}{2}\le\frac{\widehat{C}}{2}\\ \frac{\widehat{A}}{2}\ge\frac{\widehat{C}}{2}\end{cases}\Rightarrow\widehat{A}=\widehat{C}$. Vậy ΔABC đều.

22. Với $0^\circ<\alpha<45^\circ$. Chứng minh rằng :

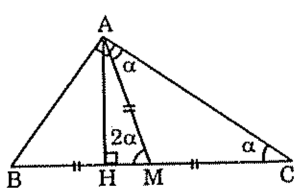
$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\ ;\ \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\ ;\ \tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Giải

Xét ΔABC vuông tại A có $\widehat{C}=\alpha\ (0^\circ<\alpha<45^\circ)$.

Vẽ đường trung tuyến AM $\Rightarrow$ MA = MC $\Rightarrow$ ΔAMC cân tại M.

Vậy $\widehat{AMC}=2\alpha$.



Kẻ AH ⊥ BC : $\sin2\alpha=\frac{AH}{AM}$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha=2.\frac{AH}{AC}.\frac{AC}{BC}=2.\frac{AH}{2AM}=\frac{AH}{AM}$.

Suy ra : $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Ta có : $\cos2\alpha+1=\frac{MH}{AM}+1=\frac{MH+MA}{AM}=\frac{MH+MC}{AM}$

$$=\frac{HC}{AM}=2\frac{HC}{BC}=2.\frac{HC.BC}{BC^2}=2\left(\frac{AC}{BC}\right)^2=2\cos^2\alpha$$

$\Rightarrow \cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cos^2\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

$=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

Ta có : $\tan 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

23. Biết $tg\alpha = \sqrt{2} - 1$. Tính $\tan^8\alpha + \cot^8\alpha$.

Giải

Do $tg\alpha = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \cot\alpha = \sqrt{2} + 1$

$\Rightarrow \tan\alpha + \cot\alpha = 2\sqrt{2}$

Tính được : $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha = 6$; $\tan^4\alpha + \cot^4\alpha = 34$.

Suy ra : $\tan^8\alpha + \cot^8\alpha = 1154$.

24. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng $\cot A + \cot B + \cot C \ge \sqrt{3}$.

Giải

Chứng minh : $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$.

Từ đó ta có $(\cot A + \cot B + \cot C)^2 \ge 3(\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A)(\cot A + \cot B + \cot C)^2 \ge 3$

$\Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C \ge \sqrt{3}$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

25. Không dùng bảng số hoặc máy tính, hãy tính $\tan 15°$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, trường THCS Hoa Lư – Quận 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2008 – 2009)

Giải

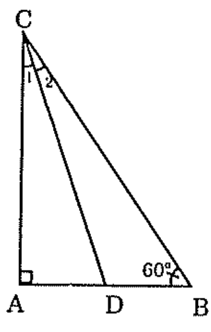
Dựng ΔABC có $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{C} = 30°$, $AB = 1 \Rightarrow BC = 2$, $AC = \sqrt{3}$.

Kẻ phân giác AD, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow AD = 2\sqrt{3} - 3$

$\tan 15° = \tan\widehat{ACD} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$

$= \dfrac{6-3\sqrt{3}}{3} = 2 - \sqrt{3}$.



26. Cho $a = \tan 1°.\tan 2° \ldots \tan 88°.\tan 89°$

và $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 45° + \sin^2 63° - \sin^2 47° + \sin^2 27° - \sin^2 43°$. Hãy so sánh a và b.

(Đề kiểm tra đội tuyển Toán 9, trường THCS Nguyễn Du, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2006 – 2007)

Giải

Áp dụng tỉ số lượng giác hai góc phụ nhau : $\alpha + \beta = 90°$ thì $\tan\alpha = \cot\beta = \dfrac{1}{\tan\beta} \Rightarrow \tan\alpha\tan\beta = 1$ và $\sin\alpha = \cos\alpha$.

Suy ra : a = (tan1°.tan89°).(tan2°.tan88°)...tan45° = 1 ;

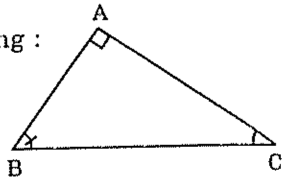
$$b = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 45^\circ + \sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ - (\sin 47^\circ + \sin^2 43^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} + (\sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ) - (\cos^2 43^\circ + \sin^2 43^\circ) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow a > b$.

§3. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ



1. Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng :

a) Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề.

b) Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với cotang góc kề.

AB = BC.sinC = BCcosB AC = BCsinB = BCcosC

AB = ACtanC = ACcotB AC = ABtanB = ABcotC.

2. Trong một tam giác vuông, nếu biết trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và góc còn lại của tam giác đó. Bài toán đặt ra như trên gọi là bài toán "Giải tam giác vuông".

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

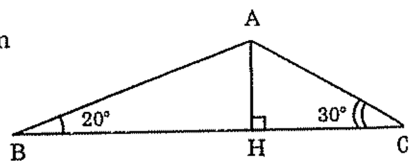
27. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 20^\circ$; $\widehat{C} = 30^\circ$; BC = 60cm. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

Kẻ AH ⊥ BC : BC = BH + HC = AHcot20° + AHcot30° = 60

$$\Rightarrow AH = \frac{60}{\cot 20^0 + \cot 30^0} \approx 13{,}396\text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}AH.BC \approx 40{,}188\text{cm}^2.$$



28. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Biết AB = 4HC = 6. Giải tam giác vuông ABC.

Giải

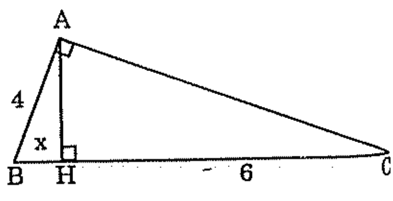
Đặt HC = x, x > 0.

Ta có : $AB^2 = BH.BC \Leftrightarrow 16 = (x + 6)x$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 6x - 16 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x - 2)(x + 8) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$ (vì x > 0).



Suy ra BC = 8 $\Rightarrow \cos B = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{1}{2}$

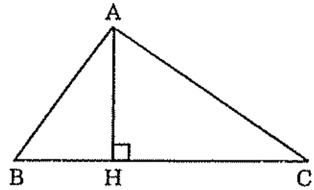
$$\Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ ; \widehat{C} = 30^\circ \text{ và } AC = 4\sqrt{3}.$$

29. Cho tam giác ABC nhọn, biết BC = a ; CA = b ; AB = c.

a) Chứng minh rằng : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

b) Giả sử 2a = b + c. Chứng minh rằng 2sinA = sinB + sinC.

Giải



a) Kẻ AH ⊥ BC, có AH = csinB = bsinC

$\Rightarrow \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Lí luận tương tự : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

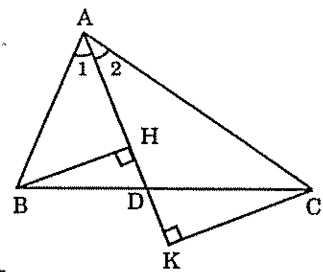
Vậy $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b+c}{\sin B + \sin C} = \dfrac{2a}{2\sin A}$.

b) Do 2a = b + c (gt) $\Rightarrow$ 2sinA = sinB + sinC.

30. Cho tam giác ABC nhọn, biết BC = a, CA = b, AC = c. Chứng minh rằng :

a) $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{a+b}$ b) $\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$.

Giải



a) Vẽ đường phân giác AD của tam giác ABC.

Vẽ BH ⊥ AD tại H, CK ⊥ AD tại K.

Do đó $\sin \widehat{A}_1 = \dfrac{BH}{AB}$; $\sin \widehat{A}_2 = \dfrac{CK}{AC}$

$\Rightarrow \quad \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{CK}{AC}$

$= \dfrac{BH + CK}{c+b} \le \dfrac{BD + DC}{b+c} = \dfrac{a}{b+c}$.

b) Lí luận tương tự : $\sin\dfrac{B}{2} \le \dfrac{b}{a+c}$; $\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{c}{a+b}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

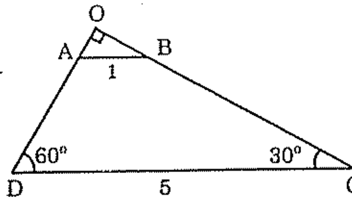
$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{1}{8}$$

$\Leftrightarrow$ (a + b)(b + c)(c + a) ≥ 8abc (Đẳng thức đúng, dễ dàng chứng minh).

31. Tính diện tích hình thang ABCD biết AB // CD, $\widehat{C} = 30^\circ$, $\widehat{D} = 60^\circ$, AB = 1cm, CD = 5cm.

Giải

Gọi O là giao điểm của AD và BC.



Ta có : OC ⊥ OD

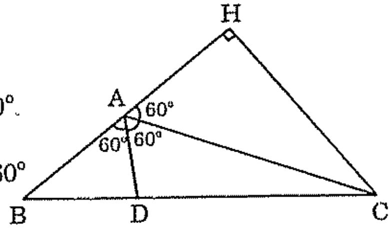
$$S_{OCD} = \frac{1}{2}OC.OD = \frac{CD^2\sqrt{3}}{8} = \frac{25\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{OAB} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Suy ra : $S_{ABCD} = 3\sqrt{3}$ (cm^2)

32. Tam giác ABC có AB = 3cm ; AC = 6cm ; $\widehat{A} = 120°$. Tính độ dài phân giác AD của tam giác ABC.

Giải



Kẻ AH ⊥ AB ;

ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60°$.

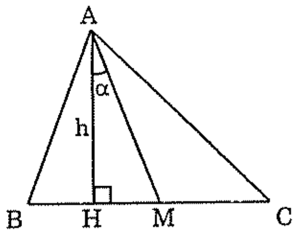
Lại có : $S_{ADB} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AD(AB + AC)\sin 60°$

suy ra : AB.AC = AD(AB + AC)

⇒ AD = 2 (cm).

33. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} > \widehat{C}$, đường cao AH, đường trung tuyến AM. Đặt $\widehat{MAH} = \alpha$. Tìm hệ thức giữa tanα với cotB và cotC.

Giải



Đặt AH = h, ta được : HC = hcotC ; BH = hcotB

$$HC - HB = h(\cot C - \cot B)$$

Lại có HC – HB = 2HA = 2htanα

$\Rightarrow\ 2\tan\alpha = \cot C - \cot B$

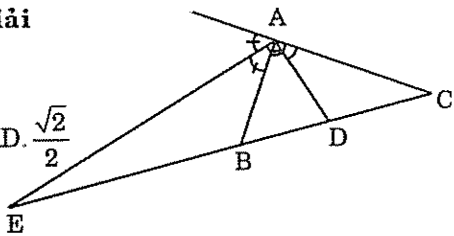
$\Rightarrow\ \tan\alpha = \dfrac{\cot C - \cot B}{2}$.

34. Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác AD

a) Chứng minh rằng : $\dfrac{\sqrt{2}}{AD} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$

b) Hệ thức trên thay đổi như thế nào nếu thay đường phân giác trong AD bởi đường phân giác ngoài AE ?

Giải



Đặt AC = b, AB = c, ta có :

$$bc = 2S_{ABC} = 2S_{ADB} + 2S_{ADC}$$

$$= (b + c).AD\sin 45° = (b + c).AD.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{bc}{b+c} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{AD} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

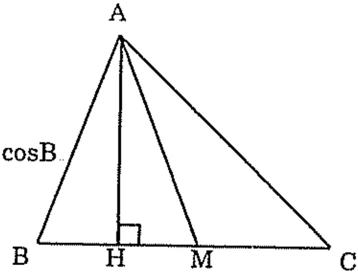
Lí luận tương tự, ta có : $\dfrac{\sqrt{2}}{AE} = \dfrac{1}{AB} - \dfrac{1}{AC}$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

35. Cho tam giác ABC nhọn, biết BC = a, AB = c, AC = b. Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM.

a) Chứng minh rằng : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.

b) Chứng minh $MA^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.



Giải

a) Ta có : $HC^2 - BH^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$

$\Rightarrow (BC - BH)^2 - BH^2 = b^2 - c^2$

$\Rightarrow a^2 - 2a.BH = b^2 - c^2 \Rightarrow BH = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$.

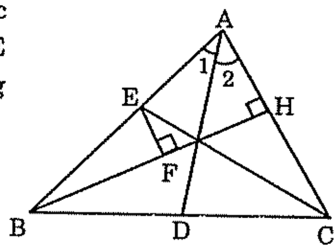
Lại có : $\cos B = \dfrac{BH}{c}$

$\Rightarrow BH = c.\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a} \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.\cos B$.

b) Giả sử $AB < AC \Rightarrow BH < BM$

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 = AB^2 - BH^2 + (BM - BH)^2$$
$$= AB^2 - BH^2 + BM^2 - 2BM.BH + BH^2$$
$$= c^2 - 2.\frac{a}{2}.\frac{(a^2+c^2-b^2)}{2a} + \frac{a^2}{4} = \frac{c^2+b^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

36. Cho tam giác ABC, các đường phân giác AD, đường cao BH, đường trung tuyến CE đồng quy tại điểm O. Chứng minh rằng $AC\cos A = BC\cos C$.



Giải

Kẻ $EF \perp BH$ thì $EF = \dfrac{AH}{2}$.

Do $EF \parallel CH$: $\dfrac{CH}{EF} = \dfrac{OC}{OE}$.

Áp dụng tính chất phân giác trong ΔAEC, ta có :

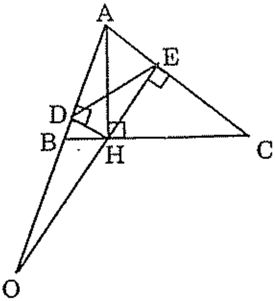
$$\frac{OC}{OE} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{CH}{EF} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{CH}{2EF} = \frac{AC}{2AE} \Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AB}$$

Vậy $AB.CH = AC.AH$

$\Rightarrow AB.BC\cos C = AC.AB\cos A \Rightarrow$ (đpcm).

37. Cho tam giác ABC nhọn, kẻ đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC. Chứng minh rằng : $DE = AH\sin A$.

Giải



Xét ΔODE và ΔOHA có : $\widehat{AOE}$ chung

và $\dfrac{OD}{OH} = \dfrac{OE}{OA}$.

Do đó $\Delta ODE \backsim \Delta OHA$ (c.g.c) $\Rightarrow \dfrac{DE}{AH} = \dfrac{OE}{OA}$

Mà $\sin A = \dfrac{OE}{OA}$. Do đó $\dfrac{DE}{AH} = \sin A$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

38. a) Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau. Chứng minh rằng : $\cot B + \cot C \ge \dfrac{2}{3}$.

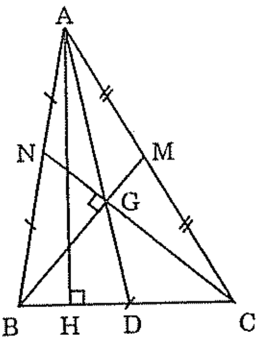
(Đề thi học sinh giỏi giải Lê Quý Đôn, Quận 5 – TP. Hồ Chí Minh, năm học 1995 – 1996)

b) Cho tam giác ABC nhọn, biết AB = c, CA = b, BC = a. Chứng minh rằng

1) $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{b+c}$; 2) $\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A+B}{2} \le \dfrac{1}{8}$.

(Đề thi học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011)

Giải



a) Kẻ $AH \perp BC$, gọi D là giao điểm của AG và BC

$$\cot B + \cot C = \frac{BH}{AH} + \frac{CH}{AH} = \frac{BC}{AH} \ge \frac{BC}{AD} = \frac{2GD}{3GD}$$

$$\Rightarrow \cot B + \cot C \ge \frac{2}{3}$$

b) 1) Xem bài 199a)

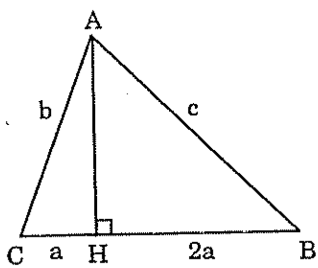
2) $\sin\dfrac{A}{2} = \sin(90^\circ - \dfrac{B+C}{2}) = \cos\dfrac{B+C}{2}$

Tiếp tục, xem bài 199b)

39. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, kẻ đường cao AH, biết BH = 2a ; CH = a. Tính AH theo a.

(Đề kiểm tra đội tuyển học sinh giỏi Toán 9, Quận Tân Bình, năm học 2000 – 2001)

Giải



$BH = 2a > CH = a \Rightarrow \widehat{C} > \widehat{B}$

$\Rightarrow \widehat{C} > 60^0 > \widehat{CAH}$.

Đặt $AH = x \Rightarrow a < x$.

Ta có : $AH.BC = AC.AB\sin 60^\circ$ ($= 2S_{ABC}$)

$$\Leftrightarrow \quad 3ax = \sqrt{(a^2+x^2)(x^2+4a^2)}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\,ax = \sqrt{x^4 + 5a^2x^2 + 4a^4}$$

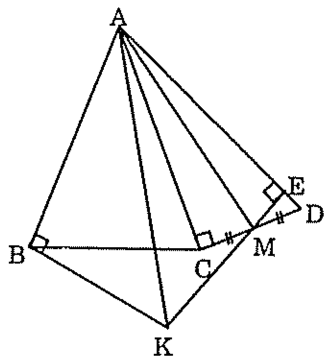
$$\Leftrightarrow \quad x^4 - 7a^2x^2 + 4a^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 - \frac{7}{2}a^2\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{33}a^2}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{7+\sqrt{33}}{2}a^2 \\ x^2 = \dfrac{7-\sqrt{33}}{2}a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}a \text{ (nhận)} \\ x = \dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}a < a \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy $AH = \dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}a$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Trong tam giác ABC cân tại A, trên đường thẳng vuông góc với AC tại C lấy điểm D bất kì (B, D khác phía so với AC). Gọi K là giao điểm của đường thẳng qua B vuông góc với AB và đường thẳng qua trung điểm M của CD vuông góc với AD. So sánh CB, KD ?



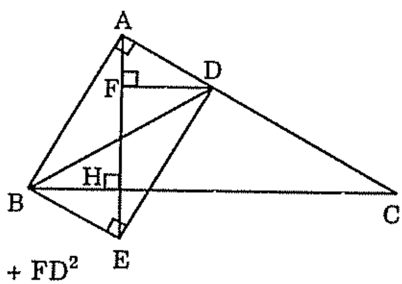
Giải

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có :

$$BK^2 = AK^2 - AB^2 = AE^2 + EK^2 - AC^2$$
$$= AE^2 + EK^2 - (AM^2 - MC^2)$$
$$= EK^2 + MD^2 - (MA^2 - EA^2) = EK^2 + MD^2 - ME^2 = KD^2.$$

2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Lấy D thuộc cạnh AC, điểm E thuộc tia đối của tia HA sao cho $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{HE}{HA} = \dfrac{1}{3}$.

Chứng minh rằng $\widehat{BED} = 90°$.



Giải

Kẻ $DF \perp AH \Rightarrow FD \parallel HC$.

Áp dụng định lí Ta–lét :

$$\frac{AF}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow AF = HE$; $HA = EF$.

Ta có : $BE^2 + ED^2 = HE^2 + HB^2 + FE^2 + FD^2$

$$= AF^2 + HB^2 + HA^2 + FD^2$$
$$= (AF^2 + FD^2) + (HA^2 + HB^2) = AD^2 + AB^2 = BD^2$$

$\Rightarrow \Delta BED$ vuông tại E.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC), kẻ đường cao AH.

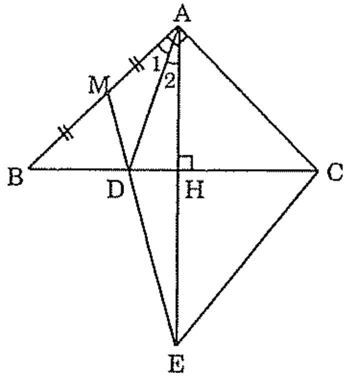
a) Chứng minh : $\dfrac{AB^2}{BH} = \dfrac{AC^2}{CH}$.

b) Vẽ AD là tia phân giác $\widehat{BAH}$ (D ∈ BH). Chứng minh tam giác ACD cân.

c) Tính AH trong trường hợp $S_{ABH} = 15,36\ (cm^2)$; $S_{AHC} = 8,64\ (cm^2)$.

d) Gọi M là trung điểm AB, E là giao điểm của hai đường thẳng MD và AH. Chứng minh rằng CE // AD.

Giải



a) $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{BH}{CH} \Rightarrow \dfrac{AB^2}{BH} = \dfrac{AC^2}{CH}$.

b) $\widehat{DAC} = \widehat{ADC}$ (cùng phụ $\widehat{A}_2$)

$\Rightarrow \Delta DAC$ cân tại C.

c) $AH^4 = 4,8^4 \Rightarrow AH = 4,8$ (cm).

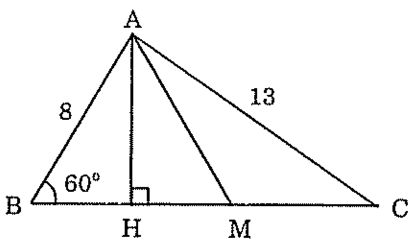
d) Dễ dàng chứng minh : $\widehat{CEH} = \widehat{DAH}$ mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow$ CE // AD.

4. a) Cho $\sin x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Không tính góc nhọn x hãy tính giá trị biểu thức M $= \dfrac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$.

b) Cho tam giác ABC, đường cao AH có $\widehat{B} = 60^\circ$, AB = 8cm, AC = 13cm. Kẻ đường trung tuyến AM. Giải tam giác vuông HAC và tính $\widehat{MAH}$.

Giải

a) M = 8.



b) $AH = AB\sin 60^\circ = 8.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 11$.

$\sin C = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{4\sqrt{3}}{13} \Rightarrow \widehat{C} = 32^\circ 12'$

$\Rightarrow \widehat{HAC} = 57^\circ 48'$.

$$BH = 4 \Rightarrow HM = BM - BH = \frac{BC}{2} - BH = 7,5 - 4 = 3,5$$

$\Rightarrow \tan\widehat{HAM} = \dfrac{HM}{AH} = \dfrac{7}{2.11} = \dfrac{7}{22} \Rightarrow \widehat{HAM} = 17^\circ 39'$.

5. a) Không dùng bảng số và máy tính hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần

cos55°, sin27°, cos31°, cos39°, sin65°, cotg24°, tg65°.

b) Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 21cm, BC = 35cm. Kẻ đường cao AH, đường phân giác AD.
Giải tam giác vuông ABC. Tính AH, AD.

Giải

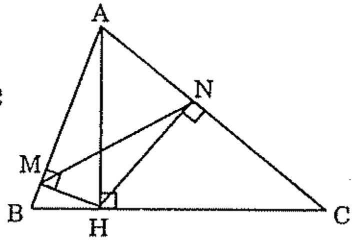
Áp dụng hàm sin, hàm tang là hàm đồng biến khi $0° < \alpha < 90°$ và tỉ số lượng giác hai góc phụ nhau.

6. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu H trên AB, AC. Chứng minh rằng :

a) $AM.AB = AN.AC$ và $AH = \dfrac{BC}{\cot B + \cot C}$.

b) $S_{AMN} = \sin^2 B.\sin^2 C.S_{ABC}$.

Giải



a) $AM.AB = AN.AC$ $(= AH^2)$

$BC = BH + HC = AH\cot B + AH\cot C$

$\Rightarrow AH = \dfrac{BC}{\cot B + \cot C}$

b) $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{AN}{AB}.\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AH^2}{AB^2}.\dfrac{AH^2}{AC^2}$

$= \sin^2 B \sin^2 C$.

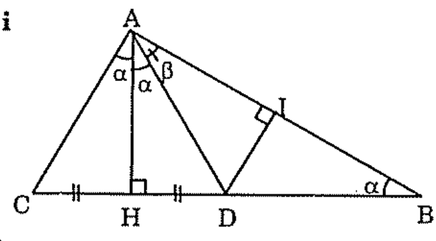
7. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC) đường cao AH. Dựng D là điểm đối xứng của C qua H.

a) Chứng minh : $AH^2 = HB.HD$.

b) Vẽ $DI \perp AB$ $(I \in AB)$. Cho biết $\hat{B} = \alpha$; $\widehat{BAD} = \beta$.

Chứng minh rằng $\sin\beta = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Giải



ΔACD cân tại A nên $\widehat{HAC} = \widehat{HAD}$.

Lại có $\widehat{HAC} = \hat{B} = \alpha$

$\Rightarrow\ 2\alpha + \beta = 90° \ \Rightarrow\ \cos 2\alpha = \sin\beta$

ID // AC : $\dfrac{ID}{AD} = \dfrac{ID}{AC} = \dfrac{BD}{BC} = \sin\beta$.

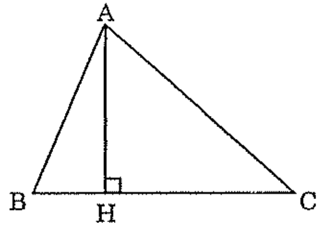
$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{BH^2}{AB^2} - \dfrac{AH^2}{AB^2} = \dfrac{BH^2}{BH.BC} - \dfrac{CH.BH}{BC.CH}$

$= \dfrac{BH}{BC} - \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{BD}{BC} = \cos 2\alpha$.

8. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng :

$\cot gB + \cot gC + \cot gA = \dfrac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4S}$ (S : là diện tích của ΔABC).

Giải



Kẻ $AH \perp BC$:

$$\cot B + \cot C = \frac{BC}{AH} = \frac{BC^2}{AH.BC} = \frac{BC^2}{2S}$$

Tương tự : $\cot B + \cot A = \dfrac{AB^2}{2S}$;

$$\cot A + \cot C = \frac{AC^2}{2S}.$$

Cộng các đẳng thức ta được điều phải chứng minh.

9. Cho tam giác ABC nhọn có H là giao điểm ba đường cao AD, BE, CF.

a) Chứng minh rằng : $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ và $S_{AEF} = S_{BCEF}$ trong trường hợp $\widehat{A} = 45^o$.

b) Chứng minh rằng : $EF = AH\sin A$ và $\dfrac{S_{HBC}}{\tan A} = \dfrac{S_{HAC}}{\tan B} = \dfrac{S_{HAB}}{\tan C}$.

Giải

a) $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c.g.c).

Nếu $\widehat{A} = 45^o$; $S_{AEF} = \cos^2 A.S_{ABC} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$

Vậy $S_{AEF} = S_{BCEF}$.

b) $\Delta BEF \backsim \Delta BHA$ (c.g.c) $\Rightarrow EF = \dfrac{BE}{AB}.AH = AH\sin A$.

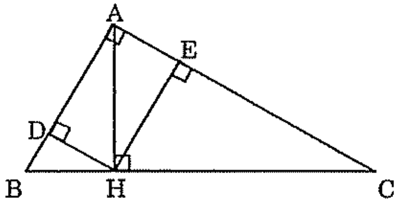
$$\frac{S_{HBC}}{S_{HAC}} = \frac{BF}{AF} = \frac{CF}{AF} : \frac{CF}{BF} = \frac{\tan A}{\tan B} \Rightarrow \frac{S_{HBC}}{\tan A} = \frac{S_{HAC}}{\tan B}$$

Lí luận tương tự ta được điều phải chứng minh.

10. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH, gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

Chứng minh rằng : $\sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2} = \sqrt[3]{BC^2}$.

Giải



$BD = BH\cos B = AB\cos^2 B = BC\cos^3 B$

$\Rightarrow BD^2 = BC^2\cos^6 B$

$\Rightarrow \sqrt[3]{BD^2} = \cos^2 B\sqrt[3]{BC^2}$.

Tương tự, $\sqrt[3]{CE^2} = \cos^2 C\sqrt[3]{BC^2}$

$= \sin^2 B\sqrt[3]{BC^2}$.

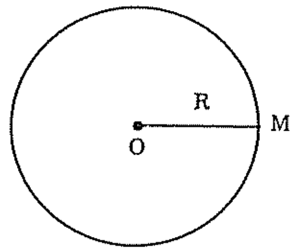
Suy ra : $\sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2} = \sqrt[3]{BC^2}(\sin^2 B + \cos^2 B) = \sqrt[3]{BC^2}$.

Chương II. ĐƯỜNG TRÒN

§1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CUNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Đường tròn tâm O, bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R
2. Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.
3. Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó. Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường thẳng chứa đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.



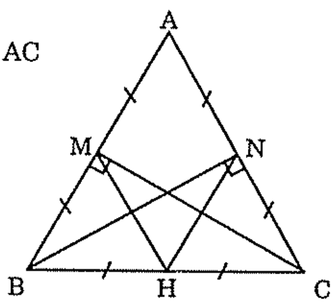
4. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.
   - Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.
5. Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.
6. Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
7. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Cho tam giác đều ABC. Gọi M, H, N lần lượt là trung điểm của ba cạnh AB, BC, CA. Chứng minh bốn điểm B, M, N, C nằm trên một đường tròn có tâm là H.

Giải



Ta có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC

$\Rightarrow$ hai trung tuyến CM và BN trở thành hai đường cao của tam giác ABC.

Xét ΔBMC vuông tại M, có MH là đường trung tuyến

$\Rightarrow HM = HB = HC.$ (1)

Xét ΔBNC vuông tại N, có NH là đường trung tuyến $\Rightarrow$ $HN = HB = HC.$ (2)

Từ (1) và (2) có $HB = HM = HN = HC$

$\Rightarrow$ B, M, N, C cùng thuộc đường tròn (H ; HB).

2. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi M, N, H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh rằng tứ giác MNHK là hình chữ nhật.

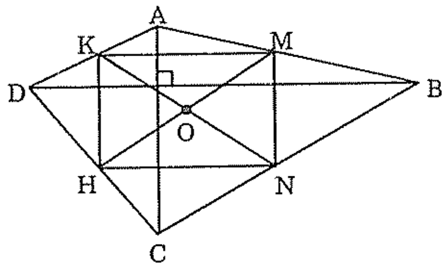
b) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, H, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Tính bán kính đường tròn đó khi biết AC = 12cm và BD = 16cm.

Giải

a) Ta có M, N, H, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

Do đó MN, NH, HK, KM lần lượt là các đường trung bình của các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB



$\Rightarrow$ KM // DB và KH // AC (tính chất đường trung bình của tam giác)

mà DB $\perp$ AC

$\Rightarrow$ KM $\perp$ KH nên $\widehat{MKH} = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{KHN} = \widehat{HNM} = 90^\circ$.

Vậy tứ giác MNHK là hình chữ nhật.

b) Gọi O là giao điểm của KN và HM.

Ta có : OM = ON = ON = OK (tính chất hình chữ nhật)

$\Rightarrow$ M, N, H, K cùng thuộc đường tròn (O ; OM)

c) Theo tính chất đường trung bình của tam giác. Ta có :

$$KM = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}.16 = 8\,(cm);\ KH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}.12 = 6(cm).$$

ΔMKH vuông tại K $\Rightarrow HM^2 = KM^2 + KN^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

nên HM = 10 (cm). Bán kính đường tròn này là 10 : 2 = 5 (cm).

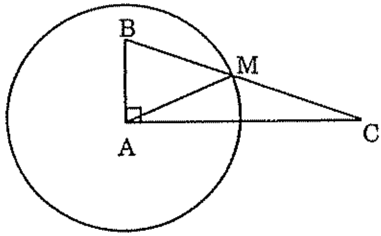
3. Cho tam giác ABC vuông tại A có các cạnh AB = 5cm, AC = 12cm và BC = 13cm. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Hãy xác định vị trí của mỗi điểm B, M, C đối với đường tròn tâm A bán kính 6,5cm.

Giải

ΔABC vuông tại A, ta có :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

nên BC = 13 (cm)



ΔABC vuông tại A, có AM là trung tuyến

$\Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.13 = 6,5\,(cm).$

AB = 5cm < 6,5cm nên B nằm trong đường tròn (A).

AM = 6,5cm nên M nằm trên đường tròn (A).

AC = 13cm > 6,5cm nên C nằm ngoài đường tròn (A).

4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AD. Gọi H là giao điểm hai đường cao BE và CF của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng tứ giác BHCD là hình bình hành.

b) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh AH = 2OI.

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh G cũng là trọng tâm tam giác AHD.

Giải

a) ΔABD và ΔACD nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD.

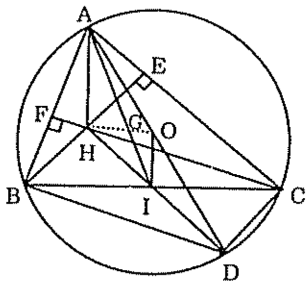
$\Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại B và ΔACD vuông tại C.

Ta có : $AB \perp BD$ và $AB \perp CH$ (vì CF là đường cao)

suy ra $BD \parallel CH$.

Chứng minh tương tự có $BH \parallel DC$.

Do đó BHCD là hình bình hành.



b) Ta có I là trung điểm của BC.

$\Rightarrow$ I là trung điểm của HD.

Vì O là trung điểm của AD (OA = OD)

nên OI là đường trung bình của ΔAHD.

Vậy AH = 2OI.

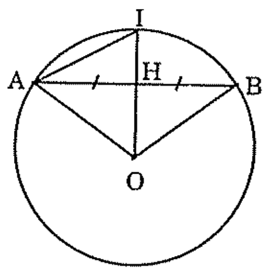
c) ΔABC có AI là đường trung tuyến, G là trọng tâm (gt)

$\Rightarrow$ G thuộc đoạn thẳng AI và $AG = \dfrac{2}{3}AI$.

ΔAHD có AI là đường trung tuyến, có G thuộc đoạn thẳng AI và $AG = \dfrac{2}{3}AI \Rightarrow$ G là trọng tâm của ΔAHD.

5. Cho đường tròn (O ; 5cm) và một dây cung AB = 8cm. Gọi H là trung điểm của AB. Tia OH cắt cung AB tại I. Tính độ dài dây cung AI.

Giải



AB = 8cm < 10cm nên AB không là đường kính của đường tròn (O)

mà H là trung điểm của AB (gt)

$\Rightarrow OH \perp AB$ (định lí đường kính đi qua trung điểm dây cung)

$\Rightarrow AH = \dfrac{AB}{2} = 4$ (cm).

ΔAHO vuông tại H, theo định lí Py-ta-go, ta có : $OA^2 = OH^2 + HA^2$

$\Rightarrow OH^2 = OA^2 - HA^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ nên OH = 3 (cm).

Do đó IH = OI – OH = 5 – 3 = 2 (cm).

ΔAHI vuông tại H, theo định lí Py-ta-go có :

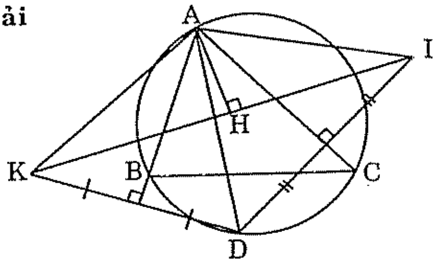
$$AI^2 = AH^2 + HI^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow AI = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}.$$

6. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tâm O. D là điểm tuỳ ý trên cung BC không chứa điểm A. Gọi K và I lần lượt là điểm đối xứng với D qua AB và AC.

a) Chứng minh rằng KI = 2ADsinBAC

b) Xác định vị trí của D để tam giác AKI có chu vi đạt giá trị lớn nhất.

Giải



a) Kẻ AH ⊥ KI tại H, ta có :

$AK = AD = AI$;

$\widehat{KAI} = 2\widehat{BAC}$

$KI = 2KH = 2AK\sin\widehat{KAH}$

$= 2AD\sin\widehat{BAC}$

$\Rightarrow CV(AKI) = AK + AI + KI$

$= AD + AD + 2AD\sin BAC = 2AD(1 + \sin\widehat{BAC})$.

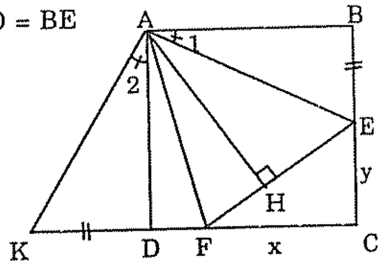
b) $AD \le 2R$.

7. Cho hình vuông ABCD, E và F lần lượt là hai điểm di động trên BC, DC sao cho $\widehat{FAE} = 45^\circ$. Kẻ AH ⊥ EF.

a) Chứng minh rằng H thuộc một đường tròn cố định.

b) Xác định vị trí của E, F để S_{AMN} đạt giá trị lớn nhất.

Giải



a) Dựng K thuộc tia đối của tia DC : KD = BE

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ADK$ (c.g.c)

$\Rightarrow AK = AE$ và $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

Suy ra $\widehat{EAF} = \widehat{KAF} = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta AFK = \Delta AFE$ (c.g.c)

$\Rightarrow AH = AD = a$.

Vậy $H \in (A ; a)$

b) Đặt CF = x ; CF = y (0 < x ; y < a).

Dễ dàng thấy $CF + CE + EF = 2a$; $MN = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow \; x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$.

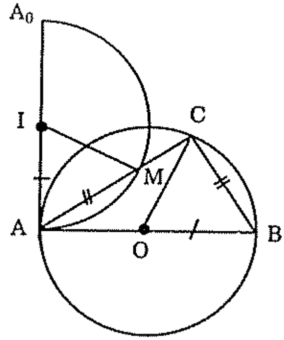
Ta có $\sqrt{x^2 + y^2} \ge \sqrt{2xy} \Rightarrow 2a = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \ge 2\sqrt{xy} + \sqrt{2xy}$

$\Rightarrow \sqrt{xy} \le \dfrac{2a}{2 + \sqrt{2}}$ hay $xy \le \left(\dfrac{2a}{2 + \sqrt{2}}\right)^2$.

Do đó : $S = \dfrac{1}{2}xy \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a}{2 + \sqrt{2}}\right)^2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AM = AN = \dfrac{2a}{2 + \sqrt{2}}$.

8. Cho đường tròn O đường kính AB cố định. Lấy C là một điểm tùy ý trên đường tròn. Trên tia AC, lấy điểm M sao cho AM = BC. Khi C chạy trên đường tròn (O) thì điểm M di động trên đường cố định nào ?



Giải

Kẻ $Ax \perp AB$, dựng $I \in Ax : AI = R$

$\Rightarrow$ I cố định $\Rightarrow \Delta IAM = \Delta OBC$ (c.g.c) $\Rightarrow IM = R$.

Vậy M thuộc nửa đường tròn đường kính AA_0.

BÀI TẬP NÂNG CAO

9. Qua một điểm M cố định bên trong đường tròn (O ; R) vẽ hai dây cung AB, CD vuông góc với nhau. Chứng minh rằng :

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ không đổi.

b) $AB^2 + CD^2$ không đổi.

Giải

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4R^2$.

b) $CD^2 + AB^2 = 4(CH^2 + AK^2) = 4(R^2 - OH^2 + R^2 - OK^2) = 4(2R^2 - OM^2)$.

10. Cho trong mặt phẳng 2010 điểm. Chứng minh ta có thể vẽ được một đường tròn chứa 1005 điểm thuộc miền trong, còn lại 1005 điểm kia thuộc miền ngoài của đường tròn.

Giải

Qua hai điểm ta nối được một đoạn thẳng. Số đoạn thẳng nối được là 1005.2009 (đoạn). Vẽ đường trung trực tất cả các đoạn thẳng trên.

Lấy điểm O không thuộc bất kì trung trực nào trong số các đường trung trực trên. Ta nối O với 2010 điểm ta được 2010 khoảng cách :

$$d_1 < d_2 < \ldots < d_{1005} < d_{1006} < \ldots < d_{2010}.$$

Chọn R thoả $d_{1005} < R < d_{1006}$.

Đường tròn (O ; R) thoả yêu cầu bài toán.

11. Cho hai điểm A, B ở ngoài đường tròn (O). Hãy dựng một đường kính CD sao cho CA = CB.

Giải

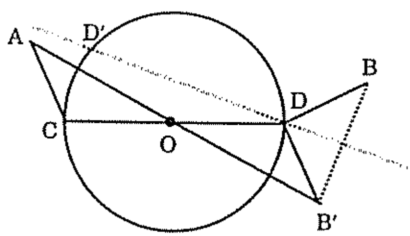
Ta có : C, D đối xứng qua O.

Dựng B' đối xứng A qua O

$\Rightarrow$ B'D đối xứng với AC qua O

$\Rightarrow CA = DB' \Rightarrow DB = DB'$.

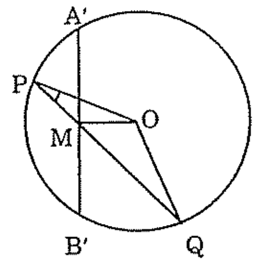
Suy ra : D nằm trên trung trực d của BB', từ đó suy ra cách dựng.



12. a) Cho đường tròn (O ; R) và điểm M nằm trong đường tròn (M ≠ O). Dựng điểm P trên đường tròn sao cho góc $\widehat{OPM}$ lớn nhất.

b) Cho đường tròn (O ; R), hai đường kính AB và CD vuông góc nhau. Xác định vị trí điểm M trên đường tròn (O) sao cho MA.MB.MC.MD lớn nhất.

Giải



a) Xét dây PQ bất kì qua M.

ΔOPQ có $OP = OQ = R$,

nên góc đáy $\widehat{OPM}$ lớn nhất

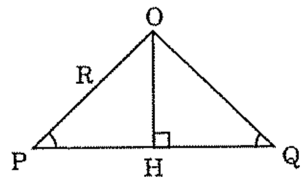
⇔ góc đỉnh $\widehat{POQ}$ nhỏ nhất

⇔ PQ nhỏ nhất.

Thật vậy :

$$PQ = 2PH = 2R\sin\widehat{HOP}$$

$$= 2R\sin\frac{\widehat{POQ}}{2}.$$



PQ nhỏ nhất ⇔ $\widehat{POQ}$ nhỏ nhất.

Dựng dây $A'B' \perp OM$ tại M

⇒ $P \equiv A'$ hoặc $P \equiv B'$.

b) Xét M thuộc cung AC.

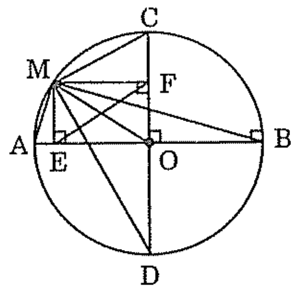
Vẽ $ME \perp AB$ tại E, $MF \perp CD$ tại F.

Chứng minh được ME.AB = MA.MB ;

MF.CD = MC.MD ; $ME^2 + MF^2 = R^2$.

Do đó $MA.MB.MC.MD = 4R^2.ME.MF$

$$\le 4R^2.\frac{ME^2 + MF^2}{2} = 2R^4.$$



BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

13. Trong các hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn thì hình nào có chu vi lớn nhất.

(Đề kiển tra đội tuyển Toán lớp 9, trường THCS Nguyễn Du, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1997 – 1998)

Giải

Đặt PQ = 2a, MQ = b (a, b > 0), ta có :

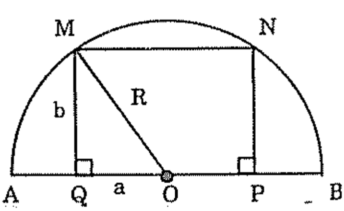
$a^2 + b^2 = R^2$.

Chu vi hình chữ nhật MNPQ là :

$P = 2(2a + b)$.

Lại có $(2a + b)^2 \le (2^2 + 1^2)(a^2 + b^2) = 5R^2$.

Vậy : GTLN của $P = 2R\sqrt{5}$

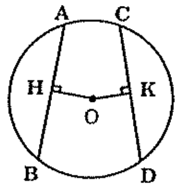


tại $a = R\sqrt{5}$; $b = \dfrac{R\sqrt{5}}{2}$

ứng với $\tan\widehat{AOM} = \dfrac{1}{2}$ (điểm M được xác định).

§2. LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

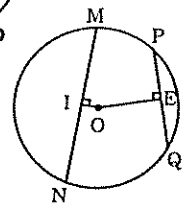


1. Trong một đường tròn

– Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

– Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

2. Trong hai dây của một đường tròn



– Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

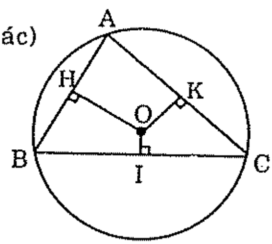
– Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\widehat{A} = 80^\circ$; $\widehat{B} = 60^\circ$. Hãy sắp thứ tự các khoảng cách từ tâm O đến các cạnh AB, BC, CA.

Giải



Ta có : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (tổng ba góc của tam giác)

nên $80^\circ + 60^\circ + \widehat{C} = 180^\circ$

hay $\widehat{C} = 40^\circ$.

Kẻ $OH \perp AB$ tại H, $OI \perp BC$ tại I, $OK \perp AC$ tại K

Xét ΔABC có : $\widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$ (vì $40^\circ < 60^\circ < 80^\circ$)

$\Rightarrow AB < AC < BC$ (quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác)

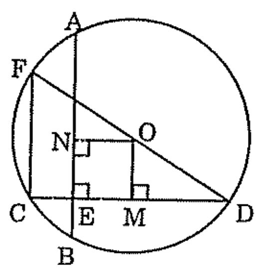
$\Rightarrow OH > OK > OI$ (định lí liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm).

15. Cho đường tròn (O) có hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại E, CE = 4cm, ED = 28cm.

a) Tính khoảng cách từ O đến mỗi dây.

b) Vẽ đường kính DF của đường tròn (O). So sánh hai khoảng cách từ tâm O đến hai dây cung CF và AB.

Giải



a) Kẻ $OM \perp CD$ tại M, $ON \perp AB$ tại N, ta có :

$CD = CE + ED = 4 + 28 = 32$ (cm) ;

$CM = \dfrac{CD}{2} = 16$ (cm);

$EM = CM - CE = 12$ (cm).

Vì CD = AB nên OM = ON.

Tứ giác ENOM là hình chữ nhật, có OM = ON nên là hình vuông.

Vậy OM = ON = EM = 12 (cm).

b) Ta có : $OM \perp CD \Rightarrow MC = MD$ (định lí đường kính vuông góc dây cung).

Do đó OM là đường trung bình của ΔFCD

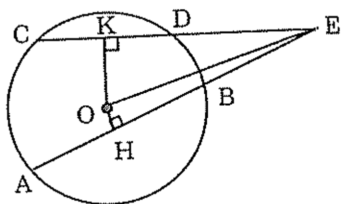
$\Rightarrow FC = 2.OM = 2.12 = 24$ (cm).

Vì FC < AB (24cm < 32cm ; AB = CD)

nên khoảng cách từ tâm O đến dây cung FC lớn hơn khoảng cách từ tâm O đến dây AB (định lí liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm).

16. Cho đường tròn tâm (O) có hai dây AB và CD sao cho CD < AB. Các tia AB và CD cắt nhau tại E nằm ngoài đường tròn. Chứng minh EC < EA.

Giải



Kẻ $OH \perp AB$ tại H, $OK \perp CD$ tại K, CD < AB

$\Rightarrow OK > OH$.

Ta có : $OH^2 + HE^2 = OK^2 + KE^2$

$(= OE^2)$ nên KE < HE

mà KC < HA nên KE + KC < HE + HA.

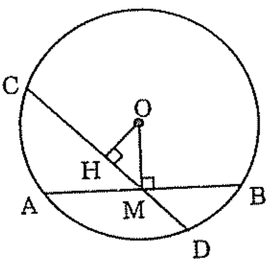
Vậy EC < EA.

17. Cho đường tròn tâm O có bán kính 10cm, điểm M cách điểm O là 6cm. Vẽ dây cung AB vuông góc với OM tại M, CD là dây cung bất kì (khác AB) đi qua M.

a) Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M.

b) Tính độ dài dây dài nhất đi qua M.

Giải



a) Kẻ $OH \perp CD$ tại H, ta có :

OH < OM (cạnh góc vuông và cạnh huyền trong ΔOHM vuông tại H)

$\Rightarrow$ CD > AB (định lí liên hệ dây cung và khoảng cách đến tâm).

ΔOMB vuông tại M $\Rightarrow OB^2 = OM^2 + MB^2$

nên $MB^2 = OB^2 - OM^2 = 10^2 - 6^2 = 64$ hay MB = 8 (cm).

Vậy dây ngắn nhất đi qua M là dây vuông góc với OM tại M và AB = 16cm.

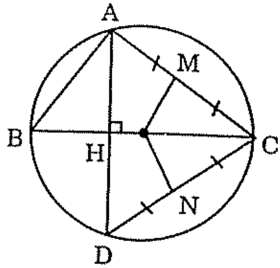
b) Dây dài nhất đi qua M là đường kính và độ dài là 20cm.

18. Cho đường tròn (O) đường kính BC vuông góc với dây cung AD tại H (H không trùng O).

a) Chứng minh rằng $4HB.HC = AD^2$.

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và DC. So sánh OM và ON.

Giải



a) Ta có BC là đường kính (gt)

nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$

và $HA = HD = \dfrac{AD}{2}$ (đường kính vuông góc dây cung).

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác BAC vuông tại A, có :

$$HB.HC = HA^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \frac{AD^2}{4} \Rightarrow 4HB.HC = AD^2.$$

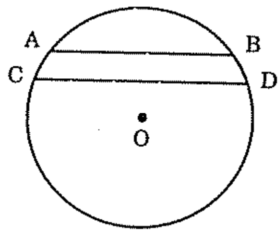
b) Xét ΔADC có CH vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên ΔADC cân tại C. Do đó CA = CD.

Vì M và N lần lượt là trung điểm của AC và DC

$\Rightarrow OM \perp AC$ tại M và $ON \perp DC$ tại N.

Vậy OM = ON (định lí liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm).

19. Cho hình vẽ sau, biết AB, CD là hai dây cung song song với nhau, AB = 80cm, CD = 96cm, bán kính của đường tròn (O) là 50cm. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.



Giải

Kẻ $OE \perp AB$ tại E, $OF \perp CD$ tại F

mà AB // CD nên O, F, E thẳng hàng

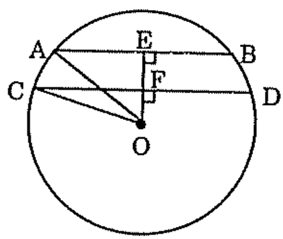
$OE^2 = OA^2 - AE^2 = 50^2 - 40^2$

$= 30^2$ nên OE = 30 (cm).

$OF^2 = OC^2 - CF^2 = 50^2 - 48^2$

$= 14^2$ nên OF = 14 (cm).

EF = OE – OF = 30 – 14 = 16 (cm).



20. Cho đường tròn (O ; R) và hai dây AB, CD trong đó $CD = R\sqrt{3}$.

a) Hãy so sánh diện tích của tam giác AOB và tam giác COD nếu $AB = R\sqrt{2}$.

b) Hãy xác định độ dài AB sao cho AB < CD mà $S_{AOB} = S_{COD}$.

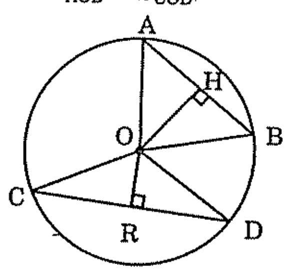
Giải

a) Kẻ $OH \perp AB$ tại H ; $OK \perp CD$ tại K.

$\Rightarrow OH = HB = HA = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$; $OK = \dfrac{R}{2}$.

Vậy $S_{OAB} = \dfrac{R^2}{2}$; $S_{COD} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow S_{OAB} > S_{OCD}$.



ı) $\sin\widehat{COK} = \dfrac{CK}{OC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{COK} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 120^\circ$

$$\Rightarrow S_{COD} = \frac{R^2}{2}.\sin 60^\circ.$$

Gọi góc nhọn giữa hai đường thẳng OA, OB là α. Ta có : $S_{OAB} = \dfrac{R^2}{2}\sin\alpha$

Vì $S_{OAB} = S_{OCD} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{AOB}$ bằng 60° hoặc 120°. Để AB < CD, ta chọn $\widehat{AOB} = 60^\circ$

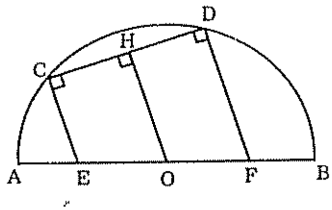
$\Rightarrow \Delta OAB$ đều $\Rightarrow AB = OA = R < CD$.

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, dây CD không cắt AB. Các đường vuông góc với CD tại C và D cắt AB tại E và F.

ı) Chứng minh rằng E và F đối xứng nhau qua O

ɔ) Tính S_{CDFE} biết AB = 50cm ; CD = 14cm.

Giải



ı) Kẻ OH ⊥ CD tại H

$\Rightarrow HC = HD$.

Ta có : OH // OC // OD, HC = HD

$\Rightarrow$ OE = OF.

ɔ) OH = 24cm ;

$S_{CDFE} = 336\ (cm^2)$.

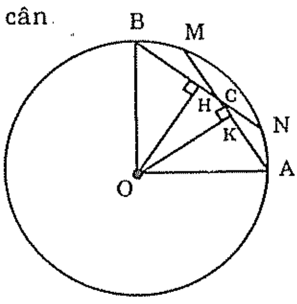
BÀI TẬP NÂNG CAO

Cho (O ; R) và hai bán kính OA và OB vuông góc nhau. Vẽ dây AM và BN bằng nhau đồng thời cắt nhau tại C ở trong (O) (M, N ∈ cung nhỏ AB).

a) Chứng minh : OC ⊥ AB.

b) Chứng minh tứ giác ANMB là hình thang cân.

Giải



a) Kẻ OH ⊥ BN tại H, OK ⊥ AM tại K.

AM = BN (gt)

$\Rightarrow$ OH = OK

$\Rightarrow$ OC là tia phân giác $\widehat{AOB}$

mà OA = OB = R $\Rightarrow$ OC ⊥ AB.

b) Dễ dàng chứng minh MN // AB

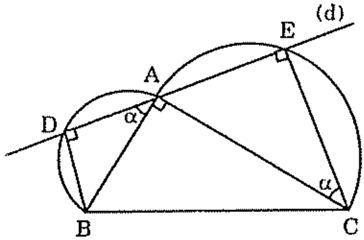
mà AM = BN (gt) $\Rightarrow$ ANMB là hình thang cân.

Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ các nửa đường tròn đường kính AB và AC ở phía ngoài tam giác ABC. Qua A kẻ đường thẳng d cắt nửa đường tròn nói trên lần lượt tại D và E.

Xác định vị trí của d để chu vi tứ giác BCDE đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Đặt $\widehat{BAD} = \alpha \Rightarrow \widehat{ACE} = \alpha$.



Gọi P là chu vi hình thang, ta có :

$$P = BC + CE + EA + BD + AD$$
$$= BC + (AB + AC)(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Lại có $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 \leq 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2$

$\Rightarrow \sin\alpha + \cos\alpha \leq \sqrt{2}$.

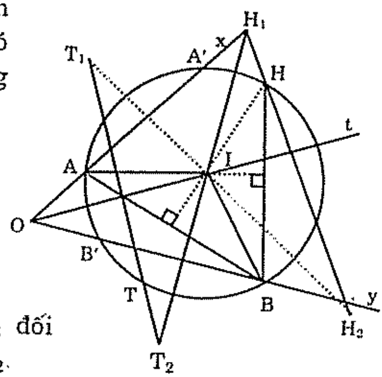
Vậy $P \leq BC + (AB + AC)\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$.

24. Cho $\widehat{xOy} = 60^\circ$. Lấy điểm I cố định trên tia phân giác Ot của $\widehat{xOy}$ làm tâm vẽ đường tròn sao cho nó cắt Ox tại A, Oy tại B (A, B không đối xứng nhau qua Ot). Kẽ ID ⊥ Ox, IE ⊥ Oy.

a) Chứng minh DA = EB.

b) Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác AIB khi đường tròn tâm I có độ lớn bán kính thay đổi nhưng vẫn cắt các tia Ox, Oy.



Giải

a) Ta chứng minh được AA' = BB'

$\Rightarrow$ AD = BE.

b) Dựng trung trực OI ; T_1, T_2 thuộc trung trực này và $OT_1 = OT_2 = OI$

Quỹ tích của H là đoạn thẳng H_1H_2 đối xứng với T_1T_2 qua I không kể H_1, H_2.

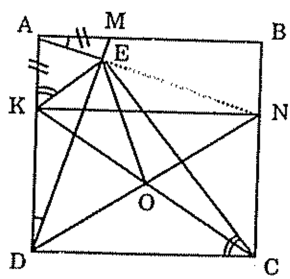
BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

25. Cho hình vuông ABCD, trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M, K sao cho AM = AK. Dựng điểm E thuộc đoạn MD sao cho $\widehat{AKE} = \widehat{DCE}$. Tính số đo góc $\widehat{AEM}$.

(Đề kiểm tra đội tuyển Toán lớp 9, trường THCS Nguyễn Du, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2006 – 2007)

Giải

Dễ dàng chứng minh $\widehat{KEC} = 90^\circ$.



Gọi O là trung điểm KC

$\Rightarrow OE = OD = OK = OC = \dfrac{KC}{2}$

$\Rightarrow$ E, D, K, C thuộc đường tròn đường kính KC.

Gọi N là giao điểm của BC với (O) $\Rightarrow \widehat{KNC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ AK = BN = AM.

Vậy $\Delta AMD = \Delta BNA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{ADM}$

$\Rightarrow AN \perp MD$.

$E \in (O)$ có đường kính ND $\Rightarrow EN \perp DN$. Vậy A, E, N thẳng hàng

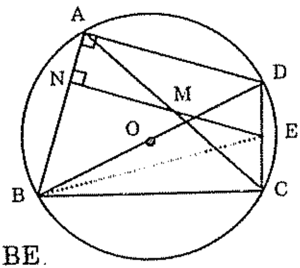
Suy ra $\widehat{AEM} = 90^\circ$.

6. Cho đường tròn (O ; R) và dây cung BC cố định (BC không đi qua tâm O). Điểm A di động trên cung lớn BC. Gọi M là trung điểm AC, N là hình chiếu của M trên AB.

Chứng minh rằng điểm N thuộc một đường cố định khi A di động trên cung lớn BC.

(Đề thi nhận học bổng trường THCS Hoa Lư, Quận 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2008 – 2009)

Giải



Kẻ đường kính BD, ta được D cố định.

Gọi E là giao điểm của MN và CD.

Ta có : $\widehat{BAD} = 90^\circ \Rightarrow AB \perp AD$

$\Rightarrow$ MN // AD

$\Rightarrow$ E trung điểm CD nên E cố định.

Vậy N thuộc đường tròn cố định đường kính BE.

§3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

2.

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
– Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
– Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
– Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

3. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

27. Điền vào các chỗ trống trong bảng sau (R là bán kính của đường tròn, d là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng).

R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
8cm	5cm	....
6cm	....	Tiếp xúc nhau
4cm	5cm	....
....	4cm	Tiếp xúc nhau

Giải

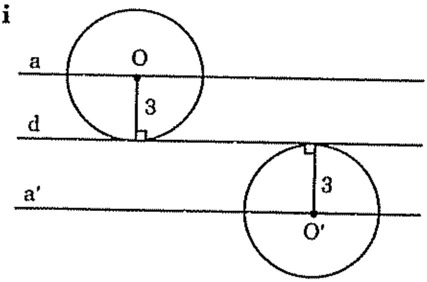
28.

R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
8cm	5cm	Đường thẳng cắt đường tròn
6cm	6cm	Tiếp xúc nhau
4cm	5cm	Đường thẳng không cắt đường tròn
4cm	4cm	Tiếp xúc nhau

29. Cho đường thẳng d. Tâm O của tất cả các đường tròn có bán kính 3cm và tiếp xúc với đường thẳng d nằm trên đường nào ?

Giải

Tâm O của các đường tròn bán kính 3cm và tiếp xúc với đường thẳng d nằm trên hai đường thẳng a và a′ song song với d và cách d là 3cm.



30. Cho điểm I cách đường thẳng d là 4cm. Vẽ đường tròn (I ; 5cm)

a) Chứng minh rằng đường tròn (I) có hai giao điểm với đường thẳng d

b) Gọi hai giao điểm nói trên là B và C. Tính độ dài BC.

Giải

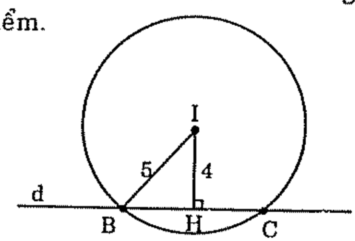
a) Kẻ IH ⊥ d tại H và IH = 4cm. Vì 4cm < 8cm (d < R) nên đường tròn (I) và đường thẳng d có hai giao điểm.

b) ΔIHB vuông tại H, theo định lí Py-ta-go, ta có :

$$IB^2 = IH^2 + HB^2$$

$$\Rightarrow HB^2 = IB^2 - IH^2 = 9$$

nên $HB = 3$ (cm).

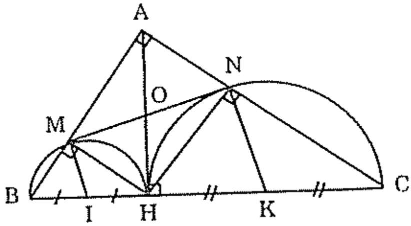


Ta có : $HB = \dfrac{BC}{2}$ (định lí đường kính vuông góc dây cung)

nên $BC = 2HB = 6$ (cm).

Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH. Đường tròn tâm I đường kính BH cắt AB tại M. Đường tròn tâm K đường kính HC cắt AC tại N. Gọi O là giao điểm của AH và MN.
Chứng minh MN là tiếp tuyến của (I) tại M, tiếp tuyến của (K) tại N.

Giải



AMHN là hình chữ nhật vì có ba góc vuông và OA = OM = OH = ON

$\Delta OMI = OHI$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{IMO} = \widehat{IHO} = 90^\circ$.

$\Delta ONK = \Delta OHK$ (c.c.c)

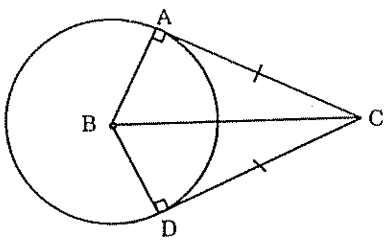
$\Rightarrow \widehat{ONK} = \widehat{OHK} = 90^\circ$.

. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường tròn (B ; BA).

a) Biết AB = 6cm, BC = 10cm. Tính độ dài AC.

b) D là điểm thuộc đường tròn (B) sao cho CD = 8cm. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Giải



a) ΔABC vuông tại A có

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lí Py-ta-go)

$\Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2 = 64$

nên AC = 8 (cm).

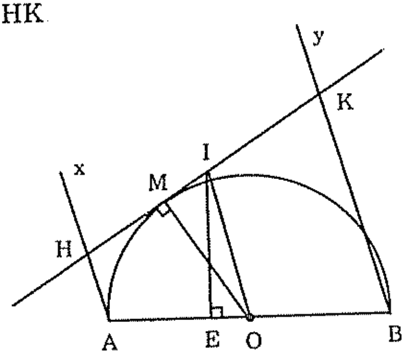
b) $\Delta ABC = \Delta DBC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$

Vậy CD là tiếp tuyến của đường tròn (B)

3. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. M là điểm thuộc nửa đường tròn. Qua M vẽ tiếp tuyến d của nửa đường tròn. Kẻ các tia Ax, By song song với nhau, cắt d lần lượt tại H, K. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính HK.

Giải



Gọi I là trung điểm của HK, kẻ IE ⊥ AB tại E.

Chứng minh được OI // AH

$\Rightarrow S_{OIA} = S_{OHI}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}.IE.OA = \frac{1}{2}.OM.IH$

mà OA = OC (bán kính đường tròn tâm O)

nên IE = IH

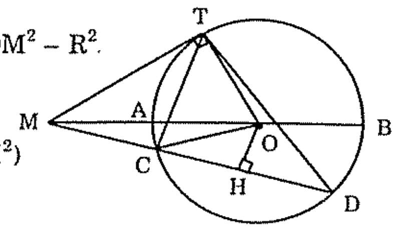
Vậy AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính HK.

34. Qua một điểm M ở ngoài đường tròn (O ; R) ta kẻ cát tuyến MAB qua tâm O và cát tuyến MCD. Kẻ tiếp tuyến MT. Chứng minh rằng :

a) MA.MB = MC.MD và MT^2 = MA.MB

b) $\Delta MTC \backsim \Delta MDT$.

Giải



a) $MA.MB = (OM - OA)(OM + OB) = OM^2 - R^2$.

$MD.MC = (MH - HC)(MH + HD)$

$= MH^2 - HC^2$

$= MH^2 - OH^2 - (OC^2 - OH^2)$

$= OM^2 - R^2$.

Suy ra : MA.MB = MC.MD.

Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác MTO vuông tại T có : $MT^2 + OT^2 = OM^2$.

Do đó $MT^2 = OM^2 - OT^2 = OM^2 - R^2 = MA.MB$.

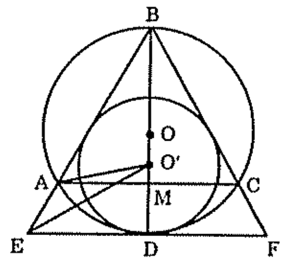
b) $\Delta MTC \backsim \Delta MDT$ (c.g.c).

35. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O ; R)

a) Nêu cách dựng đường tròn (O′) tiếp xúc với các cạnh AB, BC và cung AC của đường tròn đã cho.

b) Tính O′A theo R.

Giải



a) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O ; R) và dựng tiếp tuyến tại D của đường tròn ấy, cắt các tia BA và BC lần lượt ở E ; F. Phân giác $\widehat{BEF}$ cắt BD tạo O′ là tâm đường tròn cần dựng.

b) Gọi M là giao điểm của BD và AC ta có :

$$MD = \frac{R}{2}. \text{ Vậy } O'D = \frac{BD}{3} \text{ ; } O'M = \frac{R}{6}.$$

$$AM = \frac{AC}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \text{ ; } O'A^2 = \frac{7R^2}{9} \Rightarrow O'A = \frac{R\sqrt{7}}{3}.$$

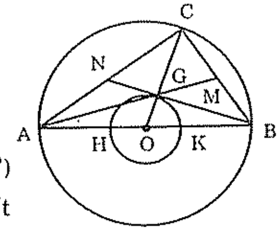
BÀI TẬP NÂNG CAO

36. Cho tam giác ABC có cạnh AB là đường kính cố định của đường tròn (O ; R), đỉnh C di chuyển trên đường tròn đó, AM và BN là các đường trung tuyến.

a) Chứng minh rằng $AM^2 + BN^2$ không đổi và tính tổng theo R.

b) Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải



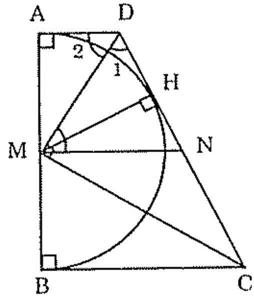
a) $AM^2 + BN^2 = 5R^2$.

b) Tập hợp trọng tâm G của ΔABC là $\left(O\ ;\ \dfrac{R}{3}\right)$

loại trừ hai điểm H, K thuộc AB.

Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$) có $\widehat{CMD} = 90^\circ$, với M là trung điểm AB. Biết AB = 2a.

Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB. Tính tích BC, AD theo a.



Giải

a) Kẻ $OH \perp CD$ tại H, gọi N là trung điểm DC

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình hình thang ABCD $\Rightarrow$ MN // AD.

Vậy $\widehat{NMD} = \widehat{D}_2$.

$NM = DN = \dfrac{DC}{2}$

$\Rightarrow \Delta MND$ cân tại N $\Rightarrow \widehat{M} = \widehat{D}_1$.

Suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \Rightarrow MH \perp MA$, MA là bán kính của (M ; MA)

$\Rightarrow$ CD là tiếp tuyến (M ; MA). 40

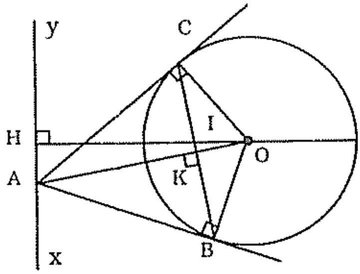
b) $BC.AD = a^2$.

. Cho đường tròn (O ; R) và đường thẳng xy không giao nhau. Kẻ $OH \perp xy$ và lấy điểm A bất kì thuộc xy. Từ A kẻ tiếp tuyến AB, kẻ BK $\perp$ OA ($K \in OA$) cắt đường tròn tại C.

a) Chứng minh AC là tiếp tuyến (O)

b) Chứng minh khi A di động dây BC luôn đi qua một cố định

Giải



a) $\Delta ACO = \Delta ABO$ (c.g.c)

$\Rightarrow AC \perp OC$, $OC = R$

$\Rightarrow$ AC là tiếp tuyến (O ; R).

b) $OI^2 = \dfrac{OB^2}{OH} = \dfrac{R^2}{OH} \Rightarrow$ I cố định

$\Rightarrow$ BC qua điểm I cố định.

I BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

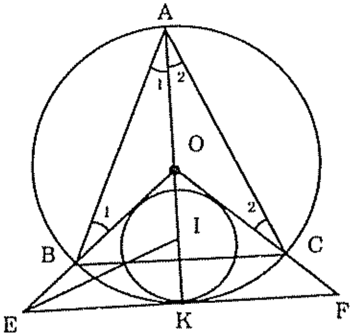
ı. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 45^\circ$ và nội tiếp trong (O ; R).

a) Chứng tỏ AO là phân giác của $\widehat{BAC}$ và ΔBOC vuông cân.

b) Tính độ dài các cạnh của ΔABC theo R.

c) Nêu rõ cách xác định tâm của đường tròn vừa tiếp xúc với hai cạnh của $\widehat{BOC}$ vừa tiếp xúc với đường tròn (O).
Tính bán kính của đường tròn theo R.
(Đề thi vào lớp 10 trường THPT Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh năm học 1992 – 1993)

Giải



a) Hai dây AB và AC bằng nhau nên chúng cách đều tâm ⇒ O thuộc phân giác $\widehat{BAC}$.
$\widehat{BOK} = \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 2\hat{A}_1$.
$\widehat{COK} = 2\hat{A}_2$
$\Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{BOK} + \widehat{COK} = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 90^o$
⇒ ΔBOC vuông cân.

b) $BC = R\sqrt{2}$; $AB = AC = R\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

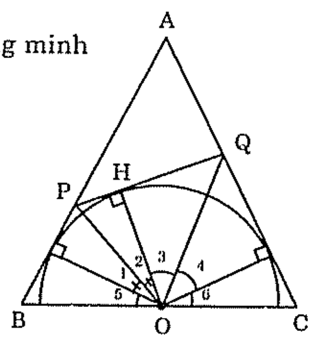
c) Tiếp tuyến của (O) tại K cắt OB ở E và OC tại F. Đường tròn (I) tiếp xúc với hai cạnh của $\widehat{BOC}$ và (O) thì cũng tiếp xúc EF. Tâm I của nó là giao điểm của phân giác $\widehat{OEF}$ với OK.
$$\frac{IO}{IK} = \frac{EO}{EK} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{IO}{\sqrt{2}} = \frac{IK}{1} = \frac{OK}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow IK = (\sqrt{2}-1)R.$$

40. Cho tam giác ABC cân tại A. Dựng nửa đường tròn có tâm O thuộc đoạn BC, tiếp xúc với AB, AC. Gọi P là một điểm trên AB, Q là một điểm trên AC.

Chứng minh rằng : PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O) ⇔ $BP.CQ = \dfrac{BC^2}{4}$.

(Đề thi học sinh giỏi Toán Quốc tế, năm 1979)

Giải



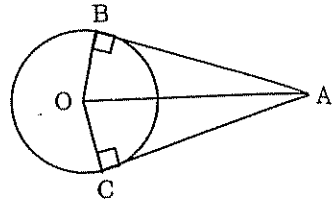
• Giả sử PQ tiếp xúc (O) tại H. Dễ dàng chứng minh
$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$; $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$ và $\hat{O}_5 = \hat{O}_6$
$\Rightarrow \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_6 + \hat{O}_1 + \hat{O}_5 + \hat{O}_4 = 180^o$
$\Rightarrow 2(\hat{O}_1 + \hat{O}_5 + \hat{O}_4) = 180^o$
$\Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_5 = 90^o - \hat{O}_4 \Rightarrow \widehat{POB} = \widehat{OQC}$.
Vậy ΔBOP ∽ ΔCQO (g.g)
$$\Rightarrow \frac{OB}{CQ} = \frac{BP}{OC} \Rightarrow BP.CQ = OB^2 = \frac{BC^2}{4}.$$

• Giả sử $BP.CQ = \dfrac{BC^2}{4}$. Chứng minh khoảng cách từ O đến AB, PQ, AC bằng nhau. Từ đó có PQ là tiếp tuyến của (O).

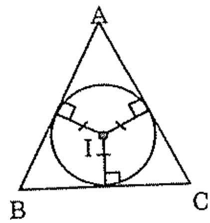
§4. TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

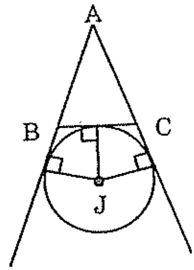
1. Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :



* Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
* Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
* Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.



2. Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn. Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm các đường phân giác các góc trong của tam giác.



3. Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.
Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác ABC trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác góc ngoài tại B (hoặc C).

B/ BÀI TẬP

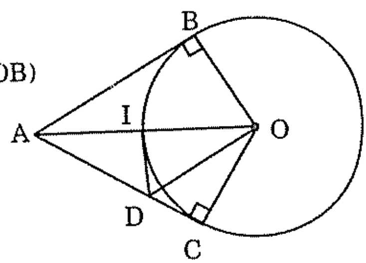
BÀI TẬP CƠ BẢN

41. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O ; R), kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C thuộc (O)). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt AC tại D.

a) Chứng minh DA = DO.

b) Nếu OA = 2R và I là giao điểm của (O) với OA. Chứng minh DI là tiếp tuyến của (O).

Giải



a) Ta có : AB // DO (cùng vuông góc với OB)

$\Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{AOD}$ (so le trong)

mà $\widehat{BAO} = \widehat{DAO}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

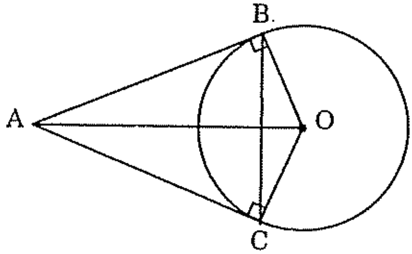
$\Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{DAO}$ nên ΔADO cân tại D. Vậy DA = DO.

b) OA = 2R (gt), OI = R nên I là trung điểm của OA nên DI ⊥ OA. Vậy DI là tiếp tuyến của (O).

42. Từ điểm A ngoài đường tròn (O ; R) sao cho OA = 2R, kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C thuộc (O)).

a) Chứng minh tam giác ABC đều. b) Số đo góc BOC là bao nhiêu ?

Giải



a) $\sin\widehat{BAO} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$

nên $\widehat{BAO} = 30^o$.

Do đó $\widehat{BAC} = 2\widehat{BAO} = 60^o$

(tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

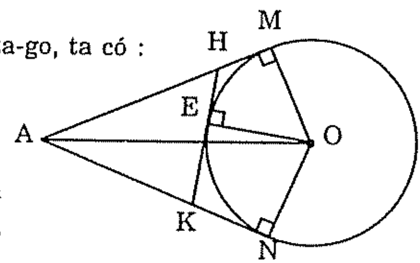
mà ΔBAC cân tại A (AB = AC)

suy ra ΔABC đều.

b) $\widehat{BAC} = 60^o$, $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^o$ nên $\widehat{BOC} = 120^o$.

43. Từ điểm A ngoài đường tròn (O ; R) sao cho OA = 3R, kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M, N ∈ (O)). Qua E thuộc cung nhỏ MN, kẻ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn (O) cắt AM và AN lần lượt tại H và K. Tính chu vi tam giác AHK theo R.

Giải



ΔAMO vuông tại M, theo định lí Py-ta-go, ta có :

$AO^2 = AM^2 + OM^2$

$\Rightarrow AM^2 = AO^2 - OM^2 = 8R^2$

nên $AM = 2\sqrt{2}R$.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có AM = AN, HM = HE, KE = KN.

Ta có chu vi ΔAHK bằng

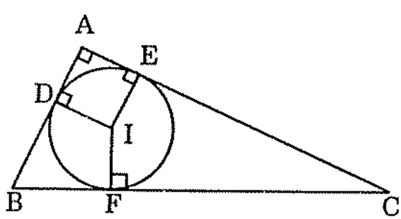
$$AH + HK + KA = AH + HE + EK + KA = AH + HM + KN + KA$$
$$= AM + AN = 2AM = 2.2\sqrt{2}R = 4\sqrt{2}R.$$

44. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại D, F, E.

a) Chứng minh AB + AC – BC = 2AE.

b) Tính diện tích tứ giác ADIE khi biết AB = 12cm, AC = 16cm.

Giải



a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có :

AD = AE, BD = BF, CE = CF.

Do đó AB + AC – BC

= (AD + DB) + (AE + EC) – (BF + FC)

= AD + AE + DB – BF + EC – FC

= AD + AE = 2AD.

b) ADIE là hình vuông.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 20^2$ nên BC = 20 (cm).

2AE = AB + AC – BC = 12 + 16 – 20 = 8 (cm) nên AE = 4cm.

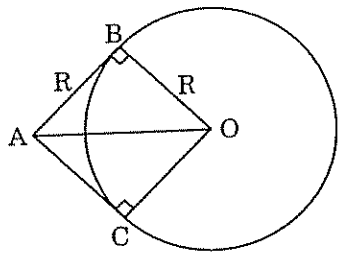
$S_{ADIE} = AE^2 = 16\ (cm^2)$.

45. Từ A ngoài (O ; R) vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm), lấy điểm C ∈ (O) sao cho AB = AC (C khác B).

a) Chứng minh AC là tiếp tuyến của (O).

b) Nếu AB = R. Tính độ dài BC theo R.

Giải



a) ΔABO = ΔACO (c.c.c)

nên $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$

mà $\widehat{ABO} = 90^\circ$ (vì AB là tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{ACO} = 90^\circ$.

Vậy AC là tiếp tuyến của (O).

b) Ta có : AB = BO = OC = AC = R

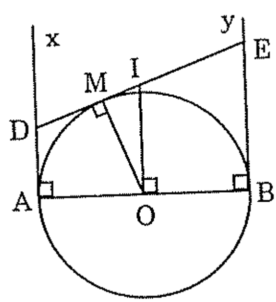
nên ABOC là hình chữ nhật và $\widehat{ABO} = 90^\circ \Rightarrow$ ABOC là hình vuông.

Vậy $S_{ABOC} = AB^2 = R^2$ (đơn vị diện tích).

46. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Qua M trên đường tròn, kẻ tiếp tuyến cắt hai tiếp điểm tại A và B của (O) lần lượt tại D và E với DE không song song AB. Vẽ đường tròn tâm K đường kính DE. Chứng minh AB là tiếp tuyến của (K).

Giải

Ta có O, I lần lượt là hai trung điểm của AB và DE nên OI là đường trung bình của hình thang vuông ADEB.



Vì OI // AD // BE và AD ⊥ AB, BE ⊥ AB

nên OI ⊥ AB. (1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có DA = DM và EM = EB.

Ta có : $OI = \dfrac{AD + BE}{2}$ (tính chất đường trung bình của hình thang)

$= \dfrac{DM + ME}{2} = \dfrac{DE}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB là tiếp tuyến của (K).

47. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = b, AC = c. Gọi R và r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

a) Chứng minh rằng : b + c = 2(R + r).

b) Tính diện tích ΔABC theo R và r.

c) Tính khoảng cách giữa các tâm đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác biết b = 8cm ; c = 6cm.

d) Cho BC cố định, A là điểm di động trên (O ; R) thoả tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AHB và tam giác AHC. Tìm vị trí của A để tổng $r + r_1 + r_2$ đạt giá trị lớn nhất.

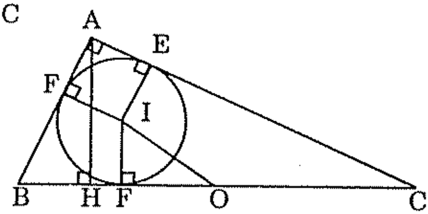
Giải

a) Dễ dàng chứng minh AEIF là hình vuông.

Ta có : $2r = 2AE = AB + AC - BC$

$= b + c - 2R$

$\Rightarrow \quad b + c = 2(R + r).$



b) $S = 2Rr + r^2$.

c) $IO = \sqrt{5}$ cm.

d) $r + r_1 + r_2 = \dfrac{1}{2}(AB + AC - BC + AH + HB - AB + AH + HC - AC)$

$= \dfrac{1}{2}.2AH = AH \le R.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa cung BC.

48. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng $S_{ABC} = BD.DC$.

Giải

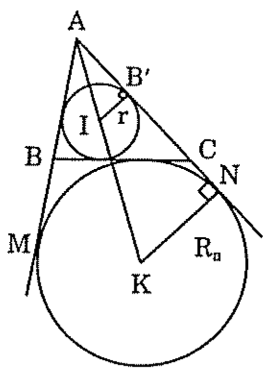
Đặt BC = a, AC = b, AB = c, ta có :

$4BD.DC = (a + b - c)(a + c - b) = a^2 - (b - c)^2 = 2bc = 4S_{ABC}$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

49. Gọi r, R_a, R_b, R_c lần lượt là bán kính đường nội tiếp, bán kính đường tròn bàng tiếp trong $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ của tam giác ABC. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_b} + \dfrac{1}{R_c}$.

Giải



$IB' \parallel KN \Rightarrow \dfrac{IB'}{KN} = \dfrac{AB'}{AN}$.

Lại có $\quad AB' = p - a$; $AB = p$.

Do đó $\quad \dfrac{r}{R_a} = \dfrac{p-a}{p}$

Tương tự $\quad \dfrac{r}{R_b} = \dfrac{p-b}{p}$; $\dfrac{r}{R_c} = \dfrac{p-c}{p}$

Suy ra $\quad r\left(\dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_b} + \dfrac{1}{R_c}\right) = \dfrac{3p-2p}{p} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_b} + \dfrac{1}{R_c} = \dfrac{1}{r}$.

0. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P. Gọi Q là hình chiếu vuông góc của M xuống NP.

a) Chứng minh QM là phân giác của góc BQC.

b) Gọi E là giao điểm của AI và PM. Chứng minh rằng $\widehat{AEC} = 90^\circ$.

Giải

a) Gọi H, T lần lượt là hình chiếu của B, C xuống NP.

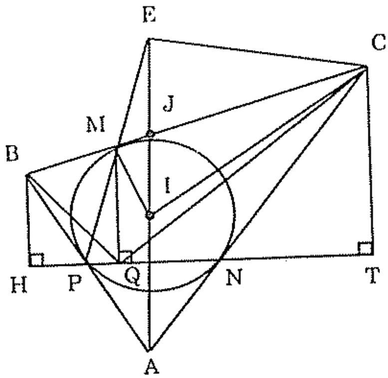
ΔANP cân tại A nên $\widehat{BPH} = \widehat{CNT}$.

$\Delta BPH \backsim \Delta CNT$ (g.g) : $\dfrac{BH}{CT} = \dfrac{BP}{CN} = \dfrac{BM}{CM} = \dfrac{HQ}{TQ}$.

Vậy $\Delta BHQ \backsim \Delta CTQ$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BQH} = \widehat{CQT}$.

Do đó QM là phân giác $\widehat{BQC}$.

b) Gọi J là giao điểm IE và BC, ta có :



$$\widehat{EIC} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ACB}}{2}$$

$$= 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2};$$

$$\widehat{EMC} = \widehat{BMP} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2}$$

Do đó $\widehat{EIC} = \widehat{EMC}$

$\Delta JIC \backsim \Delta JME$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{JI}{JM} = \dfrac{JC}{JE}$.

Nên có $\Delta JMI \backsim \Delta JEC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{JMI} = \widehat{JEC}$.

Vậy $\widehat{JEC} = 90^\circ$.

51. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABH, ACH. Đường thẳng O_1O_2 cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh rằng : AM = AN.

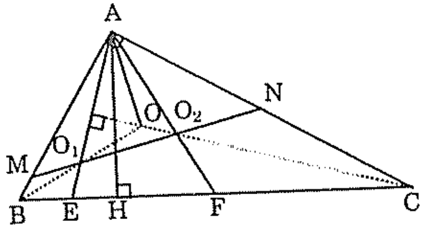
Giải

AO_1 ; AO_2 cắt BC lần lượt tại E ; F.

Dễ dàng chứng minh : $BO_1 \perp AF$

Tương tự $CO_2 \perp AE$.

Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì O là trực tâm của $\Delta AO_1O_2 \Rightarrow AO \perp MN$



AO vừa là đường phân giác, vừa là đường cao nên tam giác AMN cân tại A.

📖 BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

52. a) Cho tứ giác ABCD. Hai đường tròn nội tiếp tam giác ABC và tam giác ADC tiếp xúc với AC lần lượt tại hai điểm M, N. Hai đường tròn nội tiếp tam giác BAD và tam giác BCD tiếp xúc với BD lần lượt tại hai điểm P, Q. Chứng minh rằng : MN = PQ.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, TP.Hồ Chí Minh, năm học 1999 – 2000)

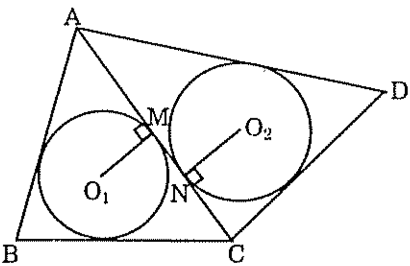
b) Cho tứ giác lồi ABCD. Biết rằng đường tròn nội tiếp tam giác ABC và đường tròn nội tiếp tam giác ACD tiếp xúc nhau. Chứng minh rằng các đường tròn nội tiếp tam giác ABD và nội tiếp tam giác BCD cũng tiếp xúc nhau.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Thái Bình, năm học 2005 – 2006)

c) Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho bán kính các đường tròn nội tiếp hai tam giác ABD và ACD bằng nhau. Chứng minh rằng các đường tròn bàng tiếp góc A của hai tam giác ABD và ACD cũng bằng nhau.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, trường THPT Thực hành sư phạm – ĐHSP TP. Hồ Chí Minh, năm học 2008 – 2009)

Giải



a) Dễ dàng chứng minh :

$$AM = \frac{AC + AB - BC}{2};$$

$$AN = \frac{AD + AC - DC}{2}$$

$$\Rightarrow MN = |AM - AN| = \frac{1}{2}|AB + DC - BC - AD|.$$

Lập luận tương tự : $PQ = \frac{1}{2}|AB + DC - BC - AD| \Rightarrow MN = PQ.$

b) Giả sử đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AC ở M, đường tròn nội tiếp tam giác ACD tiếp xúc với AC ở N, đường tròn nội tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BD ở P, đường tròn nội tiếp trong góc BCD tiếp xúc với BD ở Q.

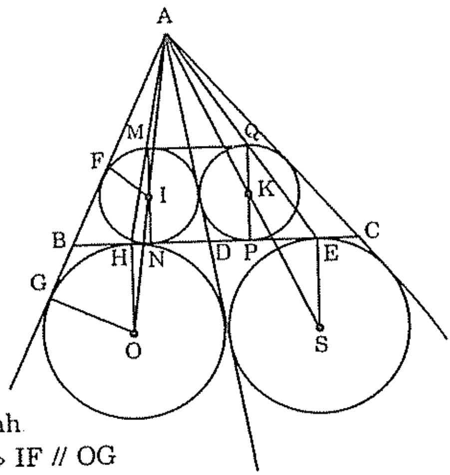
Hai đường tròn nội tiếp tam giác ABC và tam giác ACD tiếp xúc nhau

$\Leftrightarrow M \equiv N \Leftrightarrow MN = 0$

$\Leftrightarrow AB + DC - BC - AD = 0 \Leftrightarrow PQ = 0 \Leftrightarrow P \equiv Q$

$\Leftrightarrow$ hai đường tròn nội tiếp tam giác ABD và tam giác BCD tiếp xúc nhau.

c) Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BC, AB lần lượt tại N, F.



Đường tròn (K) nội tiếp trong tam giác ACD tiếp xúc với BC tại P.

Đường tròn (O) bàng tiếp tam giác A của tam giác ABD tiếp xúc với BC, AB lần lượt ở H, G.

Đường tròn (S) bàng tiếp góc A của tam giác ACD tiếp xúc trong với BC ở E.

Vẽ đường kính MN của đường tròn (I), đường kính PQ của đường tròn (K).

Tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Ta có $IF \perp AB$ và $OG \perp AB \Rightarrow IF // OG$

ΔAOG có $IF // OG$. $\Rightarrow \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{IM}{OH}$

$MN \perp BC$, $OH \perp BC$ $\Rightarrow MN // OH$.

Mà A, I, O thẳng hàng.

Do đó $\widehat{AIM} = \widehat{AOH}$; $\Delta AIM \backsim \Delta AOH$ (c.g.c).

Từ đó A, M, H thẳng hàng.

Chứng minh tương tự có A, Q, E thẳng hàng.

Chứng minh được $\dfrac{IM}{OH} = \dfrac{KQ}{SE} = \dfrac{AQ}{AE} = \dfrac{AM}{AH}$

Mà IM = KQ

Vậy OH = SE.

53. a) Cho tam giác ABC, đường tròn (O) nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp nằm trên đường thẳng qua các trung điểm của BC và AD.

(Đề thi học sinh giỏi Toán ở Anh năm 1977)

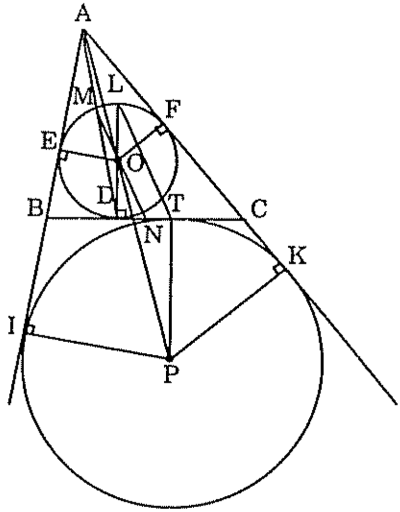
b) Cho tam giác ABC có đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AB, AC và với hai đường trung tuyến BM và CN. Chứng minh tam giác ABC cân.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2001 – 2002)

c) Cho đường tròn (I ; r) nội tiếp tam giác ABC ($\widehat{C} < 90°$) kẻ đường thẳng qua I cắt hai cạnh CA, CB của tam giác theo thứ tự ở M và N. Xác định vị trí của MN sao cho S_{CMN} đạt giá trị nhỏ nhất.

(Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Toán lớp 9, trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011)

Giải



a) Gọi L là điểm đối xứng với D qua O tia AL cắt BC tại T. Qua T kẻ đường vuông góc AB, cắt tia AO tại P. Gọi E, F là tiếp điểm của (O) với AB, AC. Ta có :

$$\frac{AO}{AP} = \frac{OL}{PT} = \frac{BE}{PI} = \frac{OF}{PK}$$

mà $OE = OF = OL$

$\Rightarrow OT = PI = PK$.

Điều này chứng tỏ P là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của ΔABC.

Đặt BC = a, AC = b, AB = c, ta có

$$BD = p - b \ ; \ CT = CK = AK - AC = p - b$$

Suy ra BD = CT.

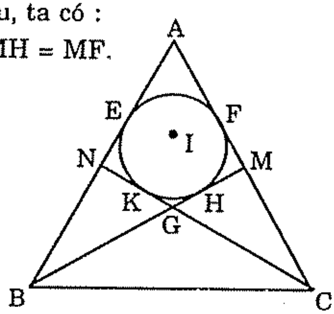
Vậy nếu N là trung điểm BC thì N cũng là trung điểm DT.

ΔDLT có ON // LT và ΔADT có MN // AT $\Rightarrow$ M, O, N thẳng hàng (M trung điểm AD).

b) Đường tròn đã cho tiếp xúc với AB, AC, BM, CN lần lượt ở E, F, H, K.

Theo tính chất của hai tiếp tiếp cắt nhau, ta có :

$$AE = AF, NE = NK, GK = GH, MH = MF.$$



Do đó : GM + AN = GN + AM.

Mà G là trọng tâm tam giác ABC

nên $GM = \frac{1}{3}BM$, $GN = \frac{1}{3}CN$.

và $AN = \frac{AB}{2}$, $AM = \frac{AC}{2}$.

Vậy có $BM + \frac{3}{2}AB = CN + \frac{3}{2}AC$. (1)

Mặt khác gọi r là bán kính của đường tròn, ta chứng minh được :

$$S_{MAB} = \frac{1}{2}r(AB + AM + BM);$$

$$S_{NAC} = \frac{1}{2}r(AC + AN + CN).$$

Mà $S_{MAB} = S_{NAC}\left(= \frac{1}{2}S_{ABC}\right)$

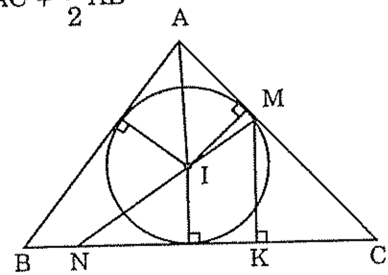
do đó AB + AM + BM = AC + AN + CN

$$\Rightarrow \quad CN + \frac{1}{2}AC = BM + \frac{1}{2}AB \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) có $\frac{3}{2}AB + \frac{1}{2}AC = \frac{3}{2}AC + \frac{1}{2}AB$

$$\Rightarrow \quad AB = AC.$$

c) Vẽ $MK \perp CN$ tại K



$$MK = CM\sin C$$

$$S_{CMN} = \frac{1}{2}MK.CN$$

$$= \frac{1}{2}CM.CN.\sin C$$

$$S_{CMN} = S_{ICM} + S_{ICN} = \frac{1}{2}r.CM + \frac{1}{2}r.CN$$

$$= r.\frac{CM + CN}{2} \geq r\sqrt{CM.CN} = r\sqrt{\frac{2S_{CMN}}{\sin C}}$$

Do đó $S_{CMN}^2 \geq \frac{r^2.2S_{CMN}}{\sin C} \Leftrightarrow S_{CMN} \geq \frac{2r^2}{\sin C}$; $\frac{2r^2}{\sin C}$ không đổi

§5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

Vị trí tương đối của hai đường tròn (O ; R) và (O′ ; r) (R > r)	**Số điểm chung**	**Hệ thức giữa OO′ với R và r**
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < OO' < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau : – Tiếp xúc ngoài. – Tiếp xúc trong.	1	$OO' = R + r$ $OO' = R - r$
Hai đường tròn không giao nhau : – (O) và (O′) ở ngoài nhau. – (O) đựng (O′)	0	$OO' > R + r$ $OO' < R - r$

– Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm hay đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

– Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn không cắt đoạn nối tâm là tiếp tuyến chung ngoài, cắt đoạn nối tâm là tiếp tuyến chung trong.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

54. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) có d = OO' là đoạn nối tâm. Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn này theo bảng sau đây :

R	r	d	R + r	R – r	Vị trí tương đối
4cm	3cm	8cm			
5cm	2cm	7cm			
4cm	1cm	2cm			
6cm	2cm	4cm			
5cm	2cm	1cm			
4cm	3cm	6cm			

Giải

R	r	d	R + r	R – r	Vị trí tương đối
4cm	3cm	8cm	7cm	1cm	Hai đường tròn ở ngoài nhau
5cm	2cm	7cm	7cm	3cm	Hai đường tròn tiếp xúc ngoài
4cm	1cm	2cm	6cm	4cm	Hai đường tròn ở trong nhau
6cm	2cm	4cm	8cm	4cm	Hai đường tròn tiếp xúc trong
5cm	2cm	1cm	7cm	3cm	Hai đường tròn ở trong nhau
4cm	3cm	6cm	7cm	1cm	Hai đường tròn cắt nhau

55. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong với nhau tại A. Qua A vẽ một cát tuyến cắt hai đường tròn (O) và (O') lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại B và C song song với nhau.

Giải

Ta có : $\widehat{OBA} = \widehat{O'CA}$ (= $\widehat{OAB}$)

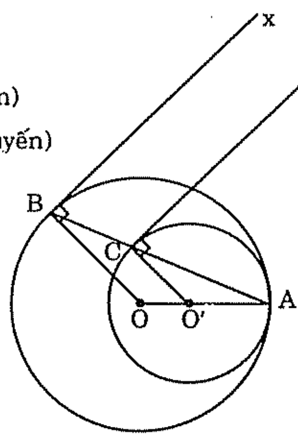
Do đó $\widehat{ABx} + \widehat{ABO} = 90^o$ (vì Bx là tiếp tuyến)

$\widehat{ACy} + \widehat{ACO'} = 90^o$ (vì Cy là tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{ABx} = \widehat{ACy}$

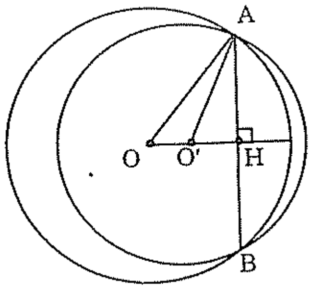
mà hai góc này ở vị trí đồng vị.

Vậy Bx // Cy.



56. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho hai điểm O và O' cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB. Biết OA = 30cm, O'A = 26cm, AB = 48cm. Tính độ dài OO'.

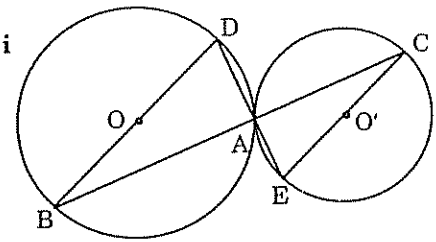
Giải



ọi H là giao điểm của OO' và AB.
a có : OO' là đường trung trực của B nên các tam giác AHO, AHO' uông và $AH = \frac{AB}{2} = 24$ (cm), theo ịnh lí Pi–ta–go có :
$OH^2 = OA^2 - HA^2 = 30^2 - 24^2 = 324$
$\Rightarrow OH = 18$ (cm).
$O'H^2 = O'A^2 - HA^2 = 26^2 - 24^2 = 100 \Rightarrow O'H = 10$ (cm).
ậy $OO' = 18 - 10 = 8$ (cm).

Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Qua A vẽ ường thẳng cắt (O) và (O') lần lượt tại B và C (BC không song song OO').
.) Chứng minh OB và O'C song song với nhau.
) Vẽ đường kính BD của (O), đường kính CE của (O') Chứng minh AB.CE = AC.BD.

Giải



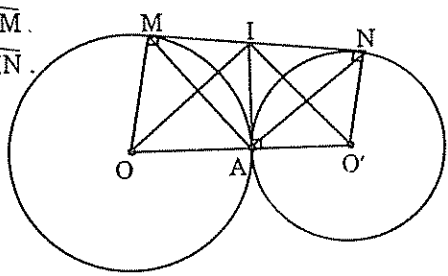
) $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = \widehat{O'CA}$
nên $\widehat{OBA} = \widehat{O'CA}$
mà hai góc này ở vị trí so le trong
$\Rightarrow OB // O'C$.

) Ta có BD và CE là đường kính nên tam giác DAB, EAC vuông, mà
$\widehat{OBA} = O'CA \Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta ACE \Rightarrow AB.CE = AC.BD$.

Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài MN, M ∈ (O) và N ∈ (O'). Tiếp tuyến chung tại A cắt MN tại I. Chứng minh rằng :
a) $\widehat{MAN} = 90^\circ$ và $\widehat{OIO'} = 90^\circ$. b) $MN = 2\sqrt{RR'}$.

Giải

a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có :



IA = IM, IO là tia phân giác $\widehat{AIM}$.
IA = IN, IO' là tia phân giác $\widehat{AIN}$.
Tam giác MAN có AI là đường trung tuyến và $AI = \frac{MN}{2}$ (IM = IA = IN)
$\Rightarrow \Delta MAN$ vuông tại A.

Vậy $\widehat{MAN} = 90^\circ$.

Do IO và IO' là hai tia phân giác của hai góc kề bù $\widehat{AIM}$ và $\widehat{AIN}$

$\Rightarrow \widehat{OIO'} = 90^\circ$.

b) Ta có : $AI^2 = AO.AO' = R.R'$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông

$\Rightarrow AI = \sqrt{RR'}$.

Vậy $MN = 2AI = 2\sqrt{RR'}$.

59. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) (R > r).

a) Hãy nêu cách vẽ tiếp tuyến chung ngoài AB của hai đường tròn (O), (O') ($A \in (O)$, $B \in (O')$).

b) Hãy nêu cách vẽ tiếp tuyến chung trong CD của hai đường tròn (O), (O') ($C \in (O)$, $D \in (O')$).

Giải

Cách vẽ tiếp tuyến chung ngoài AB

– Dựng đường tròn (O ; R – r).

– Dựng O'H là tiếp tuyến của đường tròn (O ; R – r) (H là tiếp điểm).

– Dựng tia OH, tia OH cắt (O ; R) tại A.

– Dựng bán kính O'B sao cho A, B nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ OO' và O'B // OA.

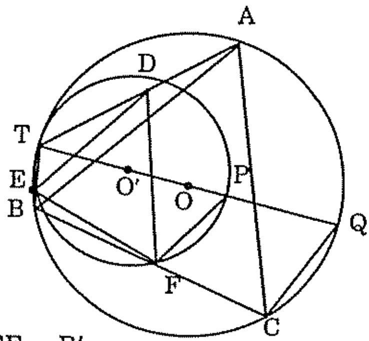
60. Cho hai đường tròn tâm O và tâm O' tiếp xúc trong nhau tại T và tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn lớn (điểm T thuộc cung nhỏ AB). Các dây TA, TB, TC lần lượt cắt đường tròn nhỏ tại D, E, F. Chứng minh tam giác DEF là tam giác đều.

Giải

Đường thẳng TO'O cắt (O') tại P, cắt đường tròn (O) tại Q.

Gọi bán kính (O) là R, bán kính (O') là R'. Ta dễ dàng chứng minh $FP \perp TC$; $CQ \perp TC \Rightarrow FD$ // CQ nên

$$\frac{TF}{TC} = \frac{TP}{TQ} = \frac{R'}{R}. \quad (1)$$



Tương tự :

DP // AQ : $\dfrac{TD}{TA} = \dfrac{TP}{TQ} = \dfrac{R'}{R}$. (2)

EF // BQ : $\dfrac{TE}{TB} = \dfrac{TP}{TQ} = \dfrac{R'}{R}$. (3)

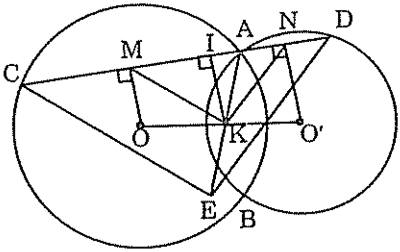
Từ (1) ; (2) cho : $\dfrac{DF}{AC} = \dfrac{R'}{R}$; (1) và cho : $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{R'}{R}$;

(2) ; (3) cho : $\dfrac{ED}{AB} = \dfrac{R'}{R}$.

Suy ra $\Delta DEF \backsim \Delta ABC$ (c.c.c) $\Rightarrow \Delta DEF$ đều.

ho hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại A và B. Gọi K là trung ểm của OO′, gọi E là điểm đối xứng với A qua K. Vẽ cát tuyến CAD ∈ (O) và D ∈ (O′)). Chứng minh rằng tam giác CED cân.

Giải

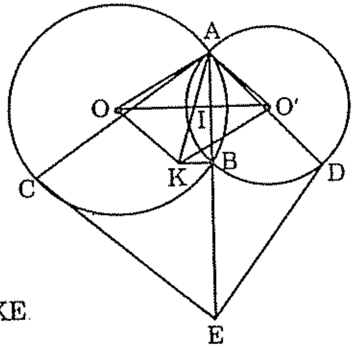


OM ; KI ; O′N cùng vuông c CD. Xét hình thang OMNO′ đường thẳng KI ta có IM = IN ΔMKN cân tại K.
ý MK, KN là đường trung nh ΔACE ; ΔADE.
đó suy ra ΔCDE cân.
ích khác : Chứng minh ΔDO′E = ΔEOC (c.g.c)

ÀI TẬP NÂNG CAO

Cho hai đường tròn (O) và cắt (O′) cắt nhau tại A và B. Vẽ dây AC ủa đường tròn (O) đồng thời là tiếp tuyến của đường tròn (O′). Vẽ dây D của đường tròn (O′) đồng thời là tiếp tuyến của (O). Gọi E là điểm ối xứng với A qua B. Chứng minh rằng bốn điểm A, C, D, E cùng uộc một đường tròn.

Giải

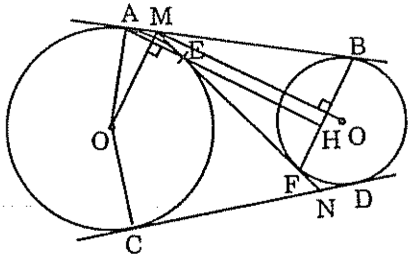


ọi I là trung điểm OO′, dựng K = $S_I(A)$
⇒ OAO′K là hình bình hành.
ễ dàng thấy OK ⊥ CA
⇒ OK là đường trung trực của AC
⇒ KA = KC.
ương tự KA = KD.
a có KB ⊥ AE tại B, AB = BE (gt)
⇒ KB đường trung trực của AE ⇒ KA = KE.
uy ra KA = KE = KC = KD.

Cho hai đường tròn (O) và (O′) nằm ngoài nhau. Vẽ các tiếp tuyến hung ngoài AB và CD, vẽ tiếp tuyến chung trong EF (A, C, E thuộc ường tròn tâm O ; B, D, F thuộc đường tròn tâm O′). Gọi giao điểm ủa EF với AB, CD theo thứ tự là M và N. Chứng minh rằng :

a) MN = AB và ME = NF.
b) ME vuông góc BF.

Giải



a) AB = MA + MB = ME + MF
CD = NE + NF
Lại có : AB = CD
⇒ ME + MF + NE + NF = 2AB
⇒ (ME + NE) + (MF + NF) = 2AB
⇒ 2MN = 2AB ⇒ MN = AB.

Ta có: $\left.\begin{matrix} 2ME + EF = AB \\ 2NF + EF = CD \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow ME = NF$.

b) Gọi H là giao điểm của AE và BF, ΔMAE cân, ΔMBF cân nên

$$\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = \widehat{MAE} + \widehat{MBF}$$

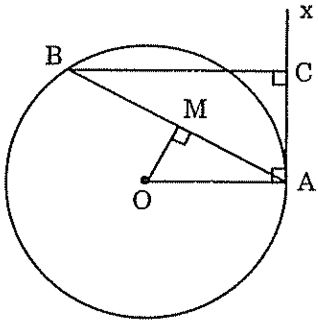
$$= \frac{180^\circ - \widehat{AME}}{2} + \frac{180^\circ - \widehat{BMF}}{2} = \frac{360^\circ - (\widehat{AME} + \widehat{BMF})}{2}$$

$$= \frac{360^\circ - 180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Suy ra : $AE \perp BF$.

64. Cho đường tròn (O) và dây AB. Vẽ tiếp tuyến Ax. Từ B hạ $BC \perp Ax$. Tính AB biết $AB + BC = a$ và $OA = R$.

Giải



Đặt $AB = x$. Gọi M trung điểm AB

$\Rightarrow \Delta MAO \backsim \Delta CBA$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AO} = \frac{BC}{MA} = \frac{AB + BC}{AB + MA}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{R} = \frac{a}{R + \frac{x}{2}}.\ \text{Vậy } x^2 + 2Rx - 2aR = 0$$

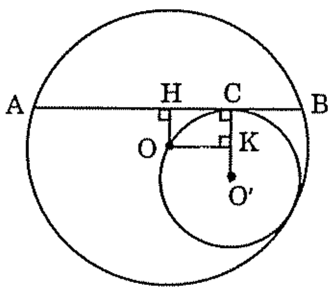
$$x = \sqrt{R^2 + 2aR} - R\ (x > 0).$$

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

65. Cho đường tròn (O ; R) dựng đường tròn (O' ; R') sao cho O thuộc đường tròn (O' ; R'). Dây AB của đường tròn (O ; R) di động và tiếp xúc với đường tròn (O' ; R') tại C. Xác định vị trí của dây AB để $AC^2 + BC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2004 – 2005)

Giải



Kẻ $OH \perp AB$ tại H ; $OK \perp O'C$ tại K, ta có

$$AC^2 + BC^2 = \left(\frac{AB}{2} + HC\right)^2 + \left(\frac{AB}{2} - HC\right)^2$$

$$= \frac{AB^2}{2} + 2HC^2$$

$$= 2(R^2 - OH^2) + 2(R'^2 - O'H^2)$$

$$- (R' - OH)^2]$$

$$= 2R^2 - 4OH^2 + 4OH.R'$$

$$= 2R^2 + R'^2 - (2OH - R')^2 \le 2R^2 + R'^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ OH = $\dfrac{R'}{2}$ và AB là tiếp tuyến chung ngoài của (O' ; R')

và $\left(O ; \dfrac{R'}{2}\right)$.

5. Cho ba đường tròn có bán kính R_1, R_2, R tiếp xúc ngoài lẫn nhau đôi một và tiếp xúc với một đường thẳng trong đó R là bán kính có độ dài nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất của R_1R_2 theo độ dài R cho trước.
(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1993 – 1994)

Giải

Dễ dàng chứng minh : $\dfrac{1}{\sqrt{R}} = \dfrac{1}{\sqrt{R_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{R_2}}$.

$$R_1R_2\min \Leftrightarrow \frac{1}{R_1R_2}\max \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\max.$$

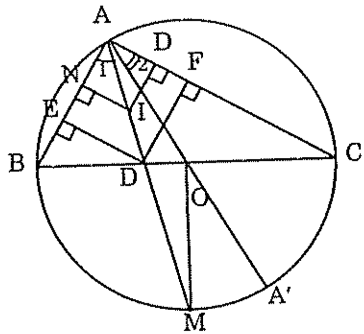
Mà $\dfrac{1}{\sqrt{R_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{R_2}}$ không đổi nên $\dfrac{1}{\sqrt{R_1}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{R_2}}\max \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{R_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{R_2}}$

$\Leftrightarrow R_1 = R_2 = 4R$. Vậy R_1R_2 đạt giá trị nhỏ nhất là $16R^2$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Cho đường tròn (O) đường kính BC = 2R. Gọi A là điểm trên đường (O). Tia phân giác góc BAC cắt BC tại D và cắt đường tròn (O) tại M.
   a) Chứng minh rằng MB = MC và tính MB theo R.
   b) Gọi E, F là hình chiếu của D trên AB, AC. Tứ giác AEDF có dạng đặc biệt gì ? Vì sao ?
   c) Cho góc ABC = 60°. Tính DB, DC theo R.
   d) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $R + r \geq \sqrt{2S}$ (S là diện tích tam giác ABC).

Giải



a) Kẻ đường kính AA'.

$\widehat{BOM} = \widehat{BOA'} - \widehat{MOA'} = 2\widehat{BAO} - 2\widehat{MAO}$

$= 2(\widehat{BAO} - \widehat{MAO}) = 2\widehat{A}_1 = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta BMC$ vuông cân tại M.

$MB = R\sqrt{2}$.

b) AEDF là hình vuông.

c) $BD = R(\sqrt{3} - 1)$; $CD = R(3 - \sqrt{3})$.

d) $r = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$

$$\Rightarrow R + r = \frac{BC}{2} + \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{AB + AC}{2} \geq \sqrt{AB.AC} = \sqrt{2S}.$$

2. Cho đường tròn (O ; r) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại M, N, P. Gọi P là nửa chu vi tam giác ABC.

Biết $\dfrac{AP^4}{BP^3}+\dfrac{BM^4}{BC^3}+\dfrac{CN^4}{NA^3}=p$. Tính các góc A, B, C của tam giác ABC.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có :

$$\frac{AP^4}{BP^3}+BP\ge 2\sqrt{\frac{AP^4}{BP^3}.BP}=2\frac{AP^2}{BP}$$

$$\Rightarrow \frac{AP^4}{BP^3}+BP+2BP\ge 2\left(\frac{AP^2}{BP}\right)+BP\ge 4\sqrt{\frac{AP^2}{BP}.BP}=4AP.\ (1)$$

Lí luận tương tự : $\dfrac{BM^4}{MC^3}+3MC\ge 4BM$ (2) ; $\dfrac{CN^4}{NA^3}+3NA\ge 4CN$. (3)

Từ (1) ; (2) và (3) cho ta :

$$\frac{AP^4}{BP^3}+\frac{BM^4}{MC^3}+\frac{CN^4}{CN^3}+3(BP+MC+NA)\ge 4(AP+MB+CN)$$

$$\Rightarrow \frac{AP^4}{BP^3}+\frac{BM^4}{MC^3}+\frac{CN^4}{NA^3}\ge BP+MC+NA=p.$$

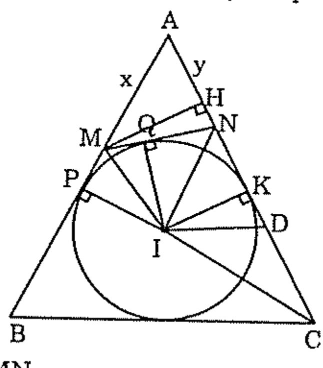
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=60^o$.

3. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai cạnh AB, AC sao cho $\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{AN}{NC}=1$. Đặt AM = x, AN = y.

a) Chứng minh rằng $MN^2=x^2+y^2-xy$, $MN=a-x-y$.

b) Chứng minh rằng MN luôn tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Giải



a) Kẻ MH ⊥ AC tại M ; $AH=\dfrac{x}{2}$;

$MH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, $NH=y-\dfrac{x}{2}$.

Ta có : $MN^2=MH^2+NH^2=x^2+y^2-xy$

$\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{AN}{NC}=1\Rightarrow \dfrac{x}{a-x}+\dfrac{y}{a-y}=1$

$\Rightarrow 3xy=2a(x+y)-a^2$

$MN^2=(x+y)^2-3xy=(x+y-a)^2\Rightarrow MN=a-x-y$.

b) Kẻ IP ⊥ AB tại P ; IK ⊥ AC tại K

$\Rightarrow$ P, K lần lượt là trung điểm của AB, AC $\Rightarrow AP=AK=\dfrac{a}{2}$.

$MP+NK=AP-AM+AK-AN=a-x-y=MN$.

Dựng KD = MP ⇒ ΔPIM = ΔKID (c.c.c) ⇒ IM = ID

Suy ra : ΔMNI = ΔDNI (c.c.c) ⇒ IQ = IK

Vậy MN ⊥ IQ tại Q, IQ là bán kính của (O) ⇒ MN là tiếp tuyến của (O).

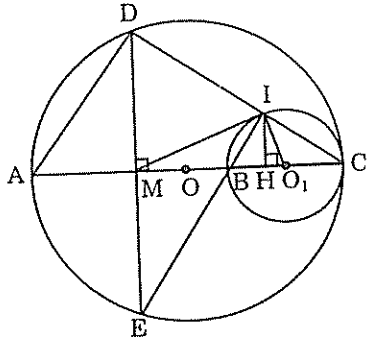
. Cho đường tròn (O ; R) đường kính AC. Trên đoạn thẳng OC lấy điểm B và vẽ đường tròn (O') có đường kính BC. Gọi M là trung điểm của AB, qua M kẻ dây cung vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại D và E. Nối CD cắt đường tròn (O') tại I.

a) Tứ giác DAEB là hình gì ? Vì sao ?

b) Chứng minh : MI = MD và MI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

c) Gọi H là hình chiếu của I trên BC. Chứng minh CH.MB = BH.MC.

Giải



a) ADBE hình thoi.

b) Dễ dàng thấy E, B, I thẳng hàng.

ΔDIE vuông tại I có IM là đường trung tuyến ⇒ MI = MD.

$\widehat{MID} + \widehat{OIC} = \widehat{MDI} + \widehat{ICO'} = 90^\circ$

⇒ $\widehat{MIO'} = 90^\circ$ ⇒ MI ⊥ O'I tại I, O'I là bán kính đường tròn (O') ⇒ MI là tiếp tuyến (O').

c) Chứng minh IB ; IC là đường phân giác trong, phân giác ngoài tại đỉnh I của ΔMIH. Từ đó có điều phải chứng minh.

5. Cho tam giác ABC (AB < AC) có đường trung tuyến AM. Đường tròn (O_1) nội tiếp ΔABM tiếp xúc với các cạnh BM, MA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn (O_2) nội tiếp ΔACM tiếp xúc với các cạnh CM, MA, AC lần lượt tại I, J, K. Chứng minh rằng :

a) MO_2 // DE và MO_1 // IJ.

b) $MI.MD = O_1D.O_2I$.

c) $AE = \dfrac{AB + AM - BM}{2}$ và $EJ = \dfrac{AC - AB}{2}$.

d) IJ, DE, O_1O_2 cắt nhau tại một điểm.

Giải

a) Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có :

DE ⊥ O_1M, MO_2 ⊥ O_1M (hai tia phân giác của hai góc kề bù)

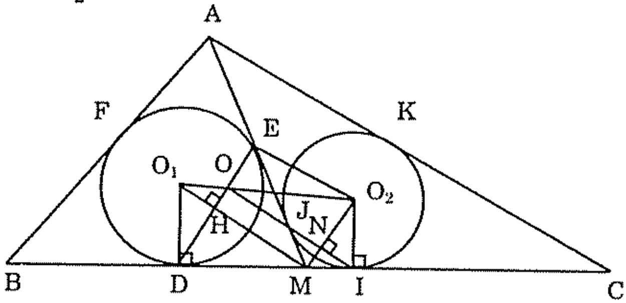
⇒ MO_2 // DE.

Lập luận tương tự : MO_1 // IJ.

b) Xét ΔDMO_1 và ΔIO_2M có : $\widehat{D} = \widehat{I} = 90^\circ$; $\widehat{DMO_1} = \widehat{MO_2I}$ (cùng phụ với $\widehat{IMO_2}$).

$\Rightarrow \Delta DMO_1 \backsim \Delta IO_2M$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{O_1D}{IM} = \dfrac{MD}{IO_2} \Rightarrow IM.MD = O_1D.IO_2$.



c) $AE = \dfrac{AB + AM - BM}{2}$ và $EJ = \dfrac{AC - AB}{2}$

Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có : AE = AF, BF = BD và EM = MD.

Vậy : $\begin{cases} AE = AM - EM = AM - MD \\ AF = AB - BF = AB - BD \end{cases}$

$\Rightarrow AE + AF = AB + AM - (MD + BD)$

$\Rightarrow 2AE = AB + AM - BM \Rightarrow AE = \dfrac{AB + AM - BM}{2}$.

Lập luận tương tự, ta có : $AJ = \dfrac{AM + AC - MC}{2}$.

Suy ra : $EJ = |AJ - AE| = \dfrac{1}{2}|AM + AC - MC - (AB + AM - MB)|$

$= \dfrac{1}{2}|AC - AB|$ (do MB = MC (gt))

$= \dfrac{AC - AB}{2}$ (do AC > AB).

d) Gọi O là giao điểm DE và IJ, ta cần chứng minh O_1; O ; O_1 thẳng hàng.

Họi H là giao điểm của O_1M và DE, N là giao điểm của O_2M là IJ.

Vì $\Delta DMO_1 \backsim \Delta IO_2M$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MD}{O_2I} = \dfrac{O_1M}{O_2M}$

$\Rightarrow \dfrac{O_1M^2}{O_2M^2} = \dfrac{MD^2}{O_2I^2} = \dfrac{MH.O_1M}{O_2N.O_2M} \Rightarrow \dfrac{O_1M}{O_2M} = \dfrac{MH}{O_2N} = \dfrac{ON}{O_2N}$

Do đó $\Delta O_1MO_2 \backsim \Delta ONO_2$ (c.g.c). Vậy $\widehat{O_1O_2M} = \widehat{OO_2N}$.

Nên O_1; O ; O_2 thẳng hàng.

Vậy các đường thẳng IJ, DE và O_1O_2 cắt nhau tại một điểm.

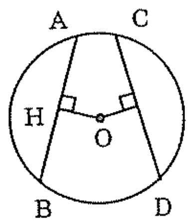
Chương III. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

§1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

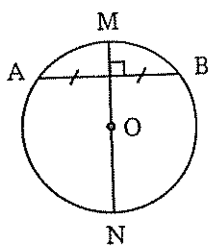
A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.
2. Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
   + Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360^0 và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).
   + Số đo của nửa đường tròn bằng 180^0.

   Chú ý :
   – Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180^0.
   – Cung lớn có số đo lớn hơn 180^0.
   – Khi hai mút của cung trùng nhau, ta có "cung không" với số đo 0^0 và cung cả đường tròn có số đo 360^0.
3. Trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :
   – Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.
   – Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.
4. Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì :
   sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$ + sđ$\overset{\frown}{CB}$



5. Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :
   – Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
   – Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.
6. Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :
   – Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
   – Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.



7. Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.
   Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì đi qua điểm chính giữa của cung căng dây ấy.
8. Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây cung ấy và ngược lại.
9. Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây cung song song thì bằng nhau.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Cho đường tròn (O ; R) và dây cung $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB.

Giải

Ta có $AB^2 = 2R^2$

$OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

$\Rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow \Delta AOB$ vuông tại O $\Rightarrow \widehat{AOB} = 90^0$

Do đó sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\widehat{AOB} = 90^0$

sđ $\overset{\frown}{AB}_{lớn} = 360^0$ – sđ $\overset{\frown}{AB} = 360^0 - 90^0 = 270^0$.

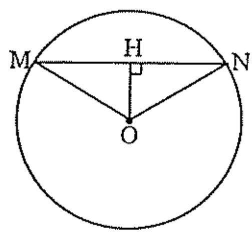
2. Cho đường tròn (O ; R) và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Tính số đo của hai cung MN.

Giải

Kẻ $OH \perp MN$ tại H.

$\Rightarrow HM = HN$ (định lí về đường kính vuông góc dây cung)

Do đó $HM = HN = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$



Ta có $\cos\widehat{HMO} = \dfrac{MH}{MO} = \dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

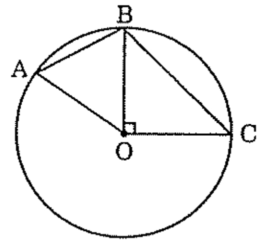
Nên $\widehat{HMO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{MON} = 120^0$

sđ $\overset{\frown}{MN}$ = sđ $\widehat{MON} = 120^0$

sđ $\overset{\frown}{MN}_{lớn} = 360^0$ – sđ $\overset{\frown}{MN} = 360^0 - 120^0 = 240^0$.

3. Trên đường tròn (O ; R) lấy ba điểm A, B, C sao cho dây cung AB = R, $BC = R\sqrt{2}$ và tia BO nằm giữa hai tia BA và BC. Tính số đo các cung nhỏ AB, BC và AC.

Giải



ΔAOB đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^0$

ΔBOC vuông cân tại O $\Rightarrow \widehat{BOC} = 90^0$

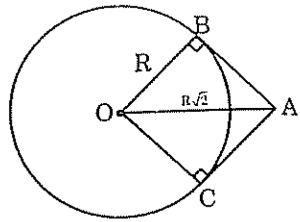
sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\widehat{AOB} = 60^0$

sđ $\overset{\frown}{BC}$ = sđ $\widehat{BOC} = 120^0$

sđ $\overset{\frown}{AC}$ = sđ $\overset{\frown}{AB}$ + sđ $\overset{\frown}{BC} = 60^0 + 120^0 = 180^0$.

4. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O ; R) cắt nhau tại A. Biết $OA = R\sqrt{2}$. Tính số đo của cung BC.

Giải



$\sin\widehat{OAB} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{R}{R\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{OAB} = 45^0$.

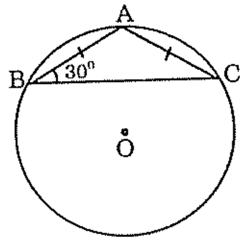
ΔABO vuông cân tại B nên $\widehat{BOA} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 90^0$.

sđ$\overset{\frown}{BC}$ = sđ$\widehat{BOC} = 90^0$.

5. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O ; R) có $\widehat{B} = 30^0$. So sánh các cung nhỏ AB, AC và BC.

Giải



Ta có ΔABC cân tại A (gt) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$.

ΔABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$

hay $\widehat{A} + 30^0 + 30^0 = 180^0$. Nên $\widehat{A} = 120^0$

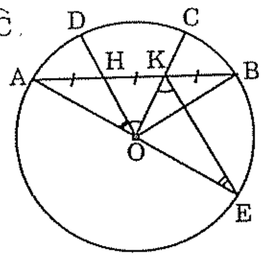
ΔABC có $\widehat{B} = \widehat{C} < \widehat{A}$ (vì $30^0 = 30^0 < 120^0$)

$\Rightarrow AC = AB < BC \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{BC}$.

6. Trên dây cung AB của đường tròn (O) lấy hai điểm H và K sao cho AH = HK = KB. Vẽ bán kính OD qua H và bán kính OC qua K. Chứng minh rằng :

a) $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ b) $\overset{\frown}{AD} < \overset{\frown}{DC}$.

Giải



a) ΔAOB cân tại O $\Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{OBK}$.

Do đó $\Delta OAH = \Delta OBK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{BOK} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$.

b) Vẽ đường kính AE của đường tròn (O).

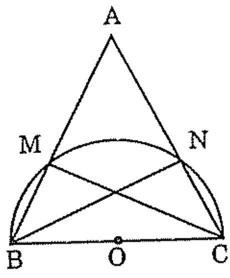
$\widehat{AOH} = \widehat{OEK}$, $\widehat{HOK} = \widehat{OKE}$

và ΔOEK có $OK < OE \Rightarrow \widehat{HOK} > \widehat{AOH} \Rightarrow \overset{\frown}{DC} > \overset{\frown}{AD}$.

7. Cho tam giác ABC cân tại A với góc A nhọn. Đường tròn (O) có đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng :

a) BN = CM b) $\overset{\frown}{CN} = \overset{\frown}{BM}$.

Giải



a) Ta có BC là đường kính của đường tròn (O)

nên $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^0$

$\Delta BNC = \Delta CMB$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow BN = CM$.

b) Ta có BN = CM (chứng minh trên)

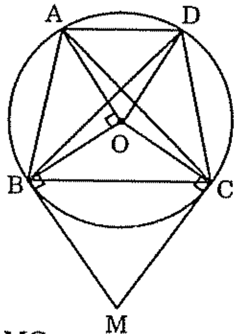
nên sđ$\overset{\frown}{BN}$ = sđ$\overset{\frown}{CM}$

$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{BM}$ + sđ$\overset{\frown}{MN}$ = sđ$\overset{\frown}{CN}$ + sđ$\overset{\frown}{MN}$ hay sđ$\overset{\frown}{BM}$ = sđ$\overset{\frown}{CN}$.

8. Cho đường tròn (O ; R). Vẽ hai dây cung $AB = R\sqrt{2}$ và $AD = R$ sao cho tia AO nằm giữa hai tia AB và AD. Vẽ dây BC song song với AD.

a) Tứ giác ABCD là hình gì ? Vì sao ?

b) Tiếp tuyến tại B và tại C của (O) cắt nhau tại M. Chứng minh rằng tam giác MBC đều.



Giải

a) ΔOAD đều $\Rightarrow \widehat{OAD} = 60^0$.

ΔAOB vuông cân tại O $\Rightarrow \widehat{AOB} = 90^0$.

sđ$\overset{\frown}{BD}$ = sđ$\overset{\frown}{AB}$ + sđ$\overset{\frown}{AD}$

và sđ$\overset{\frown}{AC}$ = sđ$\overset{\frown}{DC}$ + sđ$\overset{\frown}{AB}$

mà $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DC}$ (vì BD // AC)

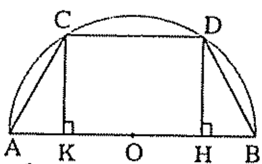
$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{BD}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$ $\Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow BD = AC$.

b) $\widehat{BOC} = 120^0$; $\widehat{OBM} = \dfrac{BC^2}{BD^2} = \dfrac{AC}{AD} = 90^0$, MB = MC.

BÀI TẬP NÂNG CAO

9. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2 cm, dựng dây CD song song AB (C thuộc cung AD). Tính độ dài các cạnh của hình thang ABCD. biết chu vi của nó bằng 5 cm.

Giải



Do CD // AB $\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AC = BD$

Đặt $AC = x \Rightarrow CD = 3 - 2x$

$\Delta KAC = \Delta HBD$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow AK = HB \Rightarrow OK = OH \Rightarrow HB = AK = \dfrac{2x-1}{2}$.

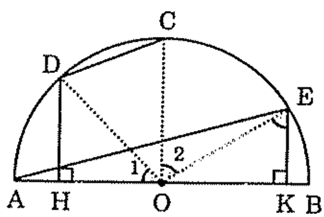
Lại có : $BD^2 = HB.AB = 2x - 1 \Rightarrow x^2 = 2x - 1$

Vậy AC = BD = CD = 1 (cm).

10. Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính 20 cm, C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Lấy điểm H thuộc OA sao cho OH = 6 cm. Đường vuông góc với OA tại H cắt nửa đường tròn tại D. Vẽ dây AE song song với CD. Gọi K là hình chiếu của E trên AB.

Tính diện tích ΔAEK.

Giải



$DC // AE \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CE} \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.

OC // EK nên $\widehat{O}_2 = \widehat{E}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{E}$.

Vậy $\Delta HOD = \Delta KEO$.

(cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow$ OK = DH và EK = OH = 6 (cm)

Mà $DH^2 = AH.HB = 4.16 = 64 \Rightarrow DH = OK = 8$ cm

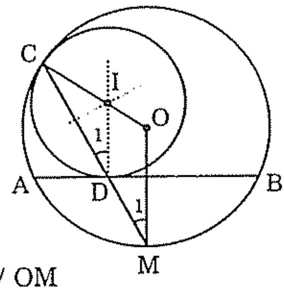
$$S_{AEK} = \frac{AK.EK}{2} = \frac{(10+8).6}{2} = 54\ (cm^2).$$

11. Gọi M là điểm chính giữa cung AB của đường tròn (O ; R). Kẻ dây MC cắt dây AB tại D.

a) Dựng đường tròn tâm I đi qua C và tiếp xúc với AB tại D.

b) Chứng minh (I) tiếp xúc trong với đường tròn (O).

Giải



a) Dựng đường thẳng a vuông góc với AB tại D.
Dựng đường thẳng b là trung trực của CD.
Gọi I là giao điểm của a và b $\Rightarrow$ (I ; ID) là đường tròn cần dựng. Chứng minh (dành cho bạn đọc).

b) $\widehat{DCO} = \widehat{M}_1$; $\widehat{D}_1 = \widehat{DCI}$

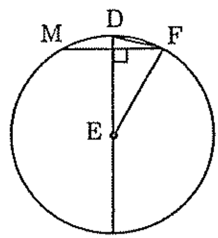
$\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB} \Rightarrow OM \perp AB$ mà $ID \perp AB \Rightarrow DI \,//\, OM$

$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{M}_1 \Rightarrow \widehat{DCI} = \widehat{DCO} \Rightarrow$ C, I, O thẳng hàng

$OI = R - r \Rightarrow$ (I) và (O) tiếp xúc trong tại C.

12. Cho tam giác DEF có $\widehat{D} = 75^0$ và đường FH bằng cạnh DE. Tính số đo góc $\widehat{DEF}$.

Giải



Dựng M là điểm đối xứng với F qua DE.

Dựng đường tròn ngoại tiếp ΔMDF.

$\widehat{FDM} = 2.75^0 = 150^0$, ta chứng minh được

sđ$\overset{\frown}{MD'F} = 300^0 \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{MDF} = 60^0$

Do MF = 2HF = DE.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF $\Rightarrow O \in DE$.

Lại có : OM = OF ; $\widehat{MOF} = 60^0 \Rightarrow \Delta$OMF đều

$\Rightarrow$ OD = MF = DE $\Rightarrow E \equiv O$. Vậy $\widehat{DEF} = 30^0$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

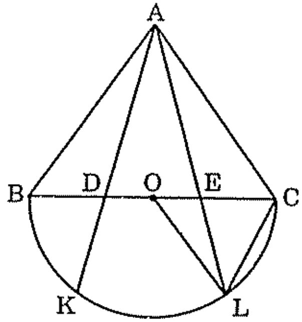
13. a) Lấy cạnh BC của tam giác ABC làm đường kính, vẽ nửa đường tròn ở miền ngoài của tam giác. Trên nửa đường tròn này lấy hai điểm K, L chia nửa đường tròn thành ba cung bằng nhau : $\overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{KL} = \overset{\frown}{LC}$. Chứng minh rằng các đường thẳng AK và AL chia đoạn thẳng BC thành ba phần bằng nhau.

(Đề thi chọn học bổng của Quận 9, tháng 11, năm 2001 – 2002)

b) Cho trước một góc bằng 19^0. Hãy dùng compa để vẽ một góc bằng 1^0.

(Đề thi vô địch toán cấp II – Liên Xô).

Giải



a) sđ $\overset{\frown}{LC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{COL} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta COL$ đều $\Rightarrow \widehat{OCL} = 60^0$.

$\Delta ABE \backsim \Delta LCE$ (g.g)

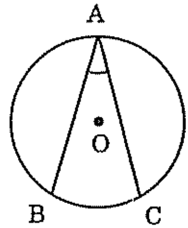
$\Rightarrow \dfrac{BE}{CE} = \dfrac{AB}{LC} = \dfrac{BC}{OC} = 2 \Rightarrow BE = 2CE$.

$BC = BE + EC = 3CE$. Lí luận tương tự $BC = 3BD \Rightarrow BD = DE = EC$.

b) Vẽ một đường tròn có tâm trùng với đỉnh của góc đã cho. Sau đó dựng trên đường tròn liên tiếp 19 cung bằng nhau, mỗi cung đều bằng 19^0 ta sẽ được : $19^0.19 = 361^0 \Rightarrow$ góc 1^0 ($= 361^0 - 360^0$).

§2. GÓC NỘI TIẾP

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ



1. Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.
2. Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.
3. Trong một đường tròn :
   - Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
   - Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
   - Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
   - Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

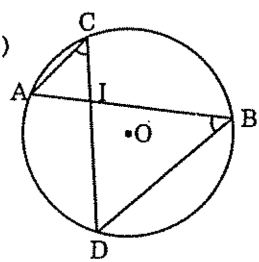
B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

14. Cho đường tròn (O), I là điểm nằm trong đường tròn (O). Qua I vẽ hai dây cung AB và CD của đường tròn (O). Chứng minh rằng :

$$IA.IB = IC.ID$$

Giải



Xét ΔICA và ΔIBD có : $\widehat{AIC} = \widehat{BID}$ (đối đỉnh)

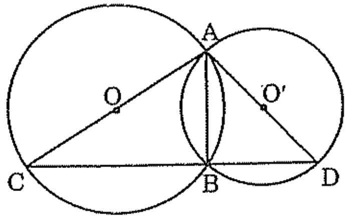
$\widehat{ICA} = \widehat{IBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

Do đó $\Delta ICA \backsim \Delta IBD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IA}{ID} = \dfrac{IC}{IB} \Rightarrow IA.IB = IC.ID$.

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ các đường kính AC, AD ($C \in (O)$ và $D \in (O')$). Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng.

Giải



Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

nên $\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^0$.

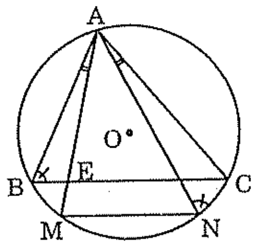
Vậy ba điểm C, B, D thẳng hàng.

. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O), MN là dây cung của đường tròn (O) song song với BC (M, N nằm trên cung nhỏ BC và M nằm giữa B, N).

a) Chứng minh tứ giác BMNC là hình thang cân.

b) AM cắt BC tại E. Chứng minh rằng : AB.AC = AN.AE.

Giải



a) Ta có BC // MN (gt)

nên tứ giác BMNC là hình thang

$\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CN}$ (vì BC // MN)

$\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{CNM}$

$\Rightarrow \widehat{BCN} = \widehat{CBM}$ (hệ quả góc nội tiếp)

Vậy tứ giác BMNC là hình thang cân.

b) Xét ΔABE và ΔANC, ta có:

$\widehat{BAE} = \widehat{NAC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

$\widehat{ABE} = \widehat{ANC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Do đó $\Delta ABE \backsim \Delta ANC$ (g.g)

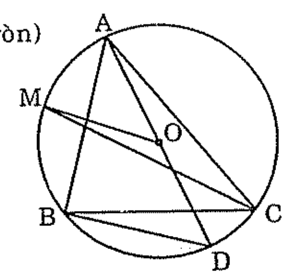
$\Rightarrow \dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AN.AE.$

. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường kính AD. Đường thẳng qua O và song song với BD cắt cung AB ở M. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ABD} = 90^0$

b) CM là tia phân giác góc $\widehat{ACB}$.

Giải



a) $\widehat{ABD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

b) Ta có OM // BD (gt)

Mà $AB \perp BD$ ($\widehat{ABD} = 90^0$)

Nên $OM \perp AB$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$

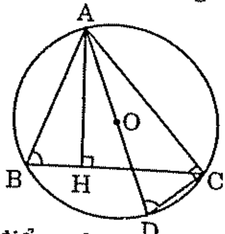
$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{BCM}$ (hệ quả góc nội tiếp)

Do đó CM là tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường cao AH của tam giác ABC và đường kính AD của đường tròn (O). Chứng minh rằng :

$$AB.AC = AH.AD$$

Giải



$\widehat{ACD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Delta ABH \backsim \Delta ADC$ (g.g)

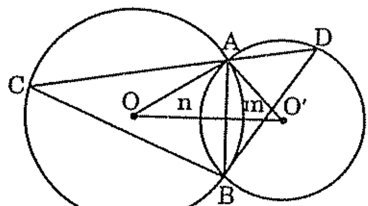
$\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AC = AH.AD.$

19. Cho hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B (O và O′ thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Một cát tuyến di động qua A cắt (O) tại C và cắt (O′) tại D sao cho A nằm giữa C và D. Chứng minh rằng :

a) $BC.OO' = AO.CD$

b) Số đo góc $\widehat{CBD}$ không đổi.

Giải



a) sđ $\widehat{ACB}$ = sđ $\widehat{AOO'}$ = $\dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AmB}$

sđ $\widehat{ADB}$ = sđ $\widehat{AOO'}$ = $\dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AnB}$

$\Rightarrow \Delta BCD \backsim \Delta AOO'$ (g.g)

b) $\widehat{CBD} = \widehat{OAO'}$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

20. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O ; R), vẽ cát tuyến MAB (A nằm giữa M, B). Các tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt đường thẳng qua M vuông góc với OM lần lượt tại C và D.

Chứng minh rằng : M là trung điểm CD.

Giải

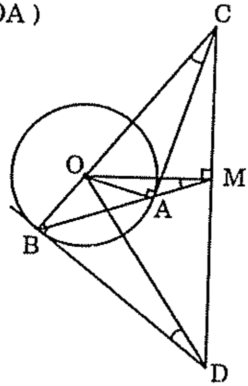
$\widehat{OAC} = \widehat{OMC} = 90^0 \Rightarrow$ O, A, M, C cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OMA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OA}$)

Tương tự $\widehat{OMB} = \widehat{ODB}$

$\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{ODB} \Rightarrow \Delta BDO \backsim \Delta ACO$ (g.g)

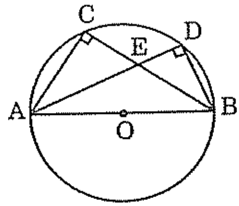
$\Rightarrow \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{OB}{OA} = 1 \Rightarrow OD = OC.$



Vậy ΔOCD cân tại O, nên đường cao OM cũng là đường trung tuyến.

21. Cho đường tròn (O ; R) đường kính AB. Hai dây AD và BC cắt nhau tại E nằm trong đường tròn (O).

Chứng minh rằng $AE.AD + BE.BC = 4R^2$



Giải

Ta có: $AE.AD = AE(AE + ED)$

$= AE^2 + AE.ED$

$= AE^2 + BE.CE$

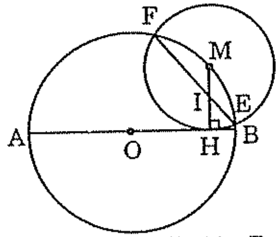
$BE.BC = BE^2 + BE.CE$.

$\Rightarrow AE.AD + BE.BC$

$= AE^2 + BE^2 + 2BE.CE = AC^2 + CE^2 + BE^2 + 2BE.CE$

$= AC^2 + (BE + CE)^2 = AC^2 + BC^2 = 4R^2$.

Cho điểm M ở trên đường tròn (O) đường kính AB. Đường tròn tâm M tiếp xúc AB tại H cắt (O) tại E, F. Đoạn thẳng EF cắt MH tại I. Chứng minh rằng IM = IH.



Giải

$I^2 - MH^2 = IO^2 - OM^2$

$= OH^2 + IH^2 - (OH^2 + MH^2)$

$\Rightarrow IM^2 = IH^2 \Rightarrow IM = IH$.

Cho đường tròn tâm O, vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm), C là một điểm trên đường tròn tâm M bán kính MA và nằm trong (O). Các tia AC, AB cắt (O) lần lượt tại P và Q. Chứng minh PQ là đường kính của (O).

Giải

$\widehat{MC} = 2\widehat{ABC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm chắn $\widehat{AC}$)

$\widehat{OQ} = 2\widehat{ABQ}$ (góc nội tiếp, góc ở tâm chắn $\widehat{AQ}$)

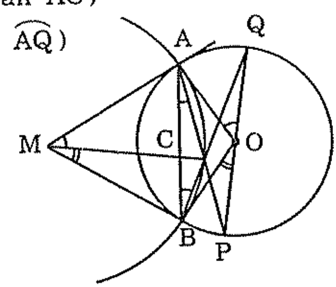
$\widehat{AMC} = \widehat{AOQ}$.

ương tự $\widehat{BMC} = \widehat{BOP}$

$\widehat{OQ} = \widehat{POB} + \widehat{AOQ} + \widehat{AOB}$

$= \widehat{AMC} + \widehat{BMC} + \widehat{AOB}$

$= \widehat{AMB} + \widehat{AOB} = 180^0$.

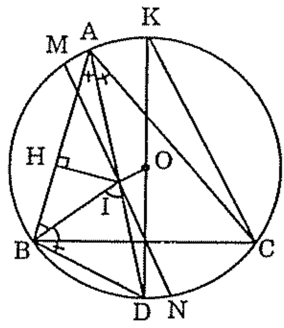


Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi đường tròn (I ; r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, H là tiếp điểm của AB với đường tròn (I), D là giao điểm của AI với đường tròn (O), DK là đường kính của đường tròn (O). Gọi d là độ dài của OI. Chứng minh rằng :

$\Delta AHI \backsim \Delta KCD$ b) $DI = DB = DC$

$IA.ID = R^2 - d^2$ d) $d^2 = R^2 - 2Rr$ (định lý Euler).

Giải



a) $\Delta AHI \backsim \Delta KCD$ (g.g)

b) $\widehat{BID} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}$ (1)

$\widehat{BDI} = \widehat{DBC} + \widehat{CBI} = \widehat{IAC} + \widehat{CBI}$ (2)

Từ (1), (2) cho $\widehat{BID} = \widehat{BDI} \Rightarrow$ ΔDBI cân tại D $\Rightarrow DB = DI = DC$.

c) Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với OI cắt (O) tại M, N

Ta có : $ID.IA = MI.NI = MI^2 = OM^2 - IO^2 = R^2 - d^2$

d) $\Delta AHI \backsim \Delta KCD \Rightarrow AI.CD = HI.KD \Rightarrow ID.IA = 2Rr$

Vậy $2Rr = R^2 - d^2$.

25. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ BC. Gọi D là giao điểm của MA và BC.

a) Chứng minh : $MA = MB + MC$

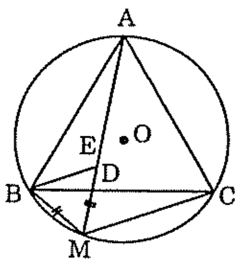
b) Chứng minh : $\dfrac{MD}{MB} + \dfrac{MD}{MC} = 1$.

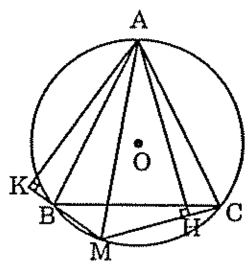
c) Tính tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo R

d) Xác định vị trí của điểm M để

$\dfrac{20}{MA} + \dfrac{11}{MD} + 2010\left(\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải





a) Dựng $E \in MA$: $MB = ME \Rightarrow \Delta MBE$ đều

$\Delta AEB = \Delta CMB$ (cgc) $\Rightarrow MC = AE$. Vậy $MA = AE + ME = MC + MB$.

b) $\Delta ABD \backsim \Delta CMD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BD}{MD} = \dfrac{AB}{CM} \Rightarrow \dfrac{MD}{CM} = \dfrac{BD}{AB}$

Tương tự $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{DC}{AB} \Rightarrow \dfrac{MD}{CM} + \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{DC + BD}{AB} = \dfrac{BC}{AB} = 1$.

c) Kẻ $AK \perp MB$; $AH \perp MC$

$MA^2 = AH^2 + MH^2$; $MB^2 = (KM - KB)^2 = BK^2 - 2KM.KB + KB^2$

$MC^2 = (MH + MC)^2 = MH^2 + MC^2 + 2MH.MC$

Suy ra : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = AH^2 + 3MH^2 + 2HC^2$

$= 2HA^2 + 2HC^2 = 2AC^2 = 6R^2$ (Vì $AH^2 = 3MH^2$).

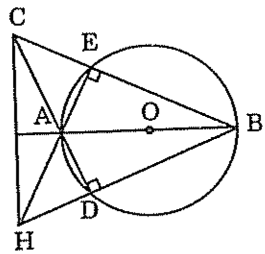
l) $\dfrac{20}{MA} + \dfrac{11}{MD} + 2010\left(\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}\right) \geq \dfrac{20}{MA} + 2021\left(\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC}\right)$

$\geq \dfrac{20}{2R} + \dfrac{8084}{2R} = \dfrac{4052}{R}$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

Cho đường tròn đường kính AB và một điểm C ở ngoài đường tròn. Hãy dựng một đường thẳng qua C và vuông góc với AB mà chỉ được dùng thước thẳng. (Đề thi vô địch toán cấp II – Liên Xô)

Giải



Nối AC cắt đường tròn (O) tại D

Nối CB cắt đường tròn (O) tại E

⇒ AE và BD là hai đường cao của ΔABC.

Gọi H là giao điểm của AE và BD

⇒ CH là đường thẳng cần dựng.

a) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, điểm I nằm trong tam giác. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ I đến các cạnh BC, AC, AB. Cho biết BC = a ; AC = b ; AB = c.

Chứng minh rằng : $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

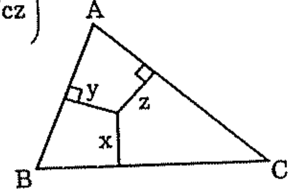
(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2002 – 2003)

b) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), AH là đường cao. Gọi D là giao điểm của AO với BC. Chứng minh rằng $\dfrac{HB}{HC} + \dfrac{DB}{DC} \geq 2.\dfrac{AB}{AC}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 1, (Vòng 2), Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011)

Giải

a) Ta có : 2S = ax + by + cz.

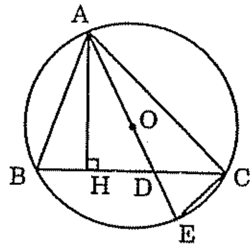


$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}.\sqrt{ax} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}.\sqrt{by} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}.\sqrt{cz}\right)^2$

$\leq \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)(ax + by + c) = \dfrac{ab + bc + ac}{abc}.2S$

$\leq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}.\dfrac{2abc}{4R} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$.

b) Vẽ AE là đường kính của đường tròn (O).



Chứng minh được $\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{AC}.\frac{EC}{EB}$ (1)

và $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.\frac{EB}{EC}$ (2)

Từ (1) và (2) áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho hai số dương, ta có $\frac{HB}{HC} + \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}\left(\frac{EC}{EB} + \frac{EB}{EC}\right) \ge 2.\frac{AB}{AC}$

§3. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

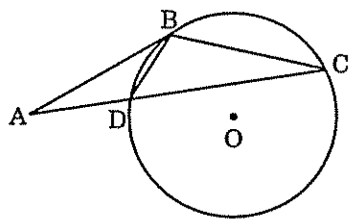
1. Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.
2. Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

28. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ADC không qua O (D nằm giữa A và C).

Chứng minh rằng : $\frac{AD}{AC} = \frac{BD^2}{BC^2}$.



Giải

Xét ΔABD và ΔACB có $\widehat{BAD}$ chung

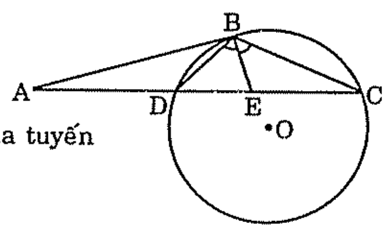
$\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta ACB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{BD}{CB} \Rightarrow \frac{AB}{AC}.\frac{AD}{AB} = \frac{BD}{CB}.\frac{BD}{CB}$. Vậy $\frac{AD}{AC} = \frac{BD^2}{BC^2}$.

29. Cho điểm A ngoài đường tròn (O). Vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ADC không qua O (D nằm giữa A và C). Vẽ BE là đường phân giác của tam giác BDC. Chứng minh rằng tam giác ABE cân.

Giải



$\widehat{MBE} = \widehat{MBD} + \widehat{DBE}$

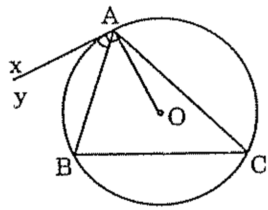
$\widehat{MEB} = \widehat{ECB} + \widehat{CBE}$

$\widehat{MBD} = \widehat{ECB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tuyến với dây cung) $\Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{MEB}$.

Do đó tam giác ABE cân tại A.

am giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Vẽ tia Ax sao cho nằm giữa hai tia AC và Ax, $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$. Chứng minh rằng Ax tiếp tuyến của đường tròn (O).

Giải



Ay là tiếp tuyến của đường tròn (O) Ax, Ay cùng thuộc nửa mặt phẳng ứa AB.

$\widehat{AB} = \widehat{ACB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia ến và dây cung).

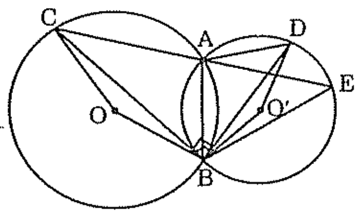
$= \widehat{ACB}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{yAB} = \widehat{xAB}$.

i tia Ax, Ay trùng nhau. Vậy Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O).

i đường tròn (O ; R) và (O' ; R') (R > R') cắt nhau tại A và B. uyến của (O') tại B cắt (O) tại C. Tiếp tuyến của (O) tại B cắt i D. CA cắt (O') tại E (E ≠ A). Chứng minh rằng :

$= CB^2$ b) $CA.DA = AB^2$ c) $\frac{BC^2}{BD^2} = \frac{CA}{DA}$ d) $\frac{BC}{BD} = \frac{R}{R'}$

Giải



A ∽ ΔCEB (g.g).

A ∽ BDA (g.g).

$= AB^2$; $BD^2 = DA^2$; $AB^2 = CA.DA$.

C ∽ ΔO'BD.

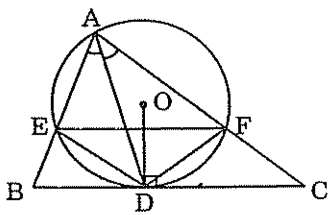
giác ABC, phân giác AD. Vẽ đường tròn tâm O qua A và với BC tại D cắt các cạnh AB và AC lần lượt ở E và F. minh rằng :

b) $AB.BE = BD^2$

ΔABD

d) $AD^2 = AC.AE$.

Giải



F.

ΔBDA (g.g).

DB.

ΔADC (g.g).

ÂNG CAO

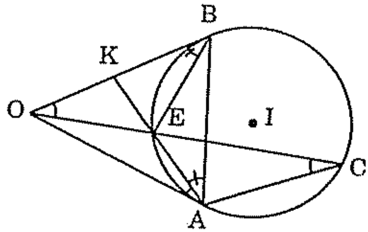
tròn (I) tiếp xúc với hai cạnh Ox và Oy của góc $\widehat{xOy}$ tại A A kẻ tia song song với OB cắt (I) tại C. Đoạn thẳng OC g tròn (I) tại E. Hai đường thẳng AE và OB cắt nhau tại K. inh : a) ΔKOE ∽ ΔKAO b) K là trung điểm OB.

34

35.

36.

Giải



a) $\Delta KOE \backsim \Delta KAO$ (g.g).

$\Rightarrow OK^2 = KE.AK$.

b) $\Delta KBE \backsim \Delta KAB$ (g.g).

$\Rightarrow KB^2 = AK.KE$.

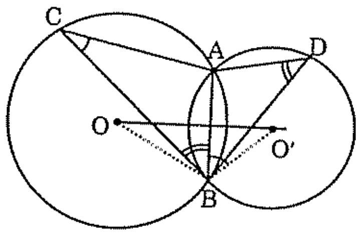
Suy ra : $OK^2 = BK^2 \Rightarrow OK = BK$

Vậy K là trung điểm OB.

34. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') (R > R') cắt nhau tại A, B. Tiếp tuyến của (O') tại B cắt (O) tại C và tiếp tuyến của (O) tại B cắt (O') tại D. Chứng minh :

a) $AB^2 = AC.AD$ b) $\dfrac{BC^2}{BD^2} = \dfrac{AC}{AD}$ c) $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{R}{R'}$.

Giải



a) $\Delta ABC \backsim \Delta ADB$ (g.g) $\Rightarrow AB^2 = AC.AD$

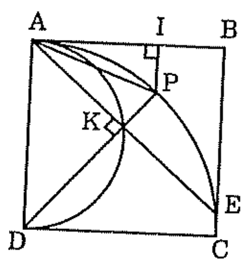
b) $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow \dfrac{AB^2}{AD^2} = \dfrac{BC^2}{BD^2}$

$\dfrac{AB^2}{AD^2} = \dfrac{AC.AD}{AD^2} = \dfrac{AC}{AD} \Rightarrow \dfrac{BC^2}{BD^2} = \dfrac{AC}{AD}$.

c) $\Delta OBC \backsim \Delta O'BD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{R}{R'}$.

35. Trong hình vuông ABCD, vẽ nửa đường tròn đường kính AD và vẽ cung AC mà tâm là D. Nối D với điểm P bất kỳ trên cung AC, DP cắt nửa đường tròn đường kính AD tại K. Chứng minh rằng PK bằng khoảng cách từ P đến cạnh AB.

Giải



Kẻ PI vuông góc với AB.

Kéo dài AK cắt đường tròn tâm D tại E

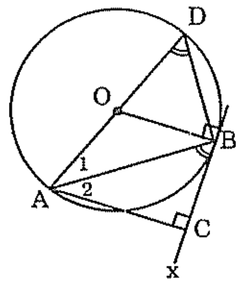
$DK \perp AE \Rightarrow \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{PE}$

$\widehat{BAE}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây chắn $\overset{\frown}{AE}$, AP đi qua điểm chính giữa $\overset{\frown}{AE}$

$\Rightarrow$ AP phân giác $\widehat{BAE} \Rightarrow PK = PI$.

. Cho đường tròn (O), dây cung AB và đường kính AD. Vẽ tiếp tuyến Bx với đường tròn tại B. Từ A kẻ AC vuông góc Bx. Chứng minh AB là phân giác của góc DAC.

Giải



$\widehat{ADB} = \widehat{ABx}$

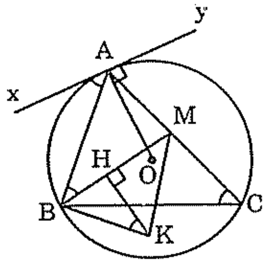
(cùng chắn $\widehat{AB}$)

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

(cùng phụ hai góc bằng nhau).

7. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có CH là đường cao, M và N là hình chiếu của đỉnh C lần lượt trên các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn. Tam giác ABC phải thoả mãn điều kiện gì để CM + CN = 2CH ?

Giải



$\Delta ACH \backsim \Delta BCN \Rightarrow \dfrac{CH}{CN} = \dfrac{AC}{BC}$.

$\Delta BCH \backsim \Delta ACM \Rightarrow \dfrac{CH}{CM} = \dfrac{BC}{AC}$.

Suy ra $\dfrac{CH^2}{CN.CM} = 1 \Rightarrow CH^2 = CN.CM$.

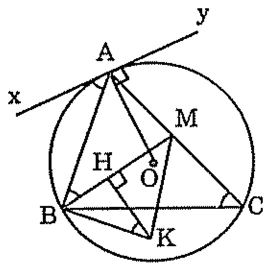
$CM + CN \geq 2\sqrt{CM.CN} = 2CH$.

8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Qua đỉnh B kẻ đường thẳng song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn, đường này cắt AC tại M.

a) Chứng minh hệ thức $AB^2 = AC.AM$.

b) Chứng tỏ rằng đường thẳng AB là tiếp tuyến của đường tròn đi qua B, C và M.

Giải



a) $\widehat{ACB} = \widehat{BAx} = \widehat{ABM}$

$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow AB^2 = AM.AC$.

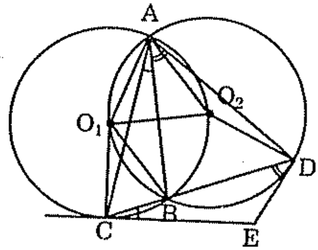
b) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBMC. Kẻ $KH \perp BM$

$\Rightarrow \widehat{BKH} = \dfrac{1}{2}\widehat{BKM} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BKH} = \widehat{ABM}$.

Ta có : $\widehat{ABM} + \widehat{HBK} = \widehat{BKH} + \widehat{HBK} = 90^0 \Rightarrow AB \perp BK$, BK là bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\Delta BMC \Rightarrow$ AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBMC.

9. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2), đường tròn này đi qua tâm của đường tròn kia. Qua một giao điểm của hai đường tròn kẻ một cát tuyến cắt hai đường tròn tại C và D. Tính góc hợp bởi hai tiếp tuyến với hai đường tròn tại C và D.

Giải



ΔAO_1O_2 đều, $\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AO_1B} = \sqrt{3} = 60^0$

Tương tự $\widehat{ADB} = 60^0 \Rightarrow \Delta ACD$ đều.

$\widehat{CED} = 180^0 - (\widehat{ECD} + \widehat{EDC})$

$= 180^0 - (\widehat{CAB} + \widehat{DAB})$

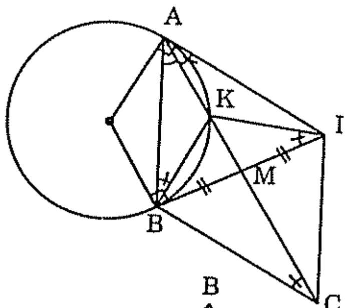
$= 180^0 - 60^0 = 120^0$.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

40. a) Từ điểm I ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến IA ; IB đến (O). Gọi M là trung điểm của IB, AM cắt (O) tại A và K. Chứng minh rằng $AB^2 = 2AK.AM$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác IKB tiếp xúc với AB.
(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1992 – 1993)

b) Cho hình thoi ABCD có $\widehat{B} = 60^0$. Một đường thẳng qua D không cắt hình thoi nhưng cắt đường thẳng AB, BC tại E, F. AF cắt CE tại M. Chứng minh rằng AD tiếp xúc đường tròn qua D, M, F.
(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1998 – 1999)

Giải



a) Dựng C là điểm đối xứng của A qua M.

Ta có : $\widehat{ABK} = \widehat{KAI} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta AKB$ (g.g).

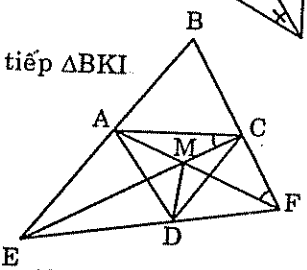
$\Rightarrow AB^2 = AK.AC = 2AK.AM$

$MB^2 = MI^2 = MK.AM$

$\Rightarrow \Delta MIK \backsim \Delta MAI$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{KIB} = \widehat{IAC} = \widehat{ABK}$

$\Rightarrow$ AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBKI.



b) $\Delta EAD \backsim \Delta DCF$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{EA}{CD} = \dfrac{AD}{CF} \Rightarrow \dfrac{EA}{AC} = \dfrac{AC}{CF}$

$\Rightarrow \Delta AEC \backsim \Delta CAF$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{CFA}$

Suy ra $\Delta ACM \backsim \Delta AFC$ (g.g) $\Rightarrow AD^2 = AC^2 = AM.AF$.

Vậy AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔDMF.

41. Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua hai điểm B và C. Vẽ các tiếp tuyến AD, AE với đường tròn (O) (D, E là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng : $AD^2 = AB.AC$. Từ đó suy ra D thuộc một đường cố định.

b) Chứng minh rằng đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

c) Gọi MN là đường kính của đường tròn (O) vuông góc với BC. Gọi K là giao điểm của AM với đường tròn (O). Chứng minh rằng AB, DE, KN đồng quy.

(Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận 1 (Vòng 2), Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011)

Giải

a) $\Delta ADB \backsim \Delta ACD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB.AC$

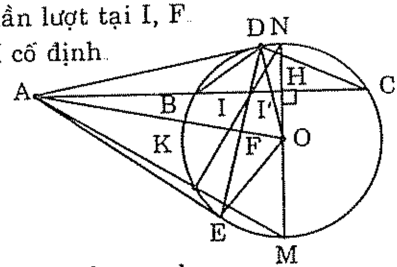
$AD = \sqrt{AB.AC}$, không đổi $D \in (A\ ;\ \sqrt{AB.AC})$

b) Vẽ $OH \perp AC$ tại H. DE cắt AC, AO lần lượt tại I, F.

$AI.AH = AF.AO = AD^2 = AB.AC \Rightarrow$ I cố định.

(Vì A, B, C, H cố định).

c) Gọi I' là giao điểm của AB và KN. Chứng minh được AI' = AI $\Rightarrow$ I' ≡ I.



§4. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

– Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

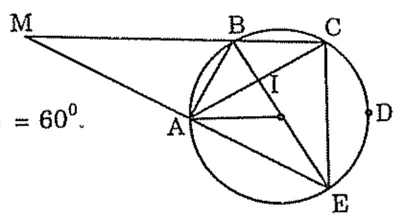
– Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

B/ BÀI TẬP

🕮 BÀI TẬP CƠ BẢN

42. Trên đường tròn (O ; R) lấy các dây cung liên tiếp nhau AB = BC = CD = DE = R. Tia CB và EA cắt nhau tại M. CA cắt BE tại I. Tính số đo các cung AB, BC, CD, DE. Từ đó suy ra số đo của các góc BME, CIE.

Giải



ΔAOB đều $\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB} = 60^0$

Ta có AB = BC = CD = DE = R (gt)

Suy ra sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{BC}$ = sđ$\overset{\frown}{CD}$ = sđ$\overset{\frown}{DE} = 60^0$.

Và sđ$\overset{\frown}{CDE}$ = sđ$\overset{\frown}{CD}$ + sđ$\overset{\frown}{DE} = 120^0$

$\widehat{BME}$ là góc có đỉnh ở ngoài đường tròn

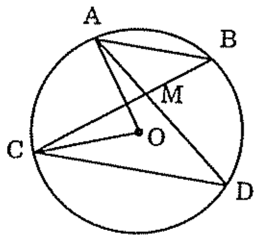
Do đó $\widehat{BME} = \frac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{CDE} - sđ\overset{\frown}{AB}) = \frac{1}{2}(120^0 - 60^0) = 30^0$.

$\widehat{CIE}$ là góc có đỉnh ở trong đường tròn

do đó $\widehat{CIE} = \frac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{CDE} + sđ\overset{\frown}{AB}) = \frac{1}{2}(120^0 + 60^0) = 90^0$.

43. Cho đường tròn (O) và hai dây cung song song AB, CD (B, D cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AC). Gọi M là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng $\widehat{BMD} = \widehat{AOC}$.

Giải



Ta có AB // CD $\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

$\widehat{BMD}$ là góc có đỉnh ở trong đường tròn

Do đó $\widehat{BMD} = \frac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{BD} + sđ\overset{\frown}{AC})$

$= \frac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{AC} + sđ\overset{\frown}{AC}) = sđ\overset{\frown}{AC}$.

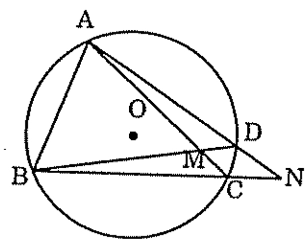
$\widehat{AOC}$ là góc ở tâm, do đó : $\widehat{AOC} = sđ\overset{\frown}{AC}$. Vậy $\widehat{BMD} = \widehat{AOC}$.

44. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Điểm D di động trên cung AC. Gọi M là giao điểm của AC và BD, N là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh rằng : $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 2\widehat{ACB}$.

b) Giả sử AB = AC. Chứng minh rằng : AD.AN không đổi.

Giải



a) $\widehat{AMB}$ là góc có đỉnh ở trong đường tròn

Do đó $sđ\widehat{AMB} = \frac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{AB} + sđ\overset{\frown}{DC})$.

$\widehat{ANB}$ là góc có đỉnh ở ngoài đường tròn

Do đó $sđ\widehat{ANB} = \frac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{AB} - sđ\overset{\frown}{DC})$.

Suy ra $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = sđ\overset{\frown}{AB}$

$sđ\widehat{ACB} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AB}$ (góc nội tiếp)

Vậy $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 2\widehat{ACB}$

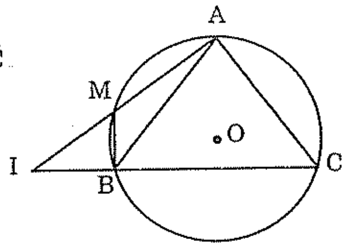
b) $\Delta ACD \backsim \Delta ANC$ (g.g). Do đó $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AN} \Rightarrow AD.AN = AC^2$.

. Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). M là điểm trên cung AB. Gọi I là giao điểm của AM và tia CB. Chứng minh rằng : $AB^2 = AM.AI$.

Giải

Ta có $\widehat{AIB} = \frac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{AC} - sđ\overset{\frown}{BM})$ (góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn)

Và $\widehat{ABM} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AM}$ (góc nội tiếp).



Mà AB = AC (ΔABC cân tại A) $\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$.

$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AC}$ – sđ$\overset{\frown}{BM}$ = sđ$\overset{\frown}{AB}$ – sđ$\overset{\frown}{BM}$ = sđ$\overset{\frown}{AM}$

Do đó $\widehat{AIB} = \widehat{ABM}$ và $\widehat{AIB}$ là góc chung

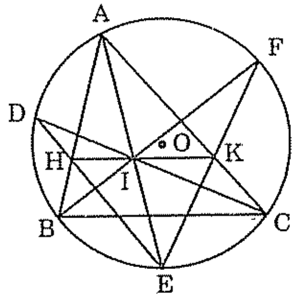
$\Rightarrow \Delta AIB \backsim \Delta ABM$

nên $\frac{AI}{AB} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow AB^2 = AM.AI$.

46. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cung AB, BC, CA. CD cắt BF tại I, DE cắt AB tại H, FE cắt AC tại K. Chứng minh rằng :

a) A, I, E thẳng hàng b) $\widehat{EIB} = \widehat{EBI}$ c) HB = HI.

Giải



a) I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

b) sđ$\widehat{EIB} = \frac{1}{2}$(sđ$\overset{\frown}{AF}$ + sđ$\overset{\frown}{BE}$)

sđ$\widehat{EBI} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{EF} = \frac{1}{2}$(sđ$\overset{\frown}{FC}$ + sđ$\overset{\frown}{EC}$).

c) ΔEBI có EH là đường phân giác

$\Rightarrow$ EH là đường trung trực của BI.

BÀI TẬP NÂNG CAO

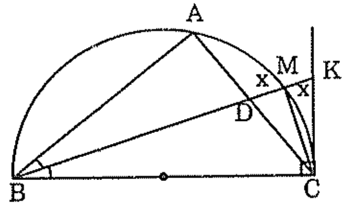
47. Tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính 5 cm. Tiếp tuyến với nửa đường tròn tại C cắt tia phân giác của góc B tại K. BD cắt AC tại D và BD = 4 cm. Tính độ dài BK.

Giải

Gọi M là giao điểm của DK và (O)

sđ$\widehat{KDC} = \frac{1}{2}$(sđ$\overset{\frown}{AB}$ + sđ$\overset{\frown}{MC}$) = $\frac{1}{2}$(sđ$\overset{\frown}{AB}$ + sđ$\overset{\frown}{AM}$) = $\frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BM}$.

sđ$\widehat{BKC} = \frac{1}{2}$(sđ$\overset{\frown}{BC}$ – sđ$\overset{\frown}{MC}$) = $\frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BM}$



$\Rightarrow \widehat{KDC} = \widehat{BKC} \Rightarrow$ ΔCKD cân tại C.

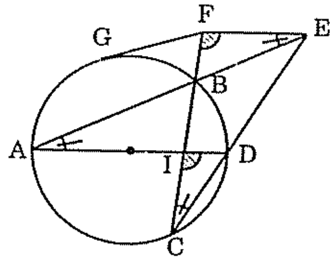
Đặt DM = MK = x, ta được :

$BC^2 = BM.BK \Leftrightarrow (x + 4)(2x + 4) = 25$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3\sqrt{6} - 6}{2}$ (do x > 0)

Vậy BK = $3\sqrt{6} - 2$ (cm).

48. Hai dây cung AB và CD của đường tròn (O) kéo dài cắt nhau tại E ngoài đường tròn. Đường thẳng kẻ từ E song song với AD cắt đường thẳng BC tại F. Từ F dựng tiếp tuyến FG với đường tròn (G là tiếp điểm). Chứng minh :



a) $\text{sđ}\,\widehat{EFC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\widehat{AB} + \text{sđ}\,\widehat{CD})$

b) FG = FE.

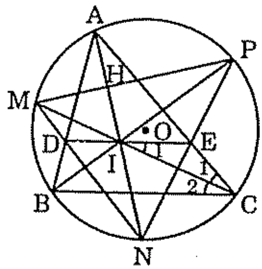
Giải

$\Delta FCE \backsim \Delta FEB$ (g.g) $\Rightarrow FE^2 = FC.FB$.

Lại có $FG^2 = FC.FB \Rightarrow FE^2 = FG^2 \Rightarrow FE = FG$.

49. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các điểm M, N, P là điểm chính giữa của các cung AB ; BC ; CA. Gọi D là giao điểm của MN và AB, E là giao điểm của PN và AC. Chứng minh DE // BC.

Giải



Gọi I là giao điểm của BP và CM

Gọi $\Rightarrow$ A, I, N thẳng hàng

$\widehat{PIC} = \widehat{PCI} \Rightarrow PI = PC$

$\widehat{NIC} = \widehat{NCI} \Rightarrow NI = NC$.

Vậy NP là đường trung trực IC.

$\Rightarrow IE = IC \Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{C}_1$; $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$

$\Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{C}_2 \Rightarrow IE \parallel BC$

Tương tự ID // BC $\Rightarrow$ D, I, E thẳng hàng $\Rightarrow$ DE // BC.

50. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác. M, N, P theo thứ tự là tâm của các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C. Gọi K là điểm đối xứng với I qua O. Chứng minh rằng K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Giải

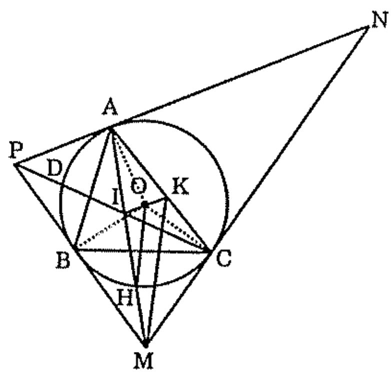
Gọi D và H lần lượt là giao điểm của IC và AI với (O)

Ta có : A, I, M thẳng hàng, P, I, C thẳng hàng $\Rightarrow$ D là điểm chính giữa của $\widehat{AB}$; H là điểm chính giữa của $\widehat{CB}$.

$\widehat{ICM} = 90^0$

$\widehat{HIC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\widehat{DA} + \text{sđ}\,\widehat{HC})$;

$\widehat{HCI} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\widehat{BD} + \text{sđ}\,\widehat{BH}) \Rightarrow HI = HC$.



Ta có $\widehat{HMC} = \widehat{HCM}$

$\Rightarrow HC = HM = HI$

$\Rightarrow$ H là trung điểm IM

$\Rightarrow$ HO là đường trung bình ΔIMK

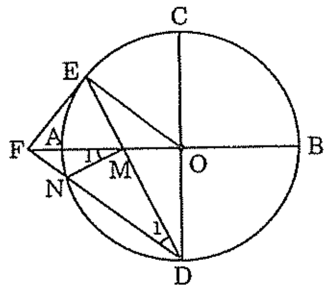
$\Rightarrow HO = \dfrac{KM}{2} \Rightarrow KM = 2R.$

Tương tự KN = KP = 2R ⇒ K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNP

51. Cho hai đường kính AB, CD vuông góc của đường tròn (O) và M là điểm thuộc bán kính OA. Kẻ dây DE qua M, tiếp tuyến tại E cắt AB tại F.

a) Chứng minh tam giác FME cân và $MF^2 = FA.FB$.

b) FD cắt đường tròn (O) tại N. Chứng minh FM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MDN.



Giải

a) $\widehat{FEM} = \dfrac{1}{2}\widehat{EOD}$; $\widehat{FME} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{EA} + \text{sđ}\overset{\frown}{BD})$

$= \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ED} = \dfrac{\widehat{EOD}}{2}.$

$\Rightarrow \widehat{FEM} = \widehat{FME} \Rightarrow$ ΔMFE cân.

b) $FE^2 = FA.FB = FM^2$

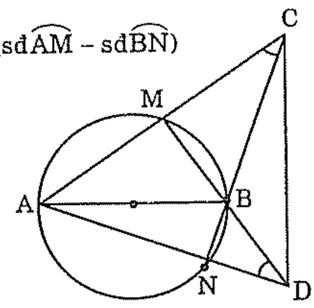
Suy ra ΔFNM ∽ ΔFMD (c.g.c) ⇒ $\widehat{M}_1 = \widehat{D}_1$

⇒ FM là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔMDN.

52. Cho đường tròn (O), dây cung AB. Trên hai cung AB lần lượt lấy các điểm M và N. Hai tia AM và NB cắt nhau tại C, hai tia AN và MB cắt nhau tại D. Cho biết $\widehat{ACN} = \widehat{ADM}$. Chứng minh AB vuông góc CD.

Giải

$\text{sđ}\,\widehat{ACN} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AN} - \text{sđ}\overset{\frown}{BM})$; $\text{sđ}\,\widehat{ADM} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AM} - \text{sđ}\overset{\frown}{BN})$



$\Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{AN} + \text{sđ}\overset{\frown}{BN} = \text{sđ}\overset{\frown}{AM} + \text{sđ}\overset{\frown}{BM}$

Do đó $\text{sđ}\overset{\frown}{ANB} = \text{sđ}\overset{\frown}{AMB} = 180^0$

⇒ AB là đường kính.

Vậy B trực tâm của ΔACD ⇒ AB ⊥ CD.

📖 BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

53. a) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Đường phân giác trong và ngoài của góc A cắt đường thẳng BC lần lượt tại D và E. Cho biết AD = AE ; AB = 1,4 ; AC = 4,8, tính bán kính R.

(Đề thi chọn học bổng Toán lớp 9 – Quận 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2005 – 2006)

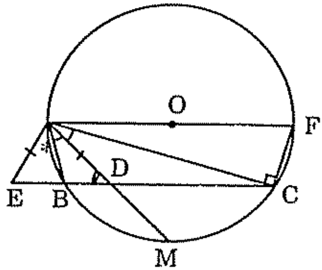
b) Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Hai đường thẳng AP và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng:

1) $\widehat{ABP} = \widehat{AMB}$

2) MA.MP = BA.BM.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh, năm học 2010 – 2011)

Giải



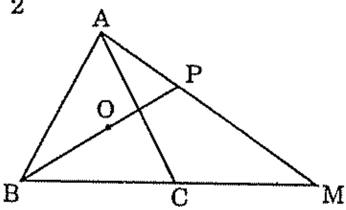
a) Gọi M là giao điểm của tia AD và đường tròn (O). Vẽ đường kính AF, ΔADE vuông cân $\Rightarrow \widehat{ADB} = 45^0$.

$sđ\overset{\frown}{AB} + sđ\overset{\frown}{MC} = 90^0$. Lại có $sđ\overset{\frown}{ABF} = 180^0$ nên $sđ\overset{\frown}{MB} + sđ\overset{\frown}{CF} = 90^0 \Rightarrow \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MC}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CF} \Rightarrow CF = AB = 1,4$

ΔACF vuông tại C có : $AF^2 = AC^2 + CF^2 = 25 \Rightarrow R = \dfrac{AF}{2} = 2,5$ (cm).

b) 1) $\widehat{ABP} = \dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AP} = \dfrac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{AC} - sđ\overset{\frown}{PC}) = \dfrac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{AB} - sđ\overset{\frown}{PC}) = \widehat{AMB}$



2) ΔCAM cân tại C $\Rightarrow AC = CM$

$\Delta MAC \backsim \Delta MBP \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MC}{MP}$

$\Rightarrow MA.MP = MC.MB$

Vậy MA.MP = BA.BM.

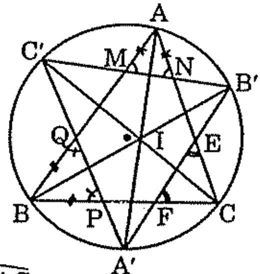
54. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và I là điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng AI, BI, CI cắt đường tròn (O) lần lượt tại A′, B′, C′ (khác A, B, C). Dây cung B′C′ cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại các điểm M, N. Dây cung A′C′ cắt các cạnh BC, AB tương ứng tại các điểm P, Q. Dây cung A′B′ cắt các cạnh BC, CA tương ứng tại các điểm F, E.

a) Giả sử AM = AN ; BP = BQ ; CE = CF xảy ra đồng thời. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Giả sử AM = AN = BP = BQ = CE = CF. Chứng minh rằng sáu điểm M, N, P, Q, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

(Đề thi vào lớp 10 khối chuyên Toán – Tin, Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2006)

Giải



a) $AM = AN \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB'} + \overset{\frown}{BC'} = \overset{\frown}{AC'} + \overset{\frown}{CB'}$

Tương tự BP = BQ

$\Rightarrow sđ\overset{\frown}{AC'} + sđ\overset{\frown}{BA'} = sđ\overset{\frown}{BC'} + sđ\overset{\frown}{CA'}$

$CE = CF \Rightarrow sđ\overset{\frown}{BA'} + sđ\overset{\frown}{CB'} = sđ\overset{\frown}{CA'} + sđ\overset{\frown}{AB'}$

Suy ra : $\overset{\frown}{BA'} = \overset{\frown}{CA'} \Rightarrow AA'$ đường phân giác $\widehat{BAC}$.

Tương tự : BB' đường phân giác $\widehat{ABC}$ $\Rightarrow$ I tâm đường tròn nội tiếp.

b) Từ giả thiết suy ra AA', BB', CC' là các đường phân giác của ΔABC.

AM = AN, AI là tia phân giác $\widehat{MAN}$ nên AI là đường trung trực MN.

Do $\overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{CB'}$ nên $\overset{\frown}{AC'B'} = \overset{\frown}{CC'B'}$

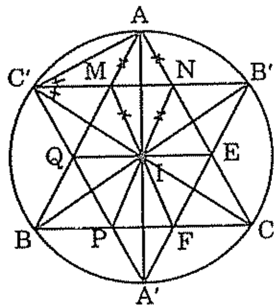
mà $AI \perp B'C'$ $\Rightarrow$ B'C' trung trực IA

$\Rightarrow$ IM = AM = AN = IN

Tương tự IP = BP = BQ = IQ

và IE = CE = CF = IF

Suy ra điều phải chứng minh.



§5. CUNG CHỨA GÓC

/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

Với đoạn thẳng AB và góc α ($0^0 < \alpha < 180^0$) cho trước thì quỹ tích của các điểm M thoả mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB.

Chú ý :

– Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng với nhau qua AB.

– Hai điểm A, B thuộc quỹ tích.

– Khi $\alpha = 90^0$. Quỹ tích các điểm nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

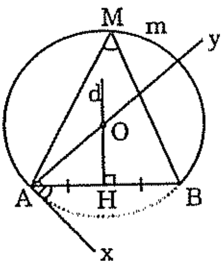
Cách vẽ cung chứa góc α

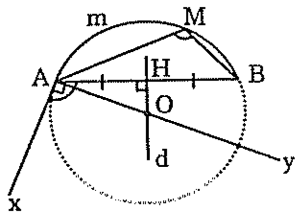
– Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB.

– Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α.

– Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax, gọi O là giao điểm của Ay với d.

– Vẽ cung AmB, tâm O, bán kính OA sao cho cung này thuộc nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax, $\overset{\frown}{AmB}$ được vẽ như trên là một cung chứa góc α.





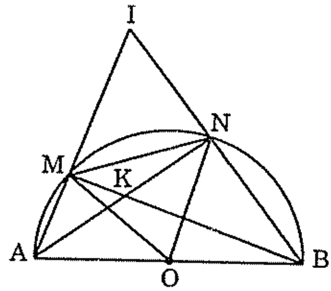
/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

5. Cho nửa đường tròn (O ; R) đường kính AB. M, N di động trên nửa đường tròn sao cho M nằm trên cung AN và MN = R. Gọi I là giao điểm của AM và BN, K là giao điểm của AN và BM. Chứng minh rằng :

a) Điểm I thuộc một đường cố định. b) Điểm K thuộc một đường cố định.

Giải



a) ΔOMN đều $\Rightarrow \widehat{MON} = 60^0$

$$\widehat{AIB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{MN}) = 60^0$$

(góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn)

$$\widehat{AKB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{MN}) = 120^0$$

(góc có đỉnh ở bên trong đường tròn).

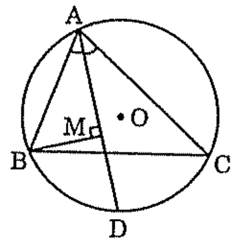
Do đó :

Điểm I thuộc cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn AB.

Điểm K thuộc cung chứa góc 120^0 dựng trên đoạn AB.

56. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O). A là điểm di động trên cung lớn BC. Phân giác góc BAC cắt cung BC tại D. Gọi M là hình chiếu của B trên AD. Chứng minh rằng điểm M thuộc một đường cố định.

Giải



Ta có $\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DC}$ (góc nội tiếp)

Mà $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ (vì AD là tia phân giác $\widehat{BAC}$)

Nên $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow$ D cố định và $\widehat{BMD} = 90^0$.

Vậy điểm M thuộc cung chứa góc 90^0 dựng trên đoạn BD (cung nằm bên trong đường tròn (O)).

57. Dựng tam giác ABC biết AC = 5 cm, BC = 6 cm, $\widehat{A} = 50^0$.

Giải

– Dựng đoạn thẳng BC = 6 cm ;

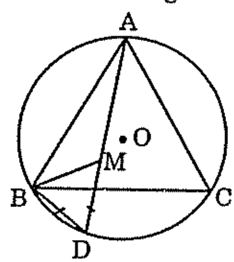
– Dựng cung chứa góc 50^0 trên đoạn BC ;

– Dựng đường tròn (C ; 5 cm).

A là giao điểm của đường tròn (C ; 5 cm) và cung chứa góc 50^0 dựng trên đoạn BC.

58. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O). D là điểm di động trên cung BC. Trên AD lấy điểm M sao cho DB = DM. Chứng minh rằng điểm M thuộc một đường cố định.

Giải



Ta có $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$\widehat{BCA} = 60^0$ (ΔABC đều)

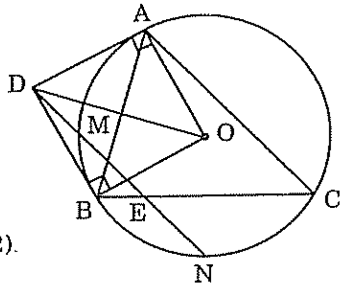
$\Rightarrow \widehat{BDM} = 60^0$ nên ΔBDM đều.

Do đó $\widehat{BMD} = 60^0$ nên $\widehat{BMA} = 120^0$

Vậy điểm M thuộc cung chứa góc 120^0 dựng trên đoạn AB.

9. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) (AB < AC). Hai tiếp tuyến tại A và B cắt nhau tại D. Từ D kẻ một cát tuyến song song với AC cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại M, N (M nằm giữa D và N). Chứng minh rằng bốn điểm O, E, B, D cùng thuộc một đường tròn.

Giải



Ta có AC // DN (gt)

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{DEB}$ (1).

DA, DB là các tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow$ OD là tia phân giác góc AOB

$\Rightarrow \widehat{DOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

mà $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$. Do đó $\widehat{ACB} = \widehat{DOB}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DEB} = \widehat{DOB}$.

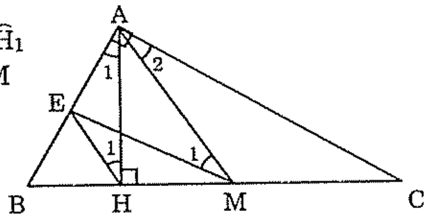
Vậy O, E, B, D cùng thuộc một đường tròn.

3 BÀI TẬP NÂNG CAO

0. Cho tam giác ABC có AB ≠ AC, góc B và C là các góc nhọn. Kẻ đường cao AH, trung tuyến AM trong đó $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Tính góc $\widehat{BAC}$.

Giải

Gọi E là trung điểm của AB $\Rightarrow$ ME là đường trung bình ΔABC



$\Rightarrow$ ME // AC ; $\widehat{A}_2 = \widehat{M}_1$; $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

ΔAEH cân tại E $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{H}_1 \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{H}_1$

M, H là hai đỉnh kề của tứ giác AEHM

$\Rightarrow$ A, E, H, M thuộc một đường tròn

Lại có: $\widehat{AHM} = \widehat{AEM} = 90^0$

$\Rightarrow AB \perp ME \Rightarrow AB \perp AC$.

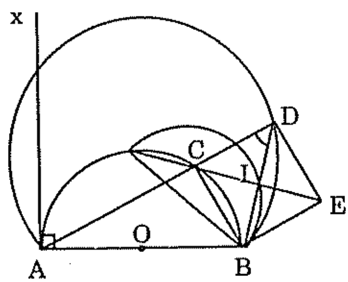
Vậy $\widehat{BAC} = 90^0$.

1. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm C di động trên nửa đường tròn. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC hình vuông BCDE. Tìm quỹ tích :

a) Các đỉnh D.

b) Tâm I của hình vuông.

Giải



a) ΔBCD vuông cân $\Rightarrow \widehat{ADB} = 45^0$.

Quỹ tích của D là cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn AB, được giới hạn bởi tia tiếp tuyến Ax.

b) Gọi F là giao điểm của EC với (O). $\frac{S_1}{S_2} = \frac{R(l + R)}{4r^2} = \widehat{DCE} = 45^0$, mà $\widehat{ACF}$ nội tiếp $\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AF} = 90^0$

hay F là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$.

Vậy quỹ tích I là nửa đường tròn đường kính BF.

62. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn, có BC cố định. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC khi A chuyển động trên cung BC.

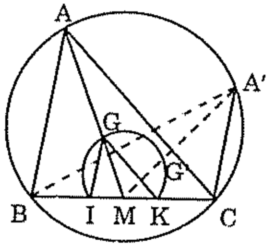
Giải

Phần thuận

Kẻ GI // AB; GK // AC. Gọi M trung điểm BC. Ta có:

$\dfrac{MG}{MA} = \dfrac{MI}{MB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MB = 3MI$

$\dfrac{MG}{MA} = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MC = 3MK$



$BC = MB + MC = 3IK$

Suy ra : I, K cố định và $IK = \dfrac{BC}{3}$

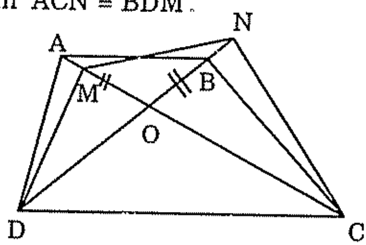
$\widehat{BAC} = \alpha$ (không đổi). Lại có $\widehat{BAC} = \widehat{IGK} = \alpha$,

G thuộc cung chứa góc α chứa góc α dựng trên IK.

Phần đảo (dành cho bạn đọc).

63. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Trên tia OA lấy điểm M sao cho OM = OB, trên tia OB lấy điểm N sao cho ON = OA. Chứng minh $\widehat{ACN} = \widehat{BDM}$.

Giải



$\Delta OMN = \Delta OBA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{OBA}$

$\widehat{OBA} = \widehat{ODC}$ (so le trong)

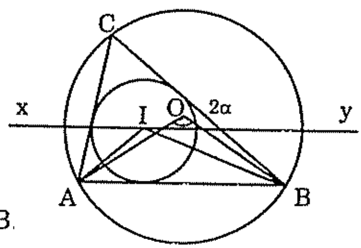
$\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{ODC}$.

Vậy M, D cùng thuộc cung chứa góc dựng trên NC

Suy ra $\widehat{ACN} = \widehat{BDM}$.

64. Dựng tam giác ABC biết bán kính đường tròn ngoại tiếp là R, bán kính đường tròn nội tiếp là r và $\widehat{C} = \alpha$.

Giải



$\widehat{AOB} = 2\alpha$; $\widehat{AIB} = 90^0 + \dfrac{\alpha}{2}$

– Dựng ΔOAB cân có OA = OB = R

và $\widehat{AOB} = 2\alpha$

– Dựng cung chứa góc $90^0 + \dfrac{\alpha}{2}$ trên AB.

- Dựng xy // AB và cách AB một khoảng bằng r, xy cắt cung vừa dựng tại I.

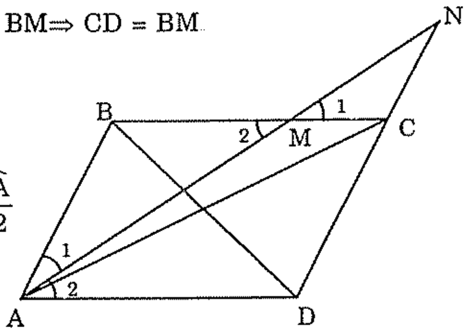
– Dựng $\widehat{ABC} = 2\widehat{ABI}$. Cạnh BC của góc vừa dựng cắt đường tròn (O; R) tại C ⇒ ΔABC là tam giác cần dựng.

Chứng minh (dành cho bạn đọc).

5. Đường phân giác góc BAD của hình bình hành ABCD cắt cạnh BC và đường thẳng CD lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCMN.



Ta có : $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{M}_1 \Rightarrow BA = BM \Rightarrow CD = BM$.

Mà $\widehat{A}_1 = \widehat{MNC}$; $\widehat{A}_2 = \widehat{M}_2$

$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{MNC}$ hay MC = NC.

Lại có : $\widehat{OCD} = \widehat{BCD} + \widehat{OCM}$

$= \widehat{OCM} + \dfrac{\widehat{A}}{2} + \dfrac{\widehat{A}}{2}$

$= \widehat{OCM} + \widehat{M}_1 + \dfrac{\widehat{BAD}}{2}$

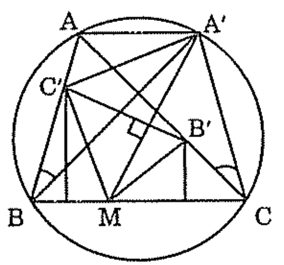
$= 90^0 + \dfrac{\widehat{BAD}}{2}$ (OC ⊥ MN)

$\widehat{BMO} = 180^0 - \widehat{OMC} = 180^0 - \widehat{OCM} = 90^0 + \dfrac{\widehat{BAD}}{2}$. Vậy $\widehat{OCD} = \widehat{BMO}$.

ΔOMB = ΔOCD (g.c.g) ⇒ $\widehat{OBM} = \widehat{ODC}$ ⇒ O, C, B, D thuộc cùng đường tròn.

6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cạnh BC. Các đường trung trực của các đoạn MB, CM theo thứ tự cắt AB, AC lần lượt tại C′, B′. Gọi A′ là điểm đối xứng với M qua B′C′. Chứng minh rằng tứ giác AA′BC nội tiếp.

Giải



Do C′B′ là trung trực của MA′ nên

$\widehat{C'A'B'} = \widehat{C'MB'} = 180^0 - \widehat{C'MB} - \widehat{B'MC}$

$= 180^0 - \widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{A} = \widehat{B'AC'}$

⇒ AA′B′C′ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AC'A'} = \widehat{AB'A'} \Rightarrow \widehat{BC'A'} = \widehat{A'B'C}$

$A'B' = B'M = B'C \Rightarrow \dfrac{1}{3} = \widehat{BCA'}$. Do đó $\widehat{ABA'} = \widehat{ACA'} \Rightarrow$ ABCA′ nội tiếp.

BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

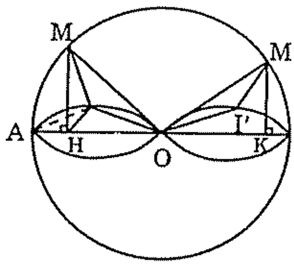
67. a) Cho đường tròn tâm O đường kính AB, một điểm M chuyển động trên đường tròn, kẻ MH vuông góc AB. Tìm tập hợp các tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMH.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán cấp II, TP. Hà Nội, năm học 1971 – 1972)

b) Cho tam giác ABC (A di động, B và C cố định, có hai đường phân giác BE và CF cắt nhau ở D và BE.CF = 2BD.CD. Chứng minh điểm A luôn thuộc một đường cố định.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận Tân Bình, Tp. Hồ Chí Minh năm học 2010 – 2011)

Giải



a) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔOMH.

Ta có : $\widehat{OIM} = 180^0 - (\widehat{IOM} + \widehat{IMO})$.

$$= 180^0 - \frac{\widehat{MOH} + \widehat{OMH}}{2} = 135^0$$

$\Delta OIM = \Delta OIA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OIA} = \widehat{OIM} = 135^0$

I chạy trên cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn OA.

b) Đặt BC = a, AC = b, AB = c. Áp dụng tính chất đường phân giác, chứng minh được: BE.CF = 2BD.CD $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A. Mà BC cố định. Vậy A thuộc đường tròn đường kính BC.

68. Dựng tam giác ABC nếu biết cạnh BC và các đường cao, phân giác, trung tuyến xuất phát từ đỉnh A chia góc BAC thành bốn góc bằng nhau.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán cấp II, TP. Hà Nội, năm học 1979 – 1980)

Giải

Bài toán đưa về dựng tam giác vuông biết cạnh huyền BC và một góc nhọn bằng $\frac{90^0}{4} = 22{,}5°$.

§6. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. *Định nghĩa* : Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).

2. *Định lý* : Trong một tứ giác nội tiếp tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180^0.

Chú ý : Một tứ giác nội tiếp có góc trong bằng góc đối ngoài.

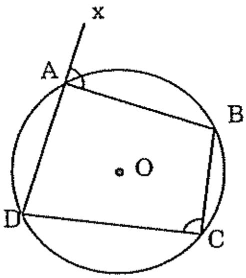
3. Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp :

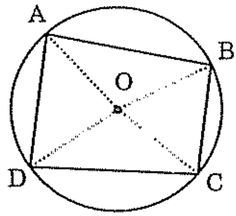
– Tứ giác có tổng hai góc đối nhau bằng 180^0.

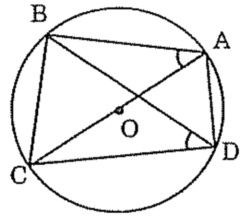
– Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó.

– Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α.

– Tứ giác có đỉnh cách đều một điểm.





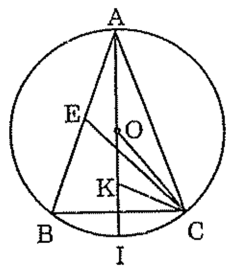


∘ ***Chú ý*** : Hình thang nội tiếp được đường tròn là hình thang cân và ngược lại.

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

69. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn đường kính AI. Gọi E là trung điểm AB, K là trung điểm OI. Chứng minh tứ giác AEKC là tứ giác nội tiếp.



Giải

$\Delta EAC \backsim \Delta KOC$

$(\widehat{EAC} = \widehat{KOC} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2},\ \dfrac{EA}{AC} = \dfrac{OK}{OC} = \dfrac{1}{2})$

$\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{AKC}$, E, K, hai đỉnh kề của tứ giác $\Rightarrow$ AEKC nội tiếp.

70. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC, từ điểm M trên đường tròn (O) (M khác A, B, C) vẽ các đoạn thẳng MD, ME, MF lần lượt vuông góc với các đường thẳng AB, BC, CA.

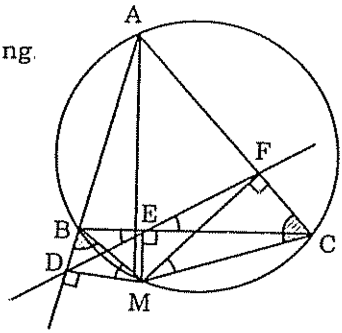
a) Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

b) Đảo lại : Nếu chân đường vuông góc D, E, F vẽ từ M đến các đường thẳng AB, BC, CA thẳng hàng thì M có thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC không ?

c) Chứng minh : $\dfrac{BC}{ME} = \dfrac{AB}{MD} + \dfrac{AC}{MF}$. Xác định vị trí của M để tổng $\dfrac{BC}{ME} + \dfrac{AB}{MD} + \dfrac{AC}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

a) Chứng minh được các tứ giác MDBE ; MEFC nội tiếp, suy ra :



$\widehat{BED} = \widehat{BMD}$; $\widehat{CEF} = \widehat{CMF}$.

Do ABMC nội tiếp $\Rightarrow$ D, E, F thẳng hàng.

b) Đảo lại : $\widehat{BED} = \widehat{CEF} \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{CMF}$

$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MCF} \Rightarrow$ ABMC nội tiếp.

c) $\cot MBD = \cot ACM \Rightarrow \dfrac{BD}{MD} = \dfrac{CF}{MF}$;

$\cot DAM = \cot ECM \Rightarrow \dfrac{AD}{MD} = \dfrac{CE}{ME}$

Tương tự : $\dfrac{AF}{MF} = \dfrac{BE}{ME}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MD} + \frac{AC}{MF} = \frac{AD - BD}{MD} + \frac{AF + FC}{MF} = \frac{AD}{MD} - \frac{CF}{MF} + \frac{CF}{MF} + \frac{AF}{MF}$$

$$= \frac{CE}{ME} + \frac{BE}{ME} = \frac{BC}{ME}$$

Xét $L = \dfrac{AB}{MD} + \dfrac{AC}{MF} + \dfrac{BC}{MC} = \dfrac{2BC}{ME}$

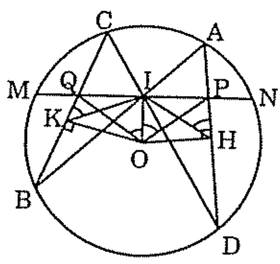
L nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ ME lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv I$ ($\overset{\frown}{IB} = \overset{\frown}{IC}$).

71. a) Cho đường tròn (O) và dây cung MN. Gọi I là trung điểm của dây cung đó. Qua I ta kẻ hai dây cung khác là AB, CD. Nối AD và BC, hai dây này lần lượt cắt MN tại P và Q.

Chứng minh : IP = IQ.

b) Cho hình thang ABCD (AB // CD) nội tiếp được trong đường tròn (O). Dây XY thay đổi cắt AD tại P và BC tại Q sao cho XP = QY. Ngoài ra XY còn cắt đường trung bình MN của hình thang ABCD tại I. Chứng minh : IP = IQ.

Giải



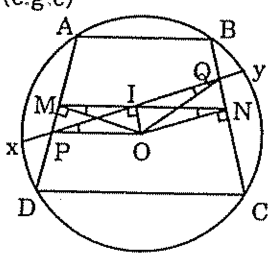
a) Kẻ $OK \perp BC \Rightarrow KC = \dfrac{BC}{2}$

$OH \perp AD \Rightarrow AH = \dfrac{AD}{2}$.

Chứng minh được các tứ giác IQKO, IOHP nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IOQ} = \widehat{IKQ}$; $\widehat{IOP} = \widehat{IHP}$.

Lại có $\Delta ICB \backsim \Delta IAD$ (g.g) $\Rightarrow \Delta CIK \backsim \Delta AIH$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{IKQ} = \widehat{IHP} \Rightarrow \widehat{IOQ} = \widehat{IOP}$



Vậy OI vừa là đường cao vừa là phân giác

$\Rightarrow$ IP = IQ.

b) $\Delta QYO = \Delta PXO$ (c.g.c) $\Rightarrow$ OP = OQ

$\Rightarrow \Delta OPQ$ cân tại O

$OM \perp AD$; $ON \perp BC$; AD = BC

$\Rightarrow OM = ON \Rightarrow \Delta OMN$ cân tại O.

$\Delta OMP = \Delta ONQ$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

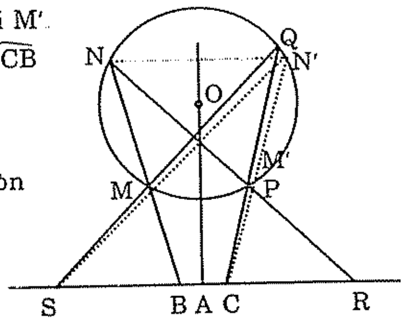
$\Rightarrow \widehat{MOP} = \widehat{NOQ} \Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{POQ}$.

$\Delta OMN \backsim \Delta OPQ \Rightarrow \widehat{IMO} = \widehat{IPO}$

$\Rightarrow$ tứ giác MIOP nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PIO} = \widehat{OMP} = 90^0 \Rightarrow IP = IQ$.

72. Cho đường thẳng (d) nằm ngoài đường tròn tâm O. Gọi A là chân đường vuông goc hạ từ O xuống (d). Trên (d) lấy hai điểm B, C sao cho AB = AC. Qua B và C vẽ hai cát tuyến tùy ý, lần lượt cắt đường tròn tại các điểm M, N và P, Q tương ứng. Gọi S, R lần lượt là các giao điểm của các đường thẳng MQ và NP với (d). Chứng minh AR = AS.

Giải



Kẻ NN' ⊥ OA ; N' ∈ (O). N'C cắt (O) tại M'.

Hãy chứng minh BN = CN', $\widehat{NBC} = \widehat{N'CB}$

$\widehat{BNN'} + \widehat{N'QS} = 180^0 = \widehat{BNN'} + \widehat{SCN'}$

$\Rightarrow \widehat{N'QS} = \widehat{SCN'}$

$\Rightarrow$ S, N', Q, C cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{SN'C} = \widehat{SQC} = \widehat{BNR}$

$\Rightarrow \Delta BNR = \Delta CN'S$ (c.g.c)

$\Rightarrow CS = BR$, mà $AB = AC$

$\Rightarrow AS = AR$.

73. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB cố định và C là điểm chuyển động. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AC và CB tại M và N. Chứng minh : MN luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, H là giao điểm của AO và MN.

Xét ba khả năng : $AC < AB$; $AC > AB$ và $AC = AB$

Cả ba trường hợp đều có H, O, P, N thuộc một đường tròn $\Rightarrow$ B, P, O, H, N cùng thuộc một đường tròn đường kính OB $\Rightarrow \Delta BH$ vuông tại H.

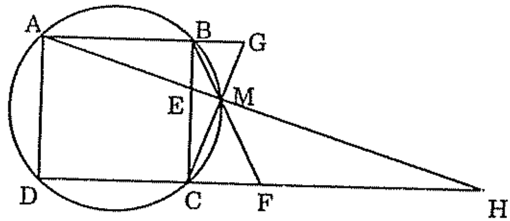
$\Rightarrow$ MN đi qua H cố định.

74. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = \dfrac{BC}{3}$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho $CF = \dfrac{BC}{2}$. Gọi M là giao điểm của AE và BF. Chứng minh năm điểm A, B, C, D, M cùng thuộc một đường tròn.

Giải

Gọi G là giao điểm của AB và CM

H là giao điểm của CD và AM



$\Delta ABE \backsim \Delta HCE$

$\Rightarrow HC = 2AB = 2BC$

$FH = \dfrac{2}{3}BC$

$\Delta MAB \backsim \Delta MHF$

$\Rightarrow MB = \dfrac{2}{3}MF$

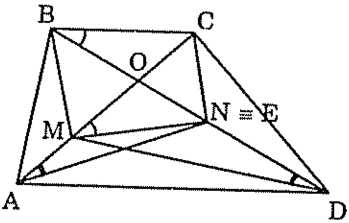
$BG \parallel CF : \dfrac{BG}{CF} = \dfrac{BM}{MF} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow BE = BG$

$\Delta ABE = \Delta CBG$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BCG} \Rightarrow$ ABMC nội tiếp $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

75. Cho hình thang ABCD (AD // BC). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trên các đoạn thẳng OA và OD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\widehat{BMD} = \widehat{ANC}$. Chứng minh bốn điểm B, N, M, C nằm trên cùng một đường tròn.

Giải

Gọi E là giao điểm của BD với đường tròn ngoại tiếp ΔMBC. Cần chứng minh E ≡ N.



$\widehat{CME} = \widehat{EDA}$ $(= \widehat{CBD})$

$\Rightarrow$ MEDA nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{MDE}$

$\Delta MBD \backsim \Delta ECA$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{AEC} \Rightarrow E \equiv N$.

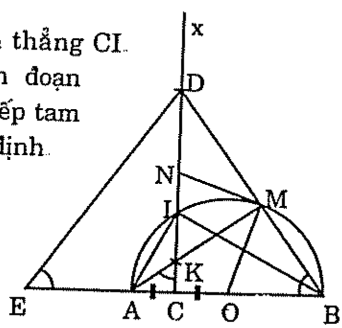
76. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng OA, tia Cx vuông góc với đường thẳng AB, Cx cắt nửa đường tròn (O) tại I. Lấy K là một điểm bất kì nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn đã cho tại M. Tiếp tuyến với nửa đường tròn tâm O tại M cắt Cx tại N, tia BM cắt Cx tại D.

a) Chứng minh bốn điểm A, C, M, D cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh tam giác MNK cân.

c) Tính S_{ABD} khi K là trung điểm của đoạn thẳng CI.

d) Chứng minh rằng khi K di động trên đoạn thẳng CI thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD nằm trên một đường thẳng cố định.



Giải

c) $IC = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$, $CK = \dfrac{R\sqrt{3}}{4} \Rightarrow CD = R\sqrt{3}$

$S_{ABD} = R\sqrt{3}$

d) Dựng E thuộc tia đối tia AB : AE = R

⇒ điểm E cố định ; ΔDEB cân tại D

⇒ $\widehat{DEA} = \widehat{DBA} = \widehat{AKC}$ ⇒ EAKD nội tiếp.

⇒ Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAKD nằm trên trung trực AE.

77. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R) cắt nhau tại hai điểm A và B Vẽ cát tuyến EBF cắt hai đường tròn tại E và F ($\widehat{ABE} \neq 90^0$).

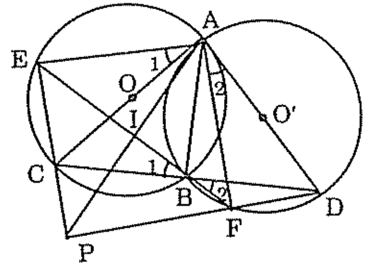
a) Chứng minh rằng : AE = AF.

b) Vẽ cát tuyến CBD vuông góc với AB (C, E thuộc (O) và D, F thuộc (O')). Gọi P là giao điểm của CE và FD. Chứng minh tứ giác AEPF và ACPD nội tiếp.

c) Gọi I là trung điểm EF. Chứng minh tam giác EPF cân và ba điểm I, A, P thẳng hàng.

d) Khi EF quay quanh B thì I và P di chuyển trên các đường tròn cố định nào. Vì sao ?

Giải



b) Tứ giác AEPF nội tiếp

⇒ $\widehat{EPF} + \widehat{EAF} = 180^0$

$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{A}_2 \Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{CAD}$

⇒ $\widehat{EPF} + \widehat{CAD} = \widehat{EPF} + \widehat{EAF} = 180^0$

⇒ PCAD nội tiếp

c) $\widehat{PEF} = \widehat{PFE}$ ⇒ ΔEPF cân

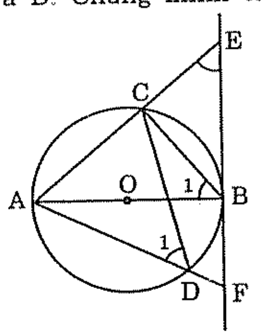
AI ⊥ EF ; PI ⊥ EF ⇒ A, I, P thẳng hàng.

d) I ∈ đường tròn đường kính AB; P ∈ đường tròn ngoại tiếp ΔACD.

BÀI TẬP NÂNG CAO

78. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ A kẻ hai tia cắt tiếp tuyến của (O) tại B ở E và F và cắt (O) ở C và D. Chứng minh tứ giác CDEF nội tiếp.

Giải



Xét trường hợp : tia AB nằm giữa hai tia AC và AD.

Ta có $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 = \widehat{E}_1$ ⇒ CDFE nội tiếp.

Trường hợp hai tia AC; AD cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, chứng minh tương tự.

79. Cho hình bình hành ABCD ($\widehat{ABC} > 90^0$), gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của D trên BC, AC và AB. Chứng minh rằng điểm O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'.

Giải

Tứ giác BC'DA' nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{C'OA'} = 2\widehat{C'DA'}$

$\widehat{C'DA'} = \widehat{BAD}$ (cùng bù $\widehat{ABC}$)

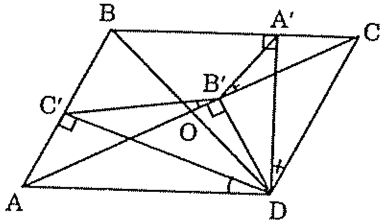
$\Rightarrow \widehat{C'OA'} = 2\widehat{BAD}$ (1)

$\widehat{C'BA'} = 180^0 - (\widehat{AB'C'} + \widehat{A'B'C})$

$= (90^0 - \widehat{ADC'}) + (90^0 - \widehat{CDA'})$

$= \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 2\widehat{BAD}$ (2)

$\Rightarrow \widehat{C'OA'} = \widehat{C'B'C} \Rightarrow$ C'OB'A' nội tiếp.



80. Cho một tứ giác nội tiếp trong đường tròn (C). Dựng bốn đường tròn khác (C) với bán kính tùy ý, mỗi đường tròn có một dây cung là một cạnh tứ giác. Chứng minh rằng bốn giao điểm của các đường tròn đó khác bốn đỉnh của tứ giác cho trước tạo thành một tứ giác nội tiếp.

Giải

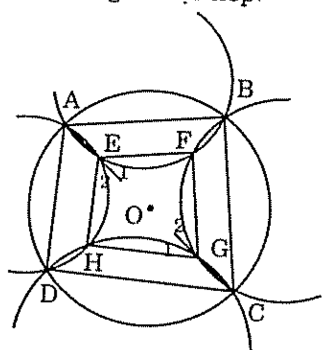
$\widehat{E}_1 = \widehat{ABF}$; $\widehat{E}_2 = \widehat{ADH}$;

$\widehat{G}_1 = \widehat{CBF}$

$\widehat{G}_2 = \widehat{CDH}$

$\Rightarrow \widehat{HEF} = \widehat{HGF} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^0$

$\Rightarrow$ EFGH nội tiếp.



📖 BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

81. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O ; R) có CD = AD + BC (BC > AD). Chứng minh rằng hai tia phân giác của hai góc DAB và ABC cắt nhau tại một điểm thuộc cạnh CD.
(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9 – TP. Hồ Chí Minh, năm học 2004 – 2005)

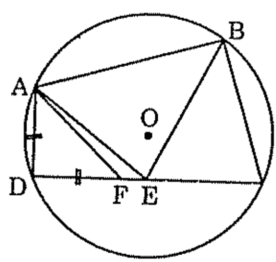
Giải

Tia phân giác $\widehat{DAB}$ cắt cạnh CD tại E.

Lấy F ∈ CD: DF = AD.

Ta có CF = BC = $\dfrac{180^0 - \widehat{BCD}}{2}$. Từ giác ABCD nội tiếp trên

$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180^0$



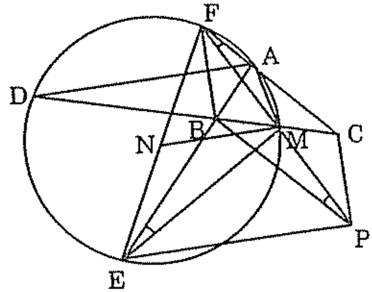
$\Rightarrow \widehat{BFC} = \dfrac{\widehat{DAB}}{2}$, mà $\widehat{EAB} = \dfrac{\widehat{DAB}}{2} \Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{EAB} \Rightarrow$ ABEF nội tiếp.

Từ đó chứng minh được BE là tia phân giác $\widehat{ABC}$.

82. Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm BC, đường phân giác ngoài của A cắt BC tại D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB tại E và cắt tia đối của tia AC tại F, N là trung điểm của EF. Chứng minh rằng MN song song với AD.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2007 – 2008)

Giải



Dựng hình bình hành BFCP, ta có

$\widehat{MPB} = \widehat{AFM} = \widehat{AEM} \Rightarrow$ EBMP nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{FMD}$.

Lại có $\widehat{FMD} = \widehat{DAF}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{FD}$)

$\Rightarrow \widehat{BEP} = \widehat{DAF} = \widehat{DAB} \Rightarrow AD \parallel EP$

MN là đường trung bình của ΔFEP

$\Rightarrow MN \parallel EP$.

Từ đó suy ra : $MN \parallel AD$.

Nhận xét : Kết quả bài toán vẫn đúng cả trong trường hợp AD là phân giác trong hoặc ngoài của $\widehat{BAC}$ và đường tròn ngoại tiếp ΔAMD cắt đường thẳng AC của ΔABC.

§7. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN.DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

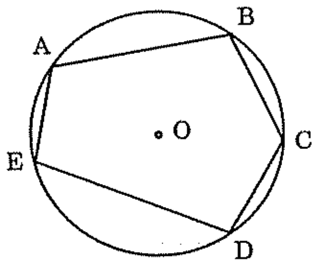
A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

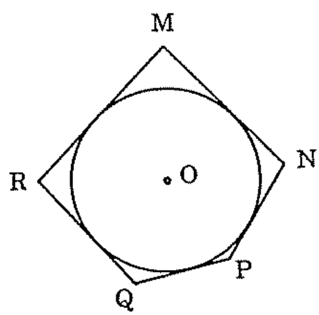
1. Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp

a) Định nghĩa

Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác nội tiếp được trong đường tròn.

- Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp trong đa giác và đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.





b) Định lí : Bất kỳ đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

Trong đa giác đều, tâm của đường tròn ngoại tiếp trùng với tâm của đường tròn nội tiếp và được gọi là tâm của đa giác đều.

2. **Công thức tính độ dài đường tròn :** "Độ dài đường tròn" (còn gọi là "chu vi hình tròn") được ký hiệu là C. Độ dài của một đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$.

Nếu gọi d là đường kính đường tròn ($d = 2R$) thì $C = \pi d$.

π (đọc là "pi") là kí hiệu của số vô tỉ 3,141592654..., thường lấy $\pi \approx 3,14$.

3. **Công thức tính độ dài cung tròn**

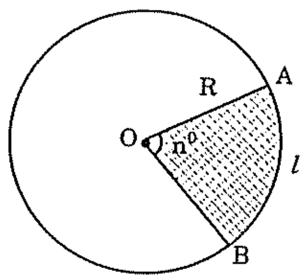
Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 là $l = \dfrac{\pi R n}{180}$.

4. **Công thức tính diện tích hình tròn**

Diện tích S của một hình tròn bán kính R là $S = \pi R^2$.

5. **Diện tích hình quạt tròn :** Hình quạt tròn là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó. Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^0 là : $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$ hay $S = \dfrac{lR}{2}$

(l là độ dài cung n^0 của hình quạt tròn).



B/ BÀI TẬP

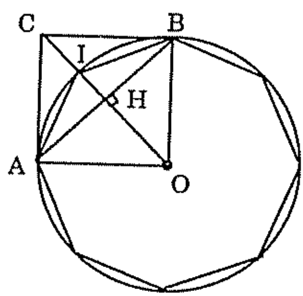
BÀI TẬP CƠ BẢN

83. Cho đường tròn (O ; R) và dây cung $AB = R\sqrt{2}$, hai tiếp tuyến với đường tròn tại A và B cắt nhau tại C, CO cắt cung nhỏ AB tại I.

a) Chứng minh tứ giác AOBC là hình vuông.

b) Tính AI theo R, từ đó suy ra độ dài của bát giác đều nội tiếp trong đường tròn (O ; R).

Giải



b) Gọi H là tâm hình vuông. ΔAOH vuông cân tại H có $AH = OH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

$$AI^2 = AH^2 + IH^2 + \frac{R^2}{2} + (R - \frac{R\sqrt{2}}{2})^2$$

$$= (2 - \sqrt{2})R^2$$

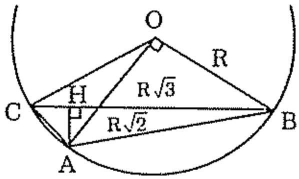
$$\Rightarrow AI = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$\widehat{AOI} = 45^0 \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AI}$ bằng $45^0 = \dfrac{360^0}{8}$, nên $AI = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ là cạnh của bát giác đều nội tiếp (O; R).

84. a) Cho tam giác ABC nội tiếp trong (O ; R) có AB = $R\sqrt{2}$, BC = $R\sqrt{3}$ (C nằm cùng phía với A so với bờ là đường thẳng chứa OB). Tính AH.

b) Tính cạnh và trung đoạn của một hình 12 cạnh đều nội tiếp trong đường tròn (O ; R).

Giải



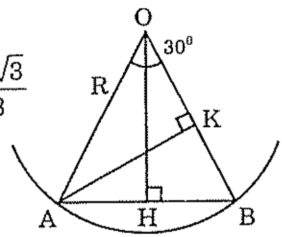
a) Đặt AH = CH = x, BH = y (x > y > 0)

x, y là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y = R\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 2R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = R\sqrt{3} \\ xy = \dfrac{R^2}{2} \end{cases}$$

Từ đó x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - R\sqrt{3}t + \dfrac{R^2}{2} = 0$

$$\Rightarrow AH = x = \frac{R(\sqrt{3} - 1)}{2}.$$



b) ΔAOK là nửa tam giác đều, $AK = \dfrac{R}{2}$, $OK = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$

$KB = OB - OK = \dfrac{R}{2}(2 - \sqrt{3})$

$AB = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} \Rightarrow OH = \dfrac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

85. a) Cho đường tròn (O ; R) và $\left(O' ; \dfrac{R}{2}\right)$ tiếp xúc trong tại A. Tia Ot cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại B, C. Chứng minh rằng hai cung AB và AC thuộc hai đường tròn (O) và (O') có độ dài bằng nhau.

b) Cho đường tròn (O) cung AB = 120^0. Các tiếp tuyến với đường tròn tại A và B cắt nhau tại C. Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc với các đoạn thẳng AC, CB và cung AB của đường tròn tại M. So sánh chu vi của đường tròn (I) với độ dài cung AB của đường tròn (O).

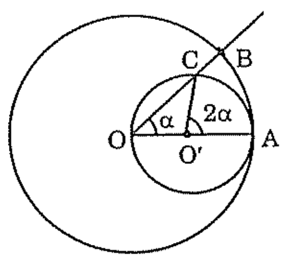
Giải

a) $\overset{\frown}{AB}$ của (O) bị trương bởi góc ở tâm O có số đo α có độ dài $l_1 = \dfrac{\pi R\alpha}{180}$.

$\overset{\frown}{AC}$ của (O') bị trương bởi góc ở tâm O' có số đo 2α có độ dài

$l_2 = \pi.\dfrac{R}{2}(2\alpha) : 180$

$= \dfrac{\pi R\alpha}{180} = l_1$



b) Ta tính được $\widehat{AOC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{ADC} = 60^0$

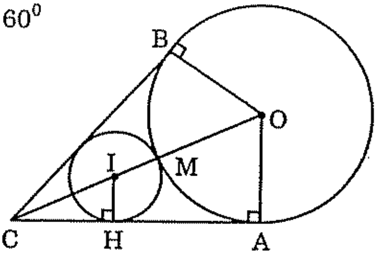
$\Rightarrow OC = 2OA = 2R \Rightarrow CM = R.$

ΔIHC vuông tại H, $\widehat{HIC} = 60^0$

$\Rightarrow IC = 2IH = 2r$

$R = CM = CI + IM = 2r + r = 3r$

$\Rightarrow r = \dfrac{R}{3}$



$l_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{2\pi R}{3}$ và chu vi đường tròn (I) là : $C = 2\pi r = \dfrac{2\pi R}{3} = l_{\overset{\frown}{AB}}$

86. a) Cho hai đường tròn đồng tâm. Biết khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm thuộc hai đường tròn bằng 1 m. Tính hiệu các chu vi của hai đường tròn.

b) So sánh diện tích hình tròn với diện tích hình vuông có cùng chu vi, diện tích nào lớn hơn ?

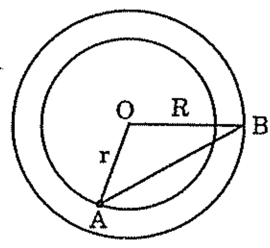
Giải

a) Xét $A \in (O ; r)$; $B \in (O ; R)$, $R > r$

$AB \geq OB = R - r$, do min $AB = R - r = 1$

Hiệu các chu vi của hai đường tròn

$2\pi R - 2\pi r = 2\pi(R - r) = 2\pi$ (m).



b) Gọi a là độ dài cạnh hình vuông, diện tích hình vuông $S_1 = a^2$. Chu vi hình vuông và hình tròn đều bằng 4a, bán kính đường tròn

$$R = \frac{4a}{2\pi} = \frac{2a}{\pi} \Rightarrow \text{Diện tích hình tròn : } S_2 = \pi\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 = \frac{4a^2}{\pi} > a^2 = S_1.$$

87. Cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB = 2R. Vẽ về một phía AB các nửa đường tròn đường kính thứ tự OA, OB và AB. Vẽ đường tròn tâm I tiếp xúc với ba nửa đường tròn trên.

a) Tính bán kính đường tròn I.

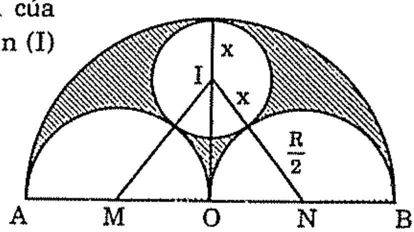
b) Tính diện tích phần nửa hình tròn đường kính AB, nằm ngoài hình tròn tâm (I) và nằm ngoài hai nửa hình tròn đường kính OA và OB.

Giải

a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB, x là bán kính của đường tròn (I) ; $IN^2 = OI^2 + ON^2$

$$\Rightarrow (R - x)^2 + \frac{R^2}{4} = \left(\frac{R}{2} + x\right)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{R}{3}.$$

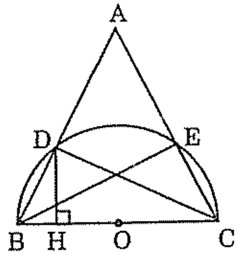


b) $S = \dfrac{\pi R^2}{2} - \left(\dfrac{\pi R^2}{9} + \dfrac{\pi R^2}{4}\right) = \dfrac{5}{36}\pi R^2$.

88. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Nửa đường tròn đường kính BC cắt AB và AC lần lượt tại D và E.

a) Tính số đo và độ dài cung DE.

b) Chứng minh DE là đường trung bình của tam giác ABC. Tính chu vi và diện tích của hình thang BDEC.



Giải

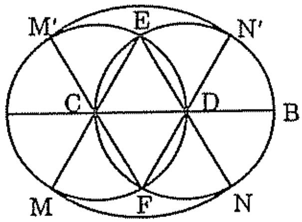
a) $\overset{\frown}{DE} = 60^0$; $l_{\overset{\frown}{DE}} = \dfrac{\pi a}{6}$.

b) Chu vi hình thang bằng $\dfrac{5a}{2}$

$S_{BDEC} = \dfrac{1}{2}(BC + DE).DH = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}a^2$.

89. a) *(Hình bầu dục).* Trên đoạn AB = 3R lấy các điểm C, D sao cho AC = CD = BD = R. Vẽ các đường tròn (C ; R), (D ; R). Chúng cắt nhau tại E và F. Kẻ các đường kính ECM, EDN, FCM′, FDN′. Lấy E, F làm tâm vẽ các cung MN và M′N′ ta được hình bao quanh hình bầu dục. Tính độ dài đường bao quanh hình bầu dục này.

b) *(Hình lưỡi liềm)* Cho đường tròn (O ; R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy AD là đường kính, D làm tâm, dựng cung tròn cắt CD tại M. Chứng minh rằng diện tích hình lưỡi liềm AMBC bằng diện tích của tam giác ABD.



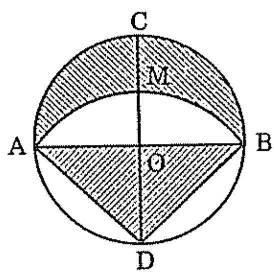
Giải

a) $l_{\overset{\frown}{MAM'}} = \dfrac{\pi R}{180}.120 = \dfrac{2\pi R}{3} = l_{\overset{\frown}{N'BN}}$

$l_{\overset{\frown}{MN}} = \dfrac{\pi 2R}{180}.60 = \dfrac{2\pi R}{3}$.

Độ dài hình bầu dục :

$l = 2.\dfrac{2\pi R}{3} + 2.\dfrac{2\pi R}{3} = \dfrac{8\pi R}{3}$



b) Diện tích hình lưỡi liềm là :

$S = \dfrac{\pi R^2}{2} - \left(\dfrac{\pi R^2}{2} - R^2\right)$

$= R^2 = S_{ADB}$.

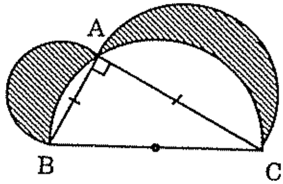
90. a) *(Hình hoa thị)* Trong hình vuông cạnh a người ta dựng bốn nửa đường tròn có đường kính là bốn cạnh hình vuông. Tính diện tích hình hoa thị bốn cánh theo a.

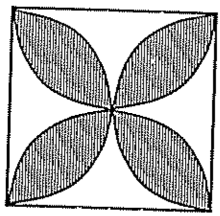
b) (Hình trăng khuyết) Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = c, AC = b. Vẽ nửa đường tròn đường kính BC và đi qua A, đồng thời ở miền ngoài của tam giác vuông, vẽ hai nửa đường tròn có đường kính lần lượt là AB và AC. Chứng minh rằng diện tích hình nằm ngoài hình tròn đường kính BC bằng diện tích của tam giác ABC.

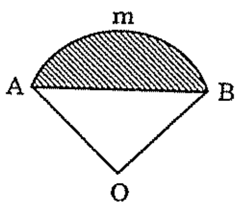
Giải

a) $S_{vp} = S_{quạt} - S_{AOB} = \dfrac{\pi a^2}{16} - \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{a^2}{16}(\pi - 2)$

$\Rightarrow$ diện tích hình hoa thị $S = 8.S_{vp} = \dfrac{a^2}{2}(\pi - 2)$.







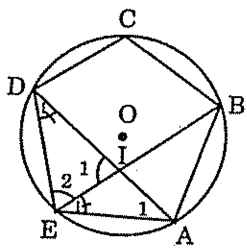
b) Diện tích nửa hình tròn đường kính AC : $S_1 = \dfrac{\pi b^2}{2}$, đường kính AB là $S_1 = \dfrac{\pi C^2}{8}$, đường kính BC là $S_3 = \dfrac{\pi(b^2 + c^2)}{8}$

$\Rightarrow$ Diện tích cần tìm $S = S_1 + S_2 + S_{ABC} - S_3 = S_{ABC}$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

91. Cho ngũ giác đều ABCDE, AD và BE cắt nhau tại I. Chứng minh $DI^2 = AI.AD$.

Giải



$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AE} \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{E}_1$

$\Rightarrow \Delta AIE \backsim \Delta AED$ (g.g) $\Rightarrow AE^2 = AI.AD$

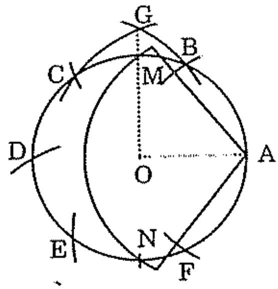
Chứng minh $\widehat{E}_2 = \widehat{I}_1 \Rightarrow \Delta DEI$ cân tại D.

$\Rightarrow DI = DE = EA$. Vậy $DI^2 = AI.AD$.

92. a) *(Bài toán chia đường tròn của Na-pô-lê-ông)*. Cho đường tròn (O ; R). Hãy chia đường tròn ra bốn phần đều nhau mà chỉ được sử dụng compa.

b) *(Bài toán nổi tiếng của Na-pô-lê-ông)*. Chỉ dùng compa hãy xác định lại tâm của một đường tròn cho trước.

Giải



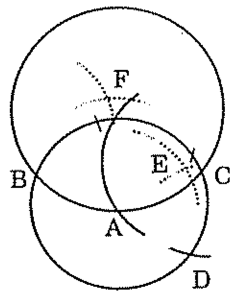
a) – Lấy A ∈ (O), dựng các điểm B, C, D, E, F chia đường tròn thành sáu cung bằng nhau.

– Dựng (A; AC) và (D; BD) cắt nhau tại G.

– Dựng (A; OG) cắt (O) tại M, N.

Bốn điểm A, M, D, N chia (O) thành bốn phần bằng nhau.

Phần chứng minh dành cho bạn đọc.



b) Lấy A ∈ (O); dựng đường tâm (A; r) cắt (O) tại B, C. Dựng D ∈ (O); A, B, D thẳng hàng.

Dựng (A; AD) và (D; AD) chúng cắt nhau tại E.

Dựng (E; EA) cắt (O) tại F. Tiếp tục dựng (A; FB); (B; FB) chúng cắt nhau O ⇒ O là tâm cần dựng.

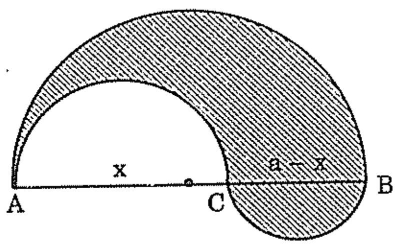
Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

93. Trên đoạn thẳng AB = a lấy điểm C. Đặt AC = x. Vẽ trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB hai nửa đường tròn có đường kính lần lượt là AB, AC, còn trên nửa mặt đối thì vẽ nửa đường tròn có đường kính BC.

a) Tính diện tích S của hình giới hạn bởi ba nửa đường tròn trên.

b) Tính x để S bằng diện tích nửa hình tròn đường kính AC.

Giải



a) $S = \frac{\pi}{8}[a^2 - x^2 + (a-x)^2] = \frac{\pi}{4}a(a-x)$.

b) Ta có : $\frac{\pi}{4}a(a-x) = \frac{\pi}{8}x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2ax - 2a^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = a(\sqrt{3} - 1)$ (do $x > 0$)

Vậy $x = a(\sqrt{3} - 1)$ thì S bằng diện tích nửa hình tròn đường kính AC.

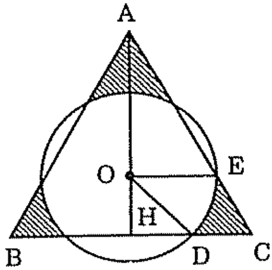
🕮 BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN

94. Cho tam giác ABC đều có tâm O cạnh 3 cm. Vẽ đường tròn tâm O bán kính 1 cm. Tính diện tích phần tam giác nằm ngoài hình tròn.

(Đề thi chọn đội tuyển Toán (vòng 3) – Huyện Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1998 – 1999)

Giải

Gọi AH là đường cao của ΔABC đều có cạnh AB. Ta có $AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tương tự CE = 1 (cm) ⇒ ODCE là hình thoi cạnh 1 cm và $\widehat{DOE} = 60^0$



$$\Rightarrow S_{ODCE} = 2S_{DEC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ (cm^2).$$

$$S_{quạtODE} = \frac{\pi.1^2.60}{360} = \frac{\pi}{6}.$$

Diện tích tam giác cong CDE :

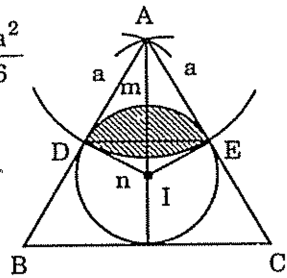
$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$$

$$S_{ct} = 2.\frac{1}{6}(3\sqrt{3} - \pi) = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} - \pi)\ (cm^2).$$

95. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 2a. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp trong tam giác. Tính diện tích phần chung của hình tròn (I) và hình tròn tâm A bán kính a.

(Đề thi chọn đội tuyển Toán (vòng 3) – Quận I, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1997 – 1998)

Giải



Diện tích S_1 của hình quạt ADnE là : $S_1 = \frac{\pi a^2}{6}$

⇒ diện tích viên phân DnE là

$$S_2 = S_1 - S_{ADE} = \frac{\pi}{6}a^2 - \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Tương tự, diện tích hình viên phân DmE có bán kính $ID = IE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và

sđ $\widehat{DmE} = 120^0$ là $S_3 = \frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

Suy ra diện tích cần tìm $S = S_2 + S_3 = \frac{a^2}{18}(5\pi - 6\sqrt{3})$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), AD là đường kính của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại D của (O) cắt tia BC tại M. Đường thẳng MO cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

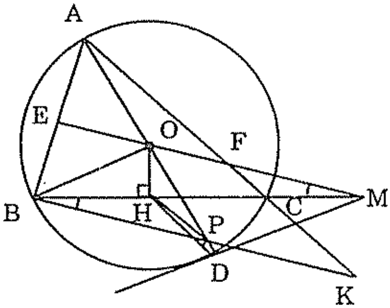
a) Chứng minh $MD^2 = MC.MB$.

b) Gọi H là trung điểm BC. Chứng minh tứ giác MDHO nội tiếp đường tròn.

c) Qua B vẽ đường thẳng song song với MO, đường thẳng này cắt đường thẳng AD tại P. Chứng minh P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BHD.

d) Chứng minh O là trung điểm EF.

Giải



c) $\widehat{EMB} = \widehat{MBP}$ (so le trong, BP // ME)

$\widehat{EMB} = \widehat{HDO}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OH}$)

$\Rightarrow \widehat{MBP} = \widehat{HDO}$

$\Rightarrow$ tứ giác BHPD nội tiếp.

d) Gọi K là giao điểm đường BP và AC.

Ta dễ dàng chứng minh HP // AC

$\Rightarrow \dfrac{OE}{BP} = \dfrac{OF}{PK}$, mà BP = PK (HP là đường trung bình ΔBCK)

$\Rightarrow$ OE = OF.

2. Cho điểm A ở bên ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm) và cát tuyến ADE (D, E ∈ (O) và D nằm giữa A, E).

a) Chứng minh $AB^2 = AD.AE$.

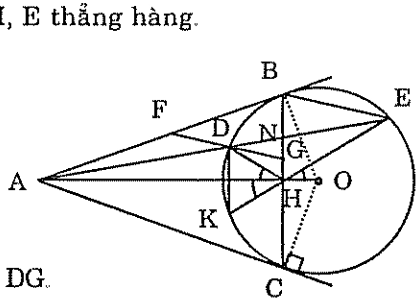
b) Đường thẳng AO cắt BC tại H. Chứng minh D, H, O, E cùng thuộc một đường tròn.

c) Từ D vẽ dây DK song song với BC (K ≠ D). Chứng minh K, H, E thẳng hàng.

d) Từ D vẽ đường thẳng song song với BE cắt AB tại F và BC tại G. Chứng minh D là trung điểm của đoạn FG.

Giải

c) Chứng minh $\widehat{OHE} = \widehat{AHK} \Rightarrow$ K, H, E thẳng hàng.



d) FD // BE : $\dfrac{FD}{BE} = \dfrac{AD}{AE}$ (1)

DG // BE : $\dfrac{DG}{BE} = \dfrac{DN}{ME}$ (2)

HB, HA là phân giác trong, phân giác ngoài tại đỉnh H của ΔDHE

nên $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DN}{NE}$, từ (1), (2) cho FD = DG.

3. Từ một điểm A bên ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm), BD là đường kính của đường tròn (O), AD cắt (O) tại E.

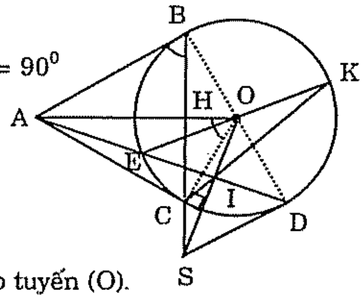
a) Chứng minh $AB^2 = AD.AE$.

b) Kẽ đường kính EK của (O), KC cắt DE tại I. Chứng minh I là trung điểm của DE.

c) Gọi H là giao điểm của OA với BC. Chứng minh SD là tiếp tuyến của (O).

d) Gọi S là giao điểm của hai tia OI và BC. Chứng minh SD là tiếp tuyến của (O).

Giải



b) Tứ giác AOIC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AIO} = \widehat{ACO} = 90^0$

c) $AH.AO = AB^2 = AE.AD$

$\Rightarrow \Delta AHE \backsim \Delta ADO$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{ADO}$

$\Rightarrow$ Tứ giác EHOD nội tiếp.

Từ đây suy ra HC là phân giác $\widehat{EHD}$.

d) $R^2 = OH.OA = OI.OS = OD^2 \Rightarrow$ SD là tiếp tuyến (O).

4. Từ một điểm A bên ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh AO vuông góc BC tại H.

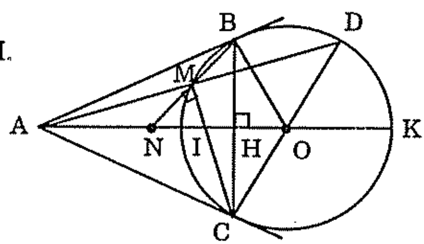
b) Vẽ đường kính CD của (O), AD cắt (O) tại M ($M \neq D$). Chứng minh tứ giác AMHC nội tiếp.

c) BM cắt AO tại N. Chứng minh N là trung điểm AH.

d) Gọi I và K là các giao điểm của AO với (O).

Chứng minh : $\dfrac{1}{AN} = \dfrac{1}{AI} + \dfrac{1}{AK}$.

Giải



c) Chứng minh dễ dàng

$AN^2 = MN.BN = NH^2 \Rightarrow AN = NH$.

d) $\dfrac{1}{AI} + \dfrac{1}{AK} = \dfrac{AI + AK}{AI.AK}$

$= \dfrac{OA - R + OA + R}{AB^2}$

$= \dfrac{2OA}{AH.OA} = \dfrac{2}{AH} = \dfrac{1}{AN}$.

5. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O ; R). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

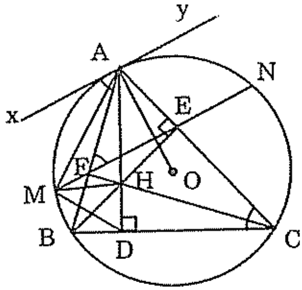
a) Chứng minh : $EH.BD = ED.HF$.

b) Chứng minh OA vuông góc EF.

c) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) ở M và N (F nằm giữa E và M). Chứng minh AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDH.

d) Giả sử $EF = R$. Tính số đo góc BAC.

Giải



b) Dựng tiếp tuyến xy với (O) tại A.

$\begin{cases} \widehat{BCA} = \widehat{BAx} \text{ cùng chắn } \overset{\frown}{AB} \\ \widehat{BCA} = \widehat{AFE} \text{ (do tứ giác BFEC nội tiếp)} \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{AFE} \Rightarrow xy \,//\, EF$, mà $OA \perp xy$.

$\Rightarrow OA \perp EF$.

c) $\Delta AMF \backsim \Delta ABM$ (g.g) $\Rightarrow AM^2 = AF.AB$

Lại có $AF.AB = AH.AD \Rightarrow AM^2 = AH.AD$

Suy ra : AM là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MHD.

d) $\cos A = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{R}{2R\sin A} \Rightarrow \sin A.\cos A = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin A = \cos A = \sin(90^0 - \widehat{A})$. Vậy $\widehat{A} = 45^0$.

6. Trên nửa đường tròn tâm (O ; R), đường kính AB, lấy hai điểm M, E theo thứ tự A, M, E, B. Hai nửa đường thẳng AM và BE cắt nhau tại C, AE và BM cắt nhau tại D.

a) Chứng minh tứ giác MCDE nội tiếp và CD vuông góc với AB.

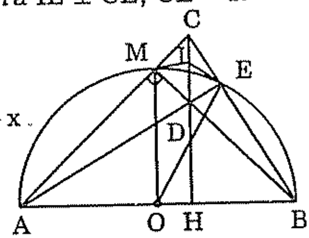
b) Gọi H là giao điểm của CD và AB.
Chứng minh rằng BE.BC = BH.BA.

c) Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại M và E của đường tròn (O) cắt nhau tại một điểm I thuộc CD.

d) Cho $\widehat{BAM} = 45^0$, $\widehat{BAE} = 30^0$. Tính diện tích tam giác ABC theo R.

Giải

c) Gọi I là giao điểm của tiếp tuyến của (O) tại M với CD; ta dễ dàng chứng minh I là trung điểm CD. Từ đó suy ra $IE \perp OE$, $OE = R$
$\Rightarrow$ IE là tiếp tuyến (O) tại M.



d) ΔAHC vuông cân tại H. Đặt $CH = AH = x$.

Ta có : $\cot\widehat{EBA} = \dfrac{HB}{HC} = \cot 60^0 \Rightarrow HB = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

$AB = AH + HB \Rightarrow 2R = x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

$\Rightarrow x = (3 - \sqrt{3})R$. Vậy $S = \dfrac{AB.CH}{2} = (3-\sqrt{3})R^2$.

7. Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F. Đường vuông góc với OC ở O cắt hai cạnh CA, CB lần lượt tại I, J. Một điểm P di động trên cung nhỏ DE không chứa điểm F. Tiếp tuyến tại P của đường tròn (O) cắt hai cạnh CA.CB lần lượt tại M, N.

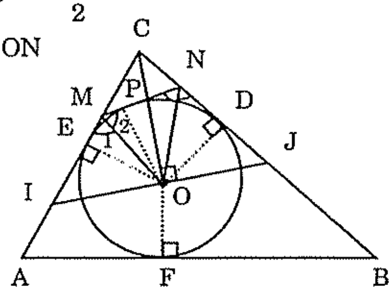
a) Góc $\widehat{MON} = \varphi$ (const), hãy xác định φ theo các góc của tam giác ABC.

b) Chứng minh ba tam giác IMO, OMN và JON đồng dạng.
Suy ra $IM.JM = OI^2 = OJ^2$ (∗).

c) Đảo lại, nếu M, N là hai điểm trên CE, CD thoả mãn (∗) thì MN tiếp xúc với đường tròn tâm O.

Giải

a) $\widehat{MON} = \frac{1}{2}\widehat{DOE} = \frac{1}{2}(180^0 - \widehat{ACB}) = 90^0 - \frac{\widehat{ACB}}{2}$



b) Chứng minh : $\Delta IMO \backsim \Delta OMN \backsim \Delta JON$
$\Rightarrow IM.JN = OI.OJ = OI^2 = OJ^2$ (*)

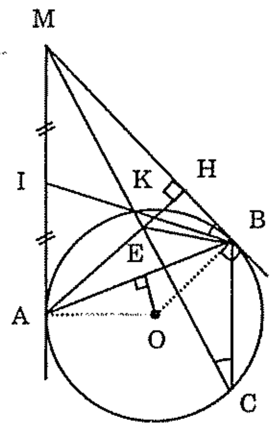
c) Đảo lại, $M \in CE$, $N \in CD$ thỏa (*) thì $OI = OJ$ và $IM.JN = OI.OJ \Rightarrow$
$\frac{IM}{IO} = \frac{JO}{JN}$, $\widehat{MIO} = \widehat{NOJ}$
$\Rightarrow \Delta IMO \backsim \Delta JON$ (cgc)
$\Rightarrow \widehat{OMI} = \widehat{NOJ}$.
Suy ra : $\widehat{MON} + \widehat{NOJ} = \widehat{MOJ} = \widehat{OMI} + \widehat{MIO} = \widehat{NOJ} + \widehat{MIO}$
$\Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{MIO} = 90^0 - \frac{\widehat{ACB}}{2}$.
Qua M dựng tiếp tuyến thứ hai (khác ME) với đường tròn (O) cắt CD tại $N_1 \Rightarrow \widehat{MON_1} = 90^0 - \frac{\widehat{ACB}}{2} \Rightarrow \widehat{MON_1} = \widehat{MON}$
$\Rightarrow N \equiv N_1 \Rightarrow$ MN tiếp xúc (O).

8. Cho đường tròn (O ; R), điểm A cố định trên đường tròn, vẽ tiếp tuyến Ax với (O). Điểm M tùy ý trên Ax, vẽ tiếp tuyến thứ hai MB với đường tròn (O). Gọi I là trung điểm MA, K là giao điểm của BI với đường tròn (O), MK cắt đường tròn (O) tại C.

a) Chứng minh rằng tam giác MIK đồng dạng với tam giác BIM và BC song song với MA.

b) Tìm vị trí của M để AMBC là hình bình hành.

c) Chứng minh rằng khi M di động trên Ax thì trực tâm H của tam giác MAB luôn nằm trên một đường tròn cố định.



Giải

a) Ta có $IA^2 = MI^2 = IK.IB$
$\Rightarrow \Delta MIK \backsim \Delta BIM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{IBM}$.
Lại có $\widehat{IBM} = \widehat{BCK}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$)
$\Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{BCK} \Rightarrow BC \parallel MA$.

b) Tứ giác AMBC là hình bình hành

$\Leftrightarrow \widehat{AMB} = \widehat{ACB} = \widehat{MBA} \Leftrightarrow \Delta MAB$ đều

$\Leftrightarrow$ AMBC hình thoi có $\widehat{ACB} = 60^0 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Từ đó suy ra $M \in Ax : AM = R\sqrt{3}$.

c) $H \in (A; R)$.

9. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O ; R) dựng các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE (D, E thuộc (O) và D nằm giữa A, E). Đường thẳng qua D vuông góc với OB cắt BC, BE lần lượt tại H và K. Vẽ OI vuông góc với AE tại I.

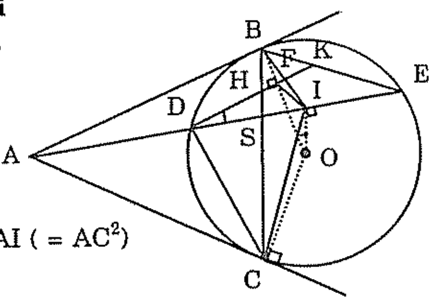
a) Chứng minh rằng tứ giác OIBC nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh rằng IA là tia phân giác góc BIC.

c) Gọi S là giao điểm của BC và AD. Chứng minh rằng : $AD.AE = AC^2$ và $\dfrac{2}{AS} = \dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{AE}$.

d) Chứng minh tứ giác IHDC nội tiếp được đường tròn và DH = HK.

Giải



c) Gọi F là giao điểm của DK và OB

Ta có : $\widehat{HDI} = \widehat{BOI} = \widehat{BCI}$

$\Rightarrow$ tứ giác IHDC nội tiếp.

$\Delta ACS \backsim \Delta AIC$ (g.g)

$\Rightarrow AC^2 = AS.AI$

$AD + AE = 2AI$ và $AD.AE = AS.AI$ ($= AC^2$)

$\Rightarrow \dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{AE} = \dfrac{2AI}{AS.AI} = \dfrac{2}{AS}$.

d) Chứng minh $\widehat{DIH} = \widehat{BED} \Rightarrow IH \,//\, KE$.

10. Cho đường tròn (O ; R) và dây cung AB, gọi M là điểm chuyển động trên cung lớn AB, H là hình chiếu của M trên AB, E và F lần lượt là hình chiếu của H trên MA, MB.

a) Chứng minh rằng : đường thẳng d qua M vuông góc với EF đi qua một điểm cố định.

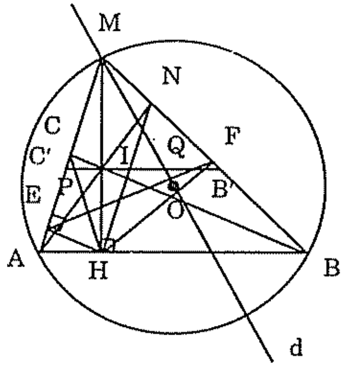
b) Trên AH lấy điểm I bất kì. Tia AI, BI cắt MB, MA lần lượt tại N, C. Vẽ đường thẳng qua I song song với AB cắt HC, HN lần lượt tại P và Q. Chứng minh : IP = IQ.

c) Gọi D là giao điểm của đường thẳng d và AB. Chứng minh rằng $\dfrac{MA^2}{MB^2} = \dfrac{HA}{HB}.\dfrac{DA}{DB}$.

Giải

a) d qua điểm cố định O.

b) Đường thẳng PQ cắt MA, MB tại C′, B′



$$\frac{IP}{IC'} = \frac{HB}{AB};\ \frac{IC'}{IB'} = \frac{AH}{HB};\ \frac{IB'}{IQ} = \frac{AB}{AH}$$

$$\Rightarrow \frac{IP}{IC'}.\frac{IC'}{IB'}.\frac{IB'}{IQ} = 1 \Rightarrow IP = IQ.$$

c) $\begin{cases} \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{S_{AMD}}{S_{BMD}} = \dfrac{DI.MA}{DK.MB} \\ \dfrac{HA}{HB} = \dfrac{S_{MAH}}{S_{MHB}} = \dfrac{HE.MA}{HF.MB} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD}.\frac{HA}{HB} = \frac{MA^2}{MB^2}.\frac{DI}{DK}.\frac{HE}{HF}$$

$\Delta MEH \backsim \Delta MKD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HE}{KD} = \dfrac{MH}{MD}$ và $\Delta MID \backsim \Delta MFH$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{ID}{HF} = \frac{MD}{MH}$$

Do đó : $\dfrac{ID}{HF}.\dfrac{HE}{DK} = \dfrac{MH}{MD}.\dfrac{MD}{MH} = 1 \Rightarrow \dfrac{DA}{DB}.\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{MA^2}{MB^2}$.

11. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O ; R). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Kẻ đường kính AK, gọi M là trung điểm BC.

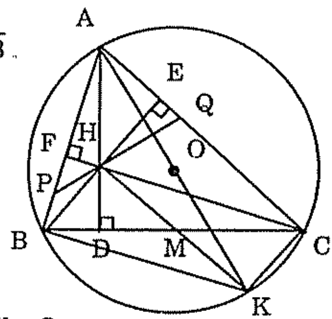
a) Chứng minh hai tam giác ADB và ACK đồng dạng rồi suy ra

$$S_{ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R}.$$

b) Đường thẳng vuông góc với HM tại H cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng tam giác KPQ cân.

c) Giả sử $\widehat{BAC} = 60^0$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh các điểm B, H, I, O, C thuộc một nửa đường tròn và tính $AB^2 + AC^2 - 2AH.AD$ theo R.

d) Chứng minh rằng $\dfrac{HA}{BC} + \dfrac{HB}{AC} + \dfrac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}$.



Giải

b) Chứng minh $\widehat{HPK} = \widehat{HQK}$

$\Rightarrow \Delta KPQ$ cân tại K.

c) $AB^2 + AC^2 - 2AH.AD = 3R^2$.

d) Đặt BC = a, AC = b; AB = c,

AH = x; BH = y; CH = z.

Chứng minh : $\dfrac{xy}{ab} + \dfrac{yz}{bc} + \dfrac{xz}{ac} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} \geq \sqrt{3}$

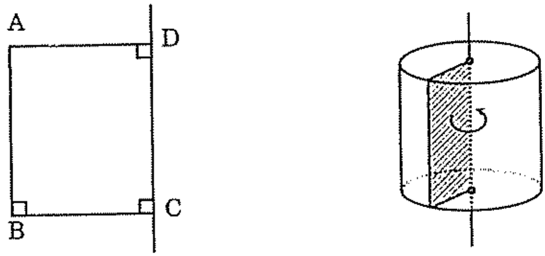
(Dấu "= xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều).

Chương IV. HÌNH TRỤ – HÌNH NÓN – HÌNH CẦU

§1. HÌNH TRỤ. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

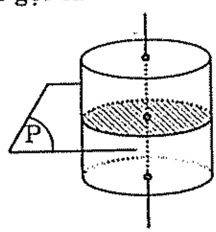
1. Hình trụ : Khi quay hình chữ nhật ABCD một vòng quanh cạnh CD cố định, ta được một hình trụ.



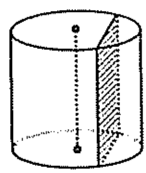
– DA và CB quét nên hai đáy của hình trụ, tức là hai hình tròn tâm C và D bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song.

– Cạnh AB quét nên mặt xung quanh của hình trụ, mỗi vị trí của AB được gọi là một đường sinh. Độ dài đường sinh gọi là chiều cao của hình trụ, DC gọi là trục của hình trụ.

2. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng



- Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với đáy, thì phần mặt phẳng nằm trong hình trụ (mặt cắt) là một hình tròn bằng một hình tròn đáy.
- Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục DC thì mặt cắt là một hình chữ nhật.



3. Tính diện tích xung quanh của hình trụ

Hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao h có :

$$S_{xq} = 2\pi rh$$
$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

4. Thể tích hình trụ $V = Sh = \pi.r^2.h$

(S là diện tích hình tròn đáy, h là chiều cao)

B/ BÀI TẬP

📖 BÀI TẬP CƠ BẢN

1. Diện tích xung quanh của một hình trụ là 24π cm^2, diện tích toàn phần là 42π cm^2. Tính bán kính của đường tròn đáy, chiều cao hình trụ.

Giải

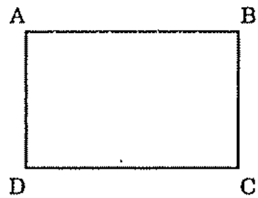
$2S_đ = S_{tp} - S_{xq} \Rightarrow 2\pi R^2 = 18\pi \Rightarrow R = 3$ (cm)

Bán kính đường tròn đáy là 3 cm.

Chiều cao hình trụ là : $h = \dfrac{S_{xq}}{2\pi R} = \dfrac{24\pi}{2\pi R} = 4$ (cm)

2. Cho hình chữ nhật ABCD biết chu vi bằng 56 cm và đường chéo bằng 20 cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ sinh ra khi quay hình chữ nhật một vòng quanh cạnh AB và cạnh AD.

Giải



Đặt AB = x; AD = y (x > y > 0)

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ x^2 + y^2 = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 28 \\ xy = 192 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 16$; $y = 12$ $(x > y)$.

– Khi hình chữ nhật quay một vòng quanh cạnh AD.

$$S_{xq} = 384\pi \text{ cm}^2 \text{ ; } V = 3072\pi \text{ cm}^3.$$

– Khi hình chữ nhật quay một vòng quanh cạnh AB.

$$S_{xq} = 384\pi \text{ cm}^2 \text{ ; } V = 2304\pi \text{ cm}^3.$$

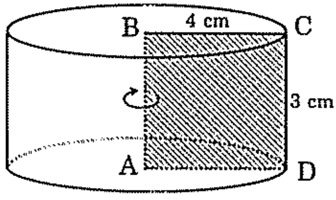
3. Cho hai hình chữ nhật ABCD và MNPQ có các cạnh AB = 3 cm, BC = 4 cm, MN = 12 cm, NP = 2 cm. Cho hình thứ nhất quay một vòng quanh cạnh AB và hình thứ hai quay một vòng quanh cạnh MN. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hai hình trụ sinh ra. Có nhận xét gì?

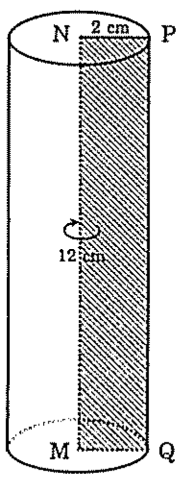
Giải

Hình trụ thứ nhất có $S_1 = 56\pi$ (cm^2) ; $V_1 = 48\pi$ (cm^3).

Hình trụ thứ hai có $S_2 = 56\pi$ (cm^2) ; $V_2 = 48\pi$ (cm^3).

Nhận xét $S_1 = S_2$; $V_1 = V_2$.





BÀI TẬP NÂNG CAO

4. Một hình trụ có thể tích không đổi. Tính chiều cao hình trụ theo bán kính đáy để diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất.

Giải

Gọi h và R là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ đã cho. Diện tích toàn phần hình trụ là : $S = 2\pi(Rh + R^2)$.

Chiều cao hình trụ là : $h = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

Suy ra : $S = 2\pi\left[\dfrac{V}{\pi R} + R^2\right] = 2\left(\dfrac{V}{2R} + \dfrac{V}{2R} + \pi R^2\right)$

$$\geq 2.3\sqrt[3]{\frac{V}{2R}.\frac{V}{2R}.\pi R^2} = 6\sqrt[3]{\frac{V^2}{4}\pi}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{V}{2R} = \pi R^2 \Leftrightarrow h = \dfrac{(2+\sqrt{3})R^2}{4} = \pi R^2.\dfrac{2}{\pi R} = 2R$.

Vậy h = 2R thì hình trụ có diện tích toàn phần nhỏ nhất khi thể tích không đổi.

5. Trong các hình trụ có diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy bằng giá trị không đổi $2\pi a^2$, tìm hình trụ có thể tích lớn nhất.

Giải

Gọi x, y là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ, diện tích xung quanh cộng diện tích một đáy là S.

Ta có : $S = \pi x^2 + 2xy\pi = 2\pi a^2$ hay $x^2 + 2xy = 2a^2$

Lại có : $V = \pi x^2 y$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với ba số dương : xy; xy và x^2 ta có

$$x^2 + xy + xy \geq 3\sqrt[3]{x^4y^2} \Rightarrow V \leq \frac{2\sqrt{6}\pi a^3}{9}.$$

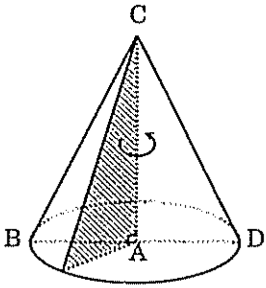
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của V bằng $\dfrac{2\sqrt{6}\pi a^3}{9}$ (tại $x = y = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$).

§2. HÌNH NÓN – HÌNH NÓN CỤT
DIỆN TÍCH XUNG QUANH THỂ TÍCH HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ

1. Hình nón



Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh góc vuông AC cố định thì được một hình nón.

- Cạnh AB tạo nên đáy hình nón là hình tròn tâm A. Cạnh BC quét nên mặt xung quanh của hình nón và các vị trí của nó khi quay gọi là đường sinh.
- C là đỉnh hình nón, CA là trục, CA = h là chiều cao ; $\widehat{BCD}$ là góc ở đỉnh của hình nón (với BD là đường kính của đường tròn tâm A).

Nhận xét : Thiết diện qua đỉnh của hình nón là tam giác cân chứa hai đường sinh. Thiết diện vuông góc với trục là hình tròn.

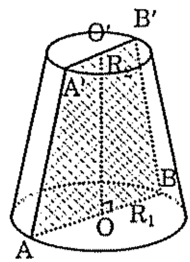
2. Diện tích xung quanh

Hình nón có bán kính đáy là R, đường sinh là l thì :

Diện tích xung quanh : $S_{xq} = \pi Rl$

Diện tích toàn phần : $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi Rl + R^2$

Thể tích : $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2h$ (h : độ dài đường cao)



3. Hình nón cụt : Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và mặt đáy được gọi là một hình nón cụt.

4. Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón cụt

Hình nón cụt có R_1, R_2 là các bán kính đáy, l đường sinh, h chiều cao.

Diện tích xung quanh là : $S_{xq} = \pi(R_1 + R_2).l$

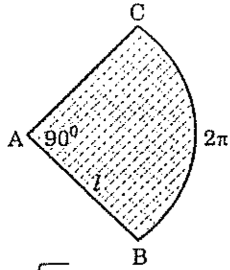
Thể tích : $V = \dfrac{1}{3}\pi h\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2\right)$

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

6. Khai triển bề mặt xung quanh hình nón dọc theo đường sinh ta được hình quạt tròn có góc ở tâm 90^0 và bán kính 40 cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón.

Giải



$S_{xq} = \dfrac{\pi.(40)^2.90}{360} = 400\pi\ (cm^2)$

Do đó bán kính đường tròn đáy r = 10 cm

Chiều cao hình nón :

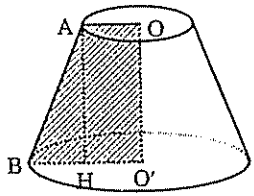
$$h^2 = 40^2 - 10^2 = 1500$$

$\Rightarrow h = 10\sqrt{15}$ cm

Thể tích hình nón : $V = \dfrac{1}{3}\pi.100.10\sqrt{15} = \dfrac{1000\sqrt{15}}{3}\pi\ (cm^3)$.

7. Cho hình nón cụt với bán kính hai đáy bằng 2010 cm, 6030 cm, đường sinh bằng 8040 cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón cụt.

Giải



Đặt a = 2010

$S_{xq} = \pi(R + r)l = 16\pi a^2$

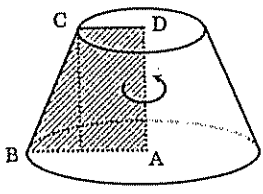
$O'H = a$

$HB = 2a$, $AH = 2a\sqrt{3}$.

$V = \dfrac{\pi}{3}26.2010^3\sqrt{3}\ (cm^3)$.

8. Cho hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$, AD = 3 cm, AB = 2CD và diện tích hình thang bằng 27 cm^2. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón cụt tạo thành khi quay hình thang một vòng quanh cạnh AD.

Giải



CD = 6 cm,

AB = 12 cm,

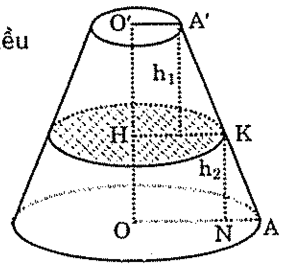
$BC = 3\sqrt{5}$ cm.

$S_{xq} = \pi(6 + 12).3\sqrt{5} = 54\sqrt{5}\pi\ (cm^2)$;

$V = 252\pi\ (cm^3)$.

9. Cho hình nón cụt có bán kính hai đáy là 3 cm và 1 cm. Một mặt phẳng song song với đáy chia hình nón cụt thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính bán kính của thiết diện.

Giải



Gọi x là bán kính của thiết diện, h_1, h_2 là chiều cao hai hình nón cụt sinh ra.

Ta có $\dfrac{1}{3}\pi h_1(x^2 + 1 + x) = \dfrac{1}{3}\pi h_2(x^2 + 9 + 3x)$

$$\Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{x^2 + 3x + 9}{x^2 + x + 1}.$$

$\Delta A'MK \backsim \Delta KNA \Rightarrow \dfrac{A'M}{KN} = \dfrac{MK}{NA} \Rightarrow \dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{x-1}{3-x}$

Suy ra : $\dfrac{x^2+3x+9}{x^2+x+1} = \dfrac{x-1}{3-x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{14}$.

BÀI TẬP NÂNG CAO

10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của những hình được tạo thành khi quay tam giác ABC một vòng quanh các cạnh BC, AB và AC. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{V_1^2} = \dfrac{1}{V_2^2} + \dfrac{1}{V_3^2}$.

Giải

Đặt BC = a, AB = c, AC = b

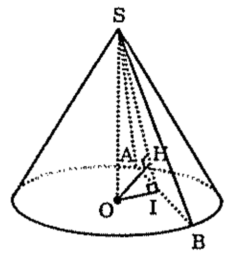
Suy ra : $\dfrac{1}{V_2^2} + \dfrac{1}{V_3^2} = \dfrac{9(b^2+c^2)}{\pi^2 b^4 c^4} = \dfrac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4} = \dfrac{1}{V_1^2}$.

11. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh 2a.

a) Tính thể tích và diện tích xung quanh hình nón.

b) Thiết diện qua đỉnh hình nón và cách tâm của đáy hình nón một khoảng bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính diện tích thiết diện.

Giải



a) Thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh 2a, nên hình nón có $h = a\sqrt{3}$, $R = a$, $l = 2a$.

$V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$, $S_{xq} = 2\pi a^2$.

b) Gọi I là trung điểm AB, OH ⊥ SI

⇒ mp(SAB) ⊥ mp(SOI) ⇒ OH ⊥ (SAB)

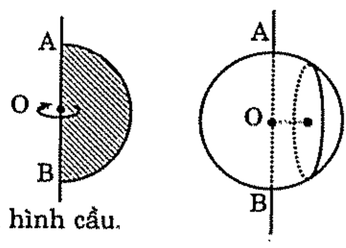
nên $OH = \dfrac{a}{2}$.

$\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{OS^2} \Rightarrow OI^2 = \dfrac{3a^2}{11} \Rightarrow SI^2 = \dfrac{36a^2}{11}$; $IA = \dfrac{2a\sqrt{22}}{11}$

Vậy $S = \dfrac{1}{2}AB.SI = \dfrac{12a^2\sqrt{2}}{11}$.

§3. HÌNH CẦU, DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

A/ KIẾN THỨC VÀ KỸ NĂNG CẦN NHỚ



1. Hình cầu : Khi quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu.

Điểm O được gọi là tâm và R là bán kính hình cầu.

Nửa đường tròn trong phép quay nói trên tạo nên một mặt cầu.

Những điểm trên mặt cầu cách tâm O một khoảng bằng R.

2. Cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng :

Khi cắt hình cầu bởi mặt phẳng (α) thì phần của (α) bị giới hạn bởi hình cầu là một hình tròn có tâm là chân đường vuông góc hạ từ tâm hình cầu xuống mặt phẳng đó.

3. Diện tích mặt cầu :

Công thức tính diện tích mặt cầu : $S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$

(R : bán kính ; d : đường kính)

4. Thể tích hình cầu :

Hình cầu bán kính R có thể tích : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

B/ BÀI TẬP

BÀI TẬP CƠ BẢN

12. Một mặt cầu có diện tích 452,16 cm^2, mặt cầu thứ hai có bán kính bằng $\frac{1}{3}$ bán kính của mặt cầu thứ nhất. Tính diện tích của mặt cầu thứ hai.

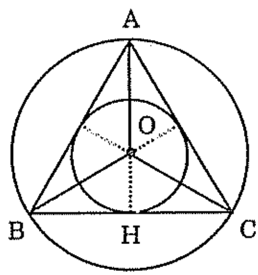
Giải

Gọi R_1, S_1 và R_2, S_2 lần lượt là bán kính, diện tích của mặt cầu thứ nhất và thứ hai. Ta có :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{\frac{1}{3}R_1}\right)^2 = 9 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{9}S_1 = 50{,}24\ (\text{cm}^2).$$

13. Cho tam giác ABC đều cạnh 9 cm và đường cao AH. Tính thể tích hình cầu tạo thành khi quay nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác một vòng quanh AH và tính diện tích mặt cầu tạo thành khi quay nửa đường tròn nội tiếp quanh AH.

Giải



ΔABC đều cạnh a thì đường cao

$AH = \frac{9\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{2}{3}AH = 3\sqrt{3}$.

Thể tích hình cầu :

$V = \frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3})^3 = 108\sqrt{3}\pi\ (\text{cm}^3)$.

Bán kính đường tròn nội tiếp trong tam giác đều : $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích mặt cầu $S = 27\pi\ (\text{cm}^2)$.

14. Một hình trụ có thể tích 423,9 cm^3 và có bán kính đường tròn đáy bằng $\frac{1}{5}$ chiều cao hình trụ. Tính thể tích của hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy của hình trụ nói trên.

Giải

$\pi R^2 h = 423{,}9 \Rightarrow R \approx 3$ (cm) (lấy $\pi \approx 3{,}14$)

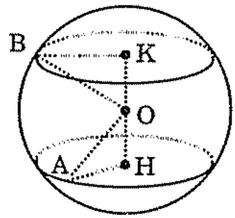
Thể tích $V \approx 113{,}04$ (cm^3).

15. Chứng minh rằng :

a) Những thiết diện cách đều tâm hình cầu là những hình tròn bằng nhau.

b) Những thiết diện không cách đều tâm là những hình tròn không bằng nhau và thiết diện nào gần tâm hơn thì có hình tròn lớn hơn.

Giải



a) Hai thiết diện cách đều tâm nên OH = OK

mà $AH = \sqrt{R^2 - OH^2}$;

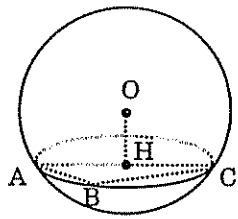
$KB = \sqrt{R^2 - OK^2} \Rightarrow AH = BK$

Vậy hai hình tròn bằng nhau.

b) $OH < OK \Rightarrow AH > BK$.

16. Trên mặt cầu có bán kính 17 cm cho ba điểm A, B, C. Người ta xác định được độ dài của các đoạn thẳng AB = 18 cm, BC = 24 cm, AC = 30 cm. Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (ABC).

Giải



Gọi OH là khoảng cách từ tâm hình cầu đến mp(ABC)

$HA = HB = HC \Rightarrow$ H là tâm đường tròn (ABC)

Chứng minh ΔABC vuông tại B.

$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 17^2 - 15^2 = 64$

$\Rightarrow OH = 8$ (cm).

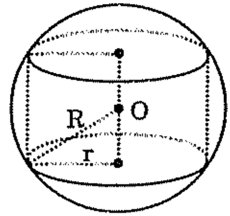
BÀI TẬP NÂNG CAO

17. Cho hình cầu bán kính R có hình trụ nội tiếp. Tính thể tích V của hình trụ theo R và x với x là khoảng cách từ tâm hình cầu đến đáy hình trụ. Xác định x để diện tích xung quanh hình trụ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Đáy của hình trụ là thiết diện của hình cầu nên có bán kính.

$$r = \sqrt{R^2 - x^2},\ R > x > 0$$



Thể tích hình trụ : $V = \pi r^2.2x = 2\pi x(R^2 - x^2)$

Diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_{xq} = 2\pi r.2x = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$= 4\pi\sqrt{x^2(R^2 - x^2)}\ \ (0 < x < R)$$

Áp dụng đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$x^2(R^2 - x^2) \le \left(\frac{x^2 + R^2 - x^2}{2}\right) = \frac{R^4}{4} \Rightarrow S_{xq} \le 2\pi R^2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = R^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

18. Cho hình cầu bán kính R, một hình nón chiều cao x nội tiếp trong hình cầu. Với giá trị nào của x thì diện tích xung quanh hình nón đạt giá trị lớn nhất ?

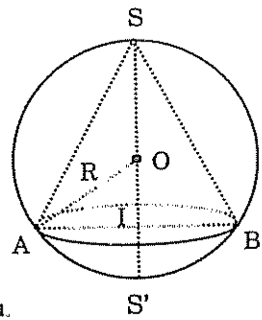
Giải

Gọi S là đỉnh hình nón, S' là điểm xuyên tâm đối với S, SA là đường sinh, SI đường cao, O là tâm hình cầu.

$AI^2 = SI.S'I = x(2R - x)$

$SA = \sqrt{2Rx}$

$S_{xq} = \pi AI.AS = \pi x\sqrt{2R(R - x)}$.



S_{xq} đạt giá trị lớn nhất

$\Leftrightarrow y = x^2(2R - x)$ đạt giá trị lớn nhất

Viết lại $y = \dfrac{1}{2}x.x(4R - 2x)$

có $x + x + (4R - 2x) = 4R$

Nên tích ba số lớn nhất khi chúng bằng nhau.

$$x = 4R - 2x \Leftrightarrow x = \frac{4R}{3}.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

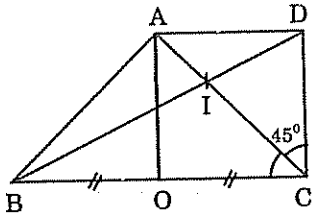
1. Vẽ hai tam giác vuông cân ; tam giác BAC vuông tại A và tam giác ADC vuông ở D, sao cho hai tam giác đó nằm hai bên của cạnh chung AC. Biết AB = a.

a) Tính BC, AD và BD theo a.

b) Gọi I là giao điểm của AC và BD, tính IA, IB, IC và ID theo a.

c) Tính theo a diện tích xung quanh của hình sinh ra khi cho tứ giác ABCD quay quanh trục BC.

Giải



a) $BC = a\sqrt{2}$; $AD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $BD = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

b) $AD // BC$: $IA = \dfrac{a}{3}$; $IC = \dfrac{2a}{3}$

$ID = \dfrac{a\sqrt{10}}{6}$ và $IB = \dfrac{a\sqrt{10}}{3}$.

c) Diện tích hình sinh ra gồm diện tích toàn phần S_1 của hình nón sinh ra bởi ΔAOB cộng với diện tích chung quanh S_2 của hình trụ sinh ra bởi cạnh AD.

$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \dfrac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2} + 3)$.

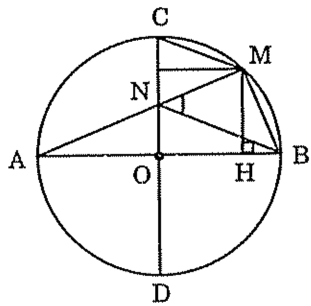
2. Trong đường tròn (O; R) cho hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Kẻ dây AM cắt CD tại N.

a) Tính AM.AN theo R.

b) Tìm số đo góc MAB sao cho MN = MB.

c) Nếu ON = MN, tính tỉ số diện tích tam giác OAM và tứ giác ONMB. Tính thể tích của hình sinh ra khi cho tứ giác ONMB quay một vòng quanh AB.

Giải



a) $AM.AN = 2R^2$

b) $NM = MB \Rightarrow \Delta NMB$ vuông cân

$\widehat{MNB} = 2\widehat{MAB} = 45^0 \Rightarrow \widehat{MAB} = 22^030'$.

c) $MH = OH = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

$\dfrac{S_{AMB}}{S_{AON}} = \dfrac{R.MH}{\frac{R}{2}.ON} = 2.\dfrac{MH}{OM}$.

Lại có $\Delta AHM \backsim \Delta AON \Rightarrow \dfrac{MH}{ON} = \dfrac{AH}{OA} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \dfrac{S_{AMB}}{S_{AON}} = 2 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow \dfrac{S_{AMB}}{S_{MNOB}} = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{S_{AOM}}{S_{MNOB}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Cho hình chữ nhật ABCD, nếu quay hình chữ nhật này quanh AB cố định thì được một hình có thể tích 288π cm^3. Còn nếu quay hình chữ nhật quanh cạnh BC cố định thì được hình có diện tích xung quanh 96π cm^2. Tính kích thước hình chữ nhật.

Giải

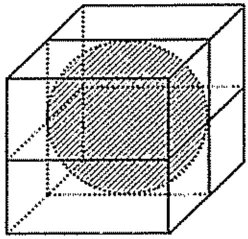
Đặt AB = x ; BC = y (đơn vị cm ; x, y > 0)

Ta có : $\pi xy^2 = 288\pi$ và $2\pi xy = 96\pi$. Suy ra : x = 8 cm ; y = 6 cm.

4. Một quả bóng hình cầu đặt trong một hộp hình lập phương, các mặt của hình lập phương đều tiếp xúc với hình cầu. Gọi V_1 là thể tích của phần ở ngoài hình cầu nhưng ở trong hình lập phương, V_2 là thể tích hình cầu. So sánh V_1 và V_2.

Giải

Gọi a là cạnh hình lập phương và V là thể tích của nó, thì bán kính hình cầu là $\frac{a}{2}$.



$$V = a^3$$

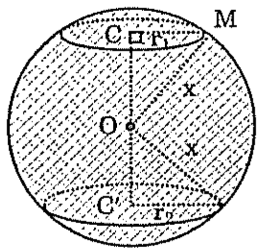
$$V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$$

$$\frac{V_2}{V} = \frac{\pi a^3}{6} : a^3 = \frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}$$

Mà $V_1 = V - V_2 \Rightarrow V_2 > V_1$.

5. Hai mặt phẳng song song cách nhau một khoảng d cắt một hình cầu được hai thiết diện là hai đường tròn có bán kính r_1, r_2 ($r_1 \geq r_2$). Tính bán kính hình cầu theo r_1, r_2.

Giải



Gọi x là bán kính mặt cầu, ta có :

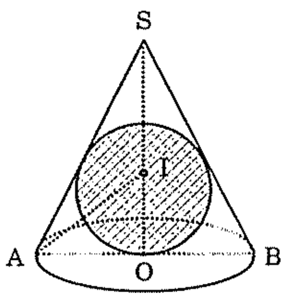
$$OC = \sqrt{x^2 - r_1^2} \;;\; OC' = \sqrt{x^2 - r_2^2}$$

$$\Rightarrow CC' = \sqrt{x^2 - r_1^2} + \sqrt{x^2 - r_2^2} = d.$$

$$x = \frac{1}{2d}\sqrt{4d^2r_2^2 + (d^2 + r_1^2 - r_2^2)}.$$

6. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, một hình cầu tâm I nội tiếp hình nón này. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hình nón và diện tích mặt cầu, V_1, V_2 là thể tích của chúng. Chứng minh rằng : $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$ và $\frac{V_1}{V_2} \geq 2$

Giải



Gọi l, h, R và r lần lượt là độ dài của đường sinh, đường cao, bán kính đáy của hình nón và bán kính mặt cầu nội tiếp.

Diện tích toàn phần và thể tích của hình nón lần lượt là S_1 ; V_1 :

Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu lần lượt là S_2 ; V_2 :

Suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R^2h}{4r^2}$; $\frac{S_1}{S_2} = \frac{R(l + R)}{4r^2}$

$$l + R = \frac{Rh}{r} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{R.Rh}{4r^2.r} = \frac{R^2h}{4r^3} = \frac{V_1}{V_2}$$

Đặt $2\alpha = \widehat{SAO} \Rightarrow h = R\tan 2\alpha,\ r = R\tan\alpha$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2\tan^2\alpha(1-\tan^2\alpha)} \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left[\dfrac{\tan^2\alpha + 1 - \tan^2\alpha}{2}\right]^2} = 2.$$

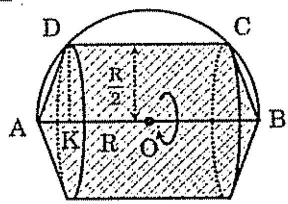
7. Trong nửa đường tròn, người ta vẽ dây cung CD song song với đường kính AB và độ dài bằng cạnh của tam giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AB = 2R.

a) Tính diện tích hình thang ABCD.

b) Tính thể tích hình sinh ra khi quay hình thang một vòng quanh cạnh AB.

Giải

a) $CD = R\sqrt{3}$; $OH = \dfrac{R}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{(2+\sqrt{3})R^2}{4}$.



b) Khi quay hình thang ABCD quanh AB cạnh CD sinh ra hình trụ có bán kính OH và chiều cao CD

$$V_1 = \pi.OH^2.CD = \frac{\pi R^3\sqrt{3}}{4}.$$

Hai cạnh AD và BC sinh ra hai hình nón bằng nhau có bán kính đáy R = OH và chiều cao $h = AK = OA - OK = \dfrac{(2-\sqrt{3})}{2}R$.

$$V_2 = 2.\frac{1}{3}\pi OH^2.AK = \frac{\pi R^3(2-\sqrt{3})}{2}.$$

Thể tích hình cần tìm $V = V_1 + V_2 = \dfrac{\pi R^3}{6}(1+\sqrt{3})$.

8. Cho tam giác ABC cân đáy AC và tam giác ADC cân đáy AC, biết AC = b (B, D nằm trong nửa mặt phẳng bờ AC). Biết $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{ACD} = \beta$ $(\alpha > \beta)$.

Giả sử AD cố định, cho hình ABCDA quay một vòng quanh BD.

Tính thể tích của hình không gian được tạo thành.

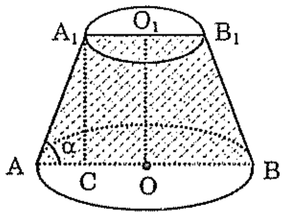
Giải

$$V = \frac{1}{3}\pi\frac{b^2}{4}.\frac{b}{2}(\tan\alpha - \tan\beta).$$

9. Cho hình thang cân ABB_1A_1 (A_1B_1 // AB), $\widehat{A_1AB} = \widehat{B_1BA} = \alpha$, $AA_1 = a$, $\widehat{AA_1B} = 90^0$. Gọi O, O_1 lần lượt là trung điểm của AB, A_1B_1.

Khi hình thang A_1AOO_1 quay một vòng quanh O_1O cố định, ta được hình nón cụt có đáy lần lượt là các hình tròn (O ; OA) và (O_1 ; O_1A_1). Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt tạo thành.

Giải



$AB = 2R = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.

$OA = R = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$.

$A_1O_1 = r = AO - AC = a\left(\dfrac{1}{2\cos\alpha} - \cos\alpha\right)$.

$S_{xq} = \pi a(R + r) = \pi a^2\left(\dfrac{1}{2\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = \pi a^2.\tan\alpha.\sin\alpha$.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

I/ ĐẠI SỐ

1. Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - 2(3 - 2\sqrt{2})x + 17 - 12\sqrt{2} = 0$

b) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$

c) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2\sqrt{2}}{1-x} - \dfrac{6+\sqrt{2}}{x^2-1} = 0$

d) $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4 - 2x - x^2$

e) $3(x^2 - x + 1) = (x + \sqrt{x-1})^2$

Giải

a) Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

b) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^4 - (5x - 6)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x - 6) = 0$. Vậy $S = \{-6 ; 1 ; 2 ; 3\}$.

c) Điều kiện : $x \neq \pm 1$

Phương trình trở thành : $x^2 + (2\sqrt{2} - 1)x - 6 + \sqrt{2} = 0$

Vậy $S = \{\sqrt{2} ; 1 - 3\sqrt{2}\}$.

d) $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = \sqrt{3(x+1)^2+4} + \sqrt{5(x+1)^2+9} \geq 5$

$-x^2 - 2x + 4 = -(x + 1)^2 + 5 \leq 5$

Vậy $S = \{-1\}$.

e) $3(x^2 - x + 1) = (x + \sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow 2(x + \sqrt{x-1})(x - 2\sqrt{x-1}) = 0$ $(x \geq 1)$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

2. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases}(x-y)^2 + 3(x-y) = 4\\ 2x + 3y = 12\end{cases}$

b) $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y-1} - \dfrac{5}{2x-y+3} = \dfrac{5}{2}\\ \dfrac{3}{x+y-1} + \dfrac{1}{2x-y+3} = \dfrac{7}{5}\end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 25 \\ y^2 + yz + z^2 = 49 \\ z^2 + zx + x^2 = 121 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{4}{x + 2y - 3} + 2x - y = 2 \\ \dfrac{2}{x + 2y - 3} - 4x + 2y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^3 + y^2 = 2 \\ x^2 + xy + y^2 - y = 0 \end{cases}$

Giải

a) $(x ; y) = (3 ; 2)$ và $(0 ; 4)$.

b) Điều kiện : $x + y \neq 1$; $2x - y \neq -3$.

Đặt $X = \dfrac{1}{x + y - 1}$; $Y = \dfrac{1}{2x - y + 3}$

Hệ trở thành : $\begin{cases} 4X - 5Y = \dfrac{5}{2} \\ 3X + Y = \dfrac{7}{5} \end{cases}$. Vậy $(x ; y) = \left(-\dfrac{10}{3} ; \dfrac{19}{3}\right)$.

c) Từ hai phương trình đầu suy ra : $x^2 < 25$, $z^2 < 49 \Rightarrow |x| < 5$, $|z| < 7$

$\Rightarrow xz \leq |xz| < 35$. Do đó : $z^2 + xz + x^2 < 109$

Hệ đã cho vô nghiệm.

d) $(x ; y) = (1 ; 2)$.

e) Viết phương trình dạng : $y^2 + (x - 1)y + x^2 = 0$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

Lại viết dưới dạng : $x^2 + yx + y^2 - y = 0$, $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \dfrac{4}{3}$.

Vậy $x^3 + y^2 \leq \dfrac{1}{27} + \dfrac{16}{9} = \dfrac{49}{27} < 2$. Hệ vô nghiệm.

3. Rút gọn biểu thức sau : $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 4}}$ với $x \geq 2$

Giải

Nhận xét $A > 0$

$$A^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 - (x^2 - 4)} = 2x + 4 \Rightarrow A = \sqrt{2x + 4}.$$

4. Giải các phương trình sau :

a) $\dfrac{2x^2}{(3 - \sqrt{9 + 2x})^2} = x + 9$

b) $\sqrt{2x + 4} - 2\sqrt{2 - x} = \dfrac{12x - 8}{\sqrt{9x^2 + 16}}$

c) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$

d) $\sqrt{x(x + 1)} + \sqrt{x(x + 2)} = \sqrt{x(x + 3)}$.

Giải

a) Điều kiện : $x \geq -\dfrac{9}{2}$; $x \neq 0$.

Phương trình có dạng : $\dfrac{2x^2(3+\sqrt{9+2x})^2}{[9-(9+2x)]^2} = x + 9$

$\Leftrightarrow (3 + \sqrt{9+2x})^2 = 2x + 18$.

b) Điều kiện : $-2 \leq x \leq 2$

Phương trình có dạng : $\dfrac{2x+4-4(2-x)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} = \dfrac{4(3x-2)}{\sqrt{9x^2+16}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(3x-2)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} = \dfrac{4(3x-2)}{\sqrt{9x^2+16}} \ldots$

c) Đặt $a = \sqrt{2x+3}$; $b = \sqrt{x+1}$ (ĐK : $x \geq -1$)

Phương trình có dạng : $a + b = a^2 + b^2 + 2ab - 20$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 - (a+b) - 20 = 0 \Leftrightarrow a + b = 5$ $(a, b \geq 0) \ldots$

d) Bình phương cả hai vế dẫn đến phương trình hệ quả. Sau đó kiểm tra lại.

5. Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} - \dfrac{2x-2}{\sqrt{x}+1}\right) . \dfrac{1}{x-\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn A.

b) Xét biểu thức $B = A.\dfrac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$. Tìm x để biểu thức B có giá trị nguyên.

Giải

a) ĐKXĐ : $x > 0$: $A = \dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}$.

b) $B = \dfrac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$, $B > 0$; $x - \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} \Rightarrow B \leq 2$

Vậy $0 < B \leq 2 \Rightarrow B = 1$ hay $B = 2$ (do $B \in \mathbb{Z}$) $x \in \left\{\dfrac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} ; 1\right\}$.

6. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}+1} + \dfrac{\sqrt{x}-2}{1-x}\right) : \left(\dfrac{x+1}{x-1} - 1\right)$

a) Rút gọn P. Tìm giá trị của biểu thức P biết $|2\sqrt{x} - 1| = 3$

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Giải

a) ĐKXĐ : $x \geq 0$, $x \neq 1$, $P = \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

$|2\sqrt{x} - 1| = 3 \Leftrightarrow x = 4$. Lúc đó : $P = 6$.

b) $P = 3 + \dfrac{3}{\sqrt{x}-1}$, $\sqrt{x} \in \{0, 2, 4\} \Rightarrow x \in \{0, 4, 16\}$.

. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là (P) và hai điểm A, B thuộc (P) có $x_A = -1$ và $x_B = 2$.

a) Viết phương trình đường thẳng AB.

b) Vẽ đồ thị (P) và tìm toạ độ điểm M thuộc cung AB của đồ thị (P) sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

Giải

a) (AB) : $y = x + 2$.

b) Xét $M \in (P)$ với $M(m ; m^2)$

$-1 \le m \le 2$. Gọi C, D, N lần lượt là hình chiếu của A, B, M trên Ox

$NC = |m + 1| = m + 1$, $ND = |2 - m| = 2 - m$, $CD = 3$.

$$S_{AMB} = S_{ABCD} - (S_{AMNC} + S_{BDMN})$$

$$= 3.\frac{(1+4)}{2}\left[\frac{(m^2+1)(m+1)}{2} + \frac{(4+m^2)(2-m)}{2}\right]$$

$$= -\frac{3}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{8} \le \frac{27}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \in [-1 ; 2]$.

8. Cho phương trình (ẩn x) : $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$, với $m \ne -1$ (1).

a) Chứng minh phương trình (1) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1), tìm m để $x_1x_2 > 0$ và $x_1 = 2x_2$.

Giải

a) $m \ne -1$ nên phương trình đã cho là phương trình bậc hai

Ta có : $a + b + c = m + 1 - 2(m - 1) + m - 3 = 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = \frac{m-3}{m+1} \ne 1$.

b) $m = 7$ hay $m = -5$.

9. Cho phương trình (ẩn x) : $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$ (1)

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng 2 và tính nghiệm còn lại.

c) Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{7}{4}$

Giải

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \ne 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne -1 \\ m < 3. \end{cases}$$

b) x = 2 là nghiệm phương trình

$\Leftrightarrow (m + 1)4 - 4(m - 1) + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -6$.

Lúc đó $x_1 + x_2 = \dfrac{15}{4} \Rightarrow x_2 = \dfrac{4}{5}$.

c) Phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{7}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0, m \ne 1, m \ne 2 \\ \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = -6.$$

B/ HÌNH HỌC

10. Cho đường tròn (O; R), đường thẳng d không qua O cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Từ một điểm C trên d (C nằm ngoài đường tròn), kẻ hai tiếp tuyến CM, CN với đường tròn (M, N ∈ (O)). Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K.

a) Chứng minh bốn điểm C, O, H, N thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh : KN.KC = KH.KO.

c) Đoạn thẳng CO cắt (O) tại I, chứng minh I cách đều CM, CN và MN.

d) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích tam giác CEF là nhỏ nhất.

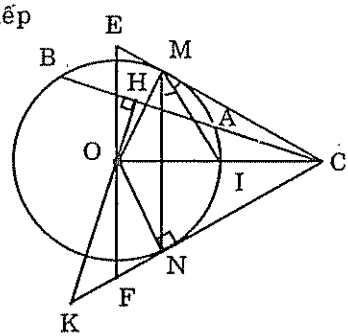
Giải

a) OH đi qua trung điểm H của dây AB không qua tâm $\Rightarrow OH \perp AB$

$\widehat{OHC} = \widehat{ONC} = 90^0 \Rightarrow$ O, H, C, N cùng thuộc một đường tròn.

b) $\cos\widehat{HKC} = \dfrac{KN}{OK} = \dfrac{HK}{KC} \Rightarrow KN.KC = HK.OK$.

c) Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta CMN \Rightarrow$ I cách đều CM, CN và MN.



d) Dễ dàng chứng minh ΔCEF cân tại C nên đường cao CO cũng là đường trung tuyến.

$$S_{CEF} = \frac{1}{2}OC.EF = \frac{1}{2}OC(2OE)$$

$$= OC.OE = OM.CE$$

$$= OM(ME + MC) \ge 2OM\sqrt{ME.CM}$$

$$= 2OM\sqrt{OM^2} = 2OM^2 = 2R^2.$$

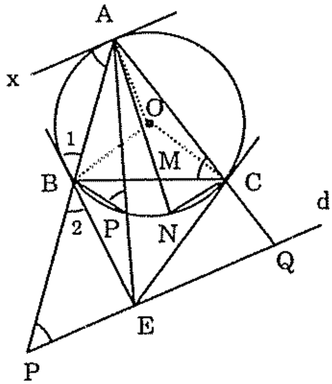
11. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O; R) các tiếp tuyến tại B và C với đường tròn (O) cắt nhau tại E, AE cắt đường tròn (O) tại D (khác điểm A).

a) Chứng minh rằng tứ giác OBEC nội tiếp.

b) Từ E kẻ đường thẳng d song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) d cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh : AB.AP = AD.AE

c) Gọi M là trung điểm đoạn thẳng BC. Chứng minh : EP = EQ và góc PAE bằng góc MAC.

d) Chứng minh rằng : $AM.MD = \dfrac{BC^2}{4}$.



Giải

a) $\widehat{OBE} = \widehat{OCE} = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác OBEC nội tiếp.

b) $\Delta ADB \backsim \Delta APE$ (g.g)

$\Rightarrow AB.AP = AD.AE$.

c) Ta có : $\begin{cases} \widehat{BAx} = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \\ \widehat{BAx} = \widehat{APE} \end{cases} \Rightarrow \widehat{APE} = \widehat{B}_2$

$\Rightarrow \Delta BEP$ cân tại E $\Rightarrow$ BE = PE.

Tương tự ΔECQ cân tại E. $\Rightarrow$ CE = EQ,

mà EB = EC, do đó EP = EQ.

ΔABC và ΔAQP có : $\widehat{BAC}$ (chung), $\widehat{ACB} = \widehat{APQ}$ (= $\widehat{BAx}$).

Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta AQP$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{BC}{PQ} = \dfrac{MC}{EC} \Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta APE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{PAE}$.

d) Gọi N là giao điểm của tia AM với (O)

$\Delta BAM \backsim \Delta NMC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MB}{MN} = \dfrac{MA}{MC} \Rightarrow MA.MN = MB.MC = \dfrac{BC^2}{4}$

Dễ dàng chứng minh : $\Delta MBD = \Delta MCN$ (c.g.c) $\Rightarrow$ MD = MN

Vậy $\dfrac{BC^2}{4} = MA.MN = MA.MD$.

12. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O ; R). Các đường cao AD, BM, CN cắt nhau tại H. Gọi K là trung điểm của AH.

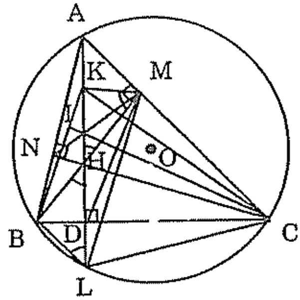
a) Chứng minh tứ giác BNMC nội tiếp và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNH

b) Gọi L là điểm đối xứng của H qua BC. Chứng minh AM.AC = AN.AB và điểm L thuộc đường tròn (O).

c) Gọi I là giao điểm AH và MN. Chứng minh MB là tia phân giác góc NMD và IH.AD = AI.DH.

d) Chứng minh I là trực tâm tam giác BKC.

Giải



a) $\widehat{BNC} = \widehat{BMC} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác BNMC nội tiếp.

Tứ giác ANHM nội tiếp đường tròn đường kính AH có tâm là trung điểm AH $\Rightarrow$ K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHMN.

b) $\cos A = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \Rightarrow AM.AC = AN.AB$

H và L đối xứng nhau qua BC.

$\Rightarrow \widehat{CBL} = \widehat{CBH}$, mà $\widehat{CBH} = \widehat{LAC}$ (cùng phụ $\widehat{BCA}$) $\Rightarrow \widehat{CBL} = \widehat{LAC} \Rightarrow$ Tứ giác ABLC nội tiếp $\Rightarrow L \in (O)$.

c) $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = \widehat{CMD} \Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{BMD}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau) $\Rightarrow$ MB là tia phân giác $\widehat{NMB}$.

Lại có AM $\perp$ MB $\Rightarrow$ MA là đường phân giác ngoài tại đỉnh M của ΔIMD. Áp dụng tính chất phân giác trong và ngoài đối với ΔIDM, ta có:

$$\frac{IH}{HD} = \frac{IM}{MD} = \frac{AI}{AD} \Rightarrow IH.AD = AI.HD.$$

d) Tứ giác ABLC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CLI} = \widehat{CBA}$ (1)

Tứ giác BCMN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ (2)

Từ (1) ; (2) cho : $\widehat{CLI} = \widehat{AMI} \Rightarrow$ Tứ giác CLIM nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MCI} = \widehat{MLI}$ (3)

MK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong ΔAMH vuông tại M $\Rightarrow \widehat{KMH} = \widehat{KHM} = \widehat{BHL} = \widehat{BLH} \Rightarrow$ tứ giác BKML nội tiếp.

Gọi E là giao điểm CI và BK.

Ta có $\widehat{KBM} = \widehat{KLM} = \widehat{ICM} \Rightarrow$ tứ giác BCME nội tiếp.

Suy ra : $\widehat{BEC} = \widehat{BMC} = 90^0 \Rightarrow CI \perp BK$

Mà KI $\perp$ BC ; nên I là trực tâm của ΔKBC.

13. Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K khác A.

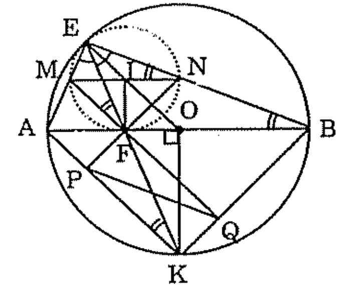
a) Chứng minh rằng $\Delta KAF \backsim \Delta KEA$.

b) Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE. Chứng minh rằng đường tròn (I, IE) tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

c) Gọi M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I ; IE). Chứng minh rằng MN // AB.

d) Gọi P là giao điểm của NF và AK ; Q là giao điểm của MF và BK. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác KPQ theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O).

Giải



a) $\Delta KAF \backsim \Delta KEA$ (g.g)

b) Ta có E, I, O thẳng hàng.

Do đó đường tròn (I ; IE) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại E. ΔIEF có $IE = IF$ (= r) $\Rightarrow \Delta IEF$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IEF} = \widehat{IFC}$.

Chứng minh tương tự ΔOEK cân tại O $\Rightarrow \widehat{OEK} = \widehat{OKE}$.

Ta có $\widehat{IFE} = \widehat{OKE}$ (= $\widehat{IEF}$) $\Rightarrow IF \parallel OK$. Mà $OK \perp AB$ ($\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{BK}$)

Nên $IF \perp AB$. Vậy đường tròn (I ; IE) tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

c) Ta có $IF \perp MN$, $IF \perp AB \Rightarrow MN \parallel AB$.

d) Ta có : $\widehat{MFE} = \widehat{MNE} = \widehat{ABE} = \widehat{EKA} \Rightarrow MF \parallel AK$.

Chứng minh tương tự cũng có $NF \parallel BK$. Do đó tứ giác KPFQ là hình bình hành.

Mà $\widehat{AKQ} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra KPFQ là hình chữ nhật $\Rightarrow KQ = PF$, $PQ = KF$.

Ta có : ΔPAF vuông cân tại P $\Rightarrow PF = AP$.

Do đó $KP + KQ = KP + PF = KP + AP = KA$, không đổi.

$KF \geq KO$. Vậy $KF \geq R$, không đổi.

4. Cho C là một điểm nằm trên đoạn thẳng AB ($C \neq A$; $C \neq B$). Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB, kẻ hai tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm I($I \neq A$), tia vuông góc với CI tại C cắt tia By tại K. Đường tròn đường kính IC cắt IK tại P.

a) Chứng minh :

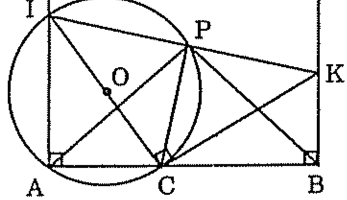
i) Tứ giác CPKB nội tiếp được đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

ii) $AI.BK = AC.CB$.

iii) Tam giác APB vuông.

b) Cho A, B, I cố định. Tìm vị trí của điểm C sao cho diện tích tứ giác ABKI đạt giá trị lớn nhất.

Giải



a) i) $\widehat{CPI} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow CP \perp IK \Rightarrow \widehat{CPK} = 90^0$.

Ta có $\widehat{CPK} = \widehat{CBK} = 90^0$.

Vậy tứ giác CPKB nội tiếp được đường tròn, tâm của đường tròn là trung điểm của CK.

ii) $\Delta ACI \backsim \Delta BCK$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{BK} = \dfrac{AI}{CB}$

$\Rightarrow AI.BK = AC.CB$.

iii) $\Delta PAB \backsim \Delta CIK$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{APB} = \widehat{ICK}$

Mà $\widehat{ICK} = 90^0$ ($CI \perp CK$)

Nên $\widehat{APB} = 90^0$. Vậy ΔAOB vuông tại P.

b) $Ax \perp AB$, $By \perp AB \Rightarrow Ax \,//\, By \Rightarrow$ Tứ giác ABKI là hình thang.

Mà $\widehat{IAB} = 90^0$. Nên ABKI là hình thang vuông.

Do đó $S_{ABKI} = \dfrac{(AI + BK)AB}{2}$

Theo bất đẳng thức Cô–si có $AC.CB \le \dfrac{(AC + CB)^2}{4}$

Do vậy $BK = \dfrac{AC.CB}{AI} \le \dfrac{AB^2}{4AI}$, không đổi.

15. a) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ một điểm C thuộc đường tròn (O) kẻ CH vuông góc AB (C khác A và B ; H thuộc AB). Đường tròn tâm C bán kính CH cắt đường tròn (O) tại D và E. Chứng minh DE đi qua trung điểm của CH.

b) Cho ABC là tam giác đều có cạnh bằng 1. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{CBE} = 20^0$. Gọi M là trung điểm của BE và N là điểm trên cạnh BC sao cho BN = BM. Tính tổng diện tích hai tam giác BCE và BEN.

Giải

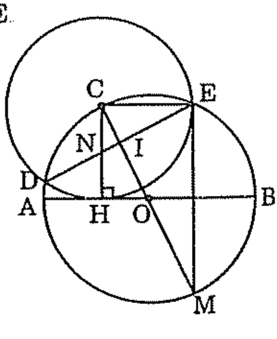
a) Vẽ đường kính CM của đường tròn (O).

Ta có $\widehat{CEM} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Gọi N, I lần lượt là giao điểm của DE với CH, CM. (O) và (C) cắt nhau tại D, E.

$\Rightarrow$ OC là đường trung trực của đoạn thẳng DE.

$\Rightarrow OC \perp DE$



ΔCEM vuông tại E, EI là đường cao.

$\Rightarrow CI.CM = CE^2$ (1)

Xét ΔCIN và ΔCHO có $\widehat{ICN}$ (chung),

$\widehat{CIN} = \widehat{CHO}$ $(= 90^0)$

Do đó $\Delta CIN \backsim \Delta CHO$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CI}{CH} = \dfrac{CN}{CO} \Rightarrow CN.CH = CI.CO$ (2)

Mà CH = CE (= bán kính đường tròn (C)) (3) và $\frac{1}{2}$CM = CO (=R) (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có 2CN = CH $\Rightarrow$ N là trung điểm của đoạn thẳng CH.

Vậy DE đi qua trung điểm của CH.

b) Ta có ΔABC đều và $\widehat{ABD} = \widehat{CBE} = 20^0$ (gt)

Suy ra $\widehat{DBE} = 20^0$.

Xét ΔBAD và ΔBCE có $\widehat{BAD} = \widehat{BCE}$ (= 60^0), BA = BC (ΔABC đều), $\widehat{ABD} = \widehat{CBE}$ (= 20^0)

Do đó $\Delta BAD = \Delta BCE$ (g.c.g)

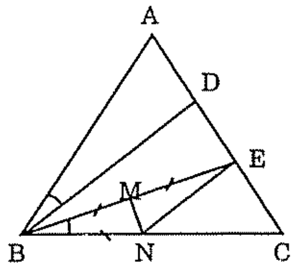
$\Rightarrow$ BD = BE. Và $S_{BAD} = S_{BCE}$.

Vậy ΔBDE cân tại B.

ΔBMN có BM = BN (gt) $\Rightarrow$ ΔBMN cân tại B.

$\widehat{MBN} = \widehat{DBE}$ (= 20^0) $\Rightarrow \Delta BMN \backsim \Delta BDE$

$\Rightarrow \dfrac{S_{BMN}}{S_{BDE}} = \left(\dfrac{BM}{BD}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{BMN} = \dfrac{1}{4}S_{BDE}$



Ta có $S_{BEN} = 2S_{BMN} = \dfrac{1}{2}S_{BDE}$

$\Rightarrow S_{BDE} + S_{BEN} = \dfrac{1}{2}(S_{BAD} + S_{BCE} + S_{BDE}) = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$

Mà $S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{BCE} + S_{BEN} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ (đvdt).

16. Cho đoạn thẳng AB = 2R. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, ta vẽ nửa đường tròn (C) tâm O đường kính AB và hai tiếp tuyến Ax, By với (C). Một đường thẳng (d) thay đổi cắt Ax, By lần lượt tại các điểm M, N (M ≠ A, N ≠ B). Gọi I là giao điểm của AN và BM.

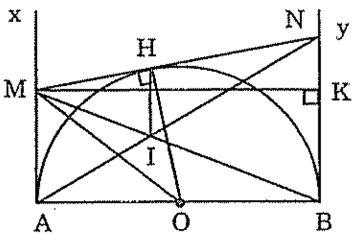
a) Chứng minh rằng nếu (d) là tiếp tuyến của (C) thì $\widehat{MON} = 90^0$.

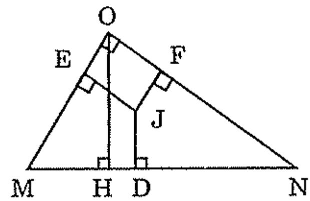
b) Chứng minh rằng nếu $\widehat{MON} = 90^0$ thì đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C).

c) Cho (d) tiếp xúc với (C) tại H. Tìm vị trí của (d) để tứ giác HIBN nội tiếp được trong đường tròn

d) Trường hợp (d) tiếp xúc (C). Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MON. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{3} < \dfrac{r}{R} < \dfrac{1}{2}$.

Giải





b) Giả sử $\widehat{MON} = 90^0$, từ M vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt By tại N'. Theo kết quả câu a, ta có : $\widehat{MON'} = 90^0 \Rightarrow N \equiv N' \Rightarrow$ MN là tiếp tuyến của đường tròn (C).

c) Ta chứng minh được IH // BN.

HIBN nội tiếp được đường tròn ⇔ HIBN là hình thang cân.

⇔ ΔMNB cân tại M ⇔ KN = KB (kẻ MK ⊥ NB)

Đặt AM = x ⇒ NB = 2BK = 2AM = 2x, MN = 3x

ΔMNK vuông tại K nên :

$$MN^2 = MK^2 + NK^2 \Leftrightarrow 9x^2 + 4R^2 + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Vậy (d) cần tìm là đường thẳng qua M, cách A một khoảng $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ và tiếp xúc với đường tròn (C).

d) Gọi (J, r) là đường tròn nội tiếp ΔOMN lần lượt tiếp xúc với MN, OM, ON tại D, E và F. Dễ dàng chứng minh OEJF là hình vuông và

$$MN.OH = r(MN + ON + OM) \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{r}{OH} = \frac{MN}{MN + ON + OM}$$

Lại có OM + ON > MN ⇒ OM + ON + MN > 2MN ⇒ $\frac{r}{R} < \frac{1}{2}$

$$OM < MN\ ;\ ON < MN \Rightarrow OM + ON + MN < 3MN \Rightarrow \frac{r}{R} > \frac{1}{3}.$$

Vậy $\frac{1}{3} < \frac{r}{R} < \frac{1}{2}$.

7. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính BC = 2R và một điểm A trên nửa đường tròn (A khác B và C). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ hai nửa đường tròn đường kính HB và HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F.

a) Chứng minh AE.AB = AF.AC.

b) Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn đường kính HB và HC.

c) Gọi I và K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC. Chứng minh ba điểm I, A, K thẳng hàng.

d) Đường thẳng IK cắt tiếp tuyến kẻ từ B của nửa đường tròn (O) tại M. Chứng minh ba đường thẳng MC, AH, EF đồng quy.

Giải

a) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có : $AE.AB = AF.AC = AH^2$.

b) Tứ giác AEHF là hình chữ nhật nên hai đường chéo AH, EF cắt nhau tại trung điểm D của mỗi đường $\Delta O_1ED = \Delta O_1HD$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{O_1ED} = \widehat{O_1HD} = 90^0$$

Vậy $EF \perp O_1E$ tại E, O_1E là bán kính của đường tròn $(O_1) \Rightarrow$ EF là tiếp tuyến của (O_1).

Lí luận tương tự EF là tuyếp tuyến (O_2)

c) Theo tính chất đối xứng $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$; $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$

$\widehat{IAH} + \widehat{HAK} = 2(\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3) = 2\widehat{BAC} = 180^0 \Rightarrow$ I, A, K thẳng hàng.

d) Gọi S là giao điểm của tia CA và tia BM.

Giả sử MC cắt AH tại D'.

Dễ dàng chứng minh BM = MS.

Áp dụng hệ quả định lí Ta-lét, ta có :

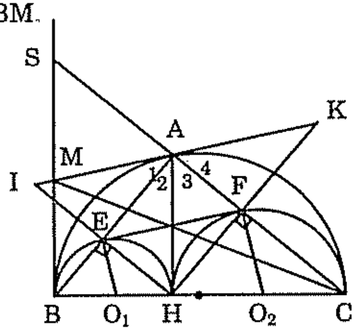
AH // BS nên : $\dfrac{HD'}{BM} = \dfrac{CD'}{CM} = \dfrac{AD'}{SM}$

$\Rightarrow HD' = AD'$

$\Rightarrow$ D' trung điểm AH.

Mà D là trung điểm AH $\Rightarrow D \equiv D'$.

Vậy ba đường AH, EF, MC đồng quy.



18. Cho đường tròn (O ; R), qua điểm K ở bên ngoài đường tròn, kẻ các tiếp tuyến KB, KD (B, D là các tiếp điểm), kẻ cát tuyến KAC (A nằm giữa K và C).

a) Chứng minh rằng : $\Delta KDA \backsim \Delta KCD$.

b) Chứng minh rằng : AB.CD = AD.BC.

c) Gọi I là trung điểm BD. Chứng minh tứ giác AIOC nội tiếp.

d) Kẻ dây CN song song với BD. Chứng minh ba điểm A, I, N thẳng hàng.

Giải

a) $\Delta KDA \backsim \Delta KCD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KA}{KD} = \dfrac{AD}{DC}$

b) Tương tự : $\Delta KBA \backsim \Delta KCB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KA}{KB} = \dfrac{AB}{BC}$.

mà KD = KB (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \dfrac{KA}{KD} = \dfrac{KA}{KB} \Rightarrow \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$. Vậy : AB.CD = AD.BC.

) Ta có : KA.KC = KI.OK (cùng bằng KB^2)

$\Rightarrow \dfrac{KA}{KI} = \dfrac{KO}{KC}$. Vậy $\Delta KAI \backsim \Delta KCO$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{KAI} = \widehat{KCO}$, nên tứ giác AIOC nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

) Ta có : $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \widehat{KIA}$ mà $\widehat{OIC} = \widehat{OAC}$

(hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{OC}$) $\Rightarrow \widehat{KIA} = \widehat{OIC}$.

Tứ giác BCND nội tiếp (O) có CN // BD ⇒ BCND hình thang cân.

Lại có OK là đường trung trực của BD nên OK cũng là đường trung trực CN.

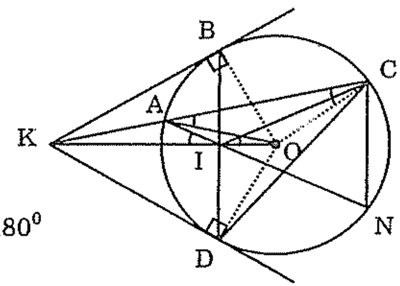
Suy ra : IC = IN ⇒ ΔICN cân tại I

Do đó OI là tia phân giác $\widehat{CIN}$

$\Rightarrow \widehat{OIC} = \widehat{OIN} = \widehat{KIA}$.

Ta có : $\widehat{AIO} + \widehat{OIN} = \widehat{AIO} + \widehat{KIA} = 180^0$

⇒ A, I, N thẳng hàng.



(C)ho đường tròn (O ; R) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Từ A vẽ (h)ai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) với B, C là hai tiếp điểm.

Chứng minh tứ giác OBAC nội tiếp.

Từ B vẽ đường thẳng song song với AC, cắt đường tròn (O) tại điểm D (khác điểm B). Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại E (khác điểm D) và tia BE cắt AC tại F. Chứng minh rằng F là trung điểm AC.

Chứng minh tia đối của tia EC là tia phân giác của góc BEA.

Gọi H là giao điểm của BC và OA. Chứng minh rằng HB là phân giác của góc EHD.

Giải

Ta có $\Delta FCE \backsim \Delta FBC$ (g.g) $\Rightarrow FC^2 = FE.FB$ (1)

$\Delta FAE \backsim \Delta FBA$ (g.g) $\Rightarrow FA^2 = FE.FB$ (2)

Từ (1), (2) cho $FC^2 = FA^2 \Rightarrow FC = FA$

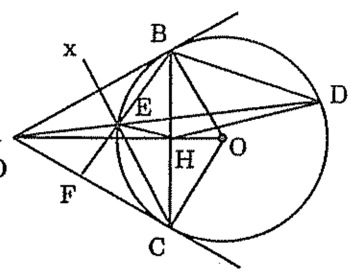
Vậy F trung điểm của đoạn thẳng AC.

Ta có $\widehat{BCE} = \widehat{BDE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BE}$) $\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{EAC}$

$\widehat{EBC} = \widehat{ECA}$ (hệ quả của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây)

⇒ $\Delta BCE \backsim \Delta CAE$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{CEA}$

⇒ $\widehat{BEx} = \widehat{AEx}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).



$\Delta ABE \backsim \Delta ADB$ (g.g) $\Rightarrow AB^2 = AE.AD$

Lại có $AB^2 = AH.OA \Rightarrow AE.AD = AH.AO$

⇒ $\dfrac{AE}{AH} = \dfrac{OA}{AD}$.

Do đó $\Delta AEH \backsim \Delta AOD$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{ADO} \Rightarrow$ Tứ giác OHED nội tiếp.

Mà ΔODE cân tại O nên $\widehat{ODE} = \widehat{OED}$

$\widehat{OED} = \widehat{OHD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Suy ra : $\widehat{AHE} = \widehat{OHD} \Rightarrow \widehat{DHB} = \widehat{EHB}$ (cùng phụ hai góc bằng nhau)

Vậy HB là đường phân giác của $\widehat{DHE}$.

20. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) có tâm O, bán kính R. Gọi H là giao điểm của ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC. Gọi S là diện tích tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng AEHF và AEDB là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Vẽ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh $\Delta ABD \backsim \Delta AKC$.

Suy ra $AB.AC = 2R.AD$ và $S = \dfrac{AB.BC.CA}{4R}$.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh EFDM là tứ giác nội tiếp đường tròn.

d) Chứng minh rằng $OC \perp DE$ và $(DE + EF + FD).R = 2S$.

Giải

b) $\Delta ABD \backsim \Delta AKC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AK}{AB} = \dfrac{AC}{AD} \Rightarrow AB.AC = 2R.AD$

$$\Rightarrow \frac{AB.BC.CA}{4R} = \frac{2R.AD.BC}{4R} = \frac{AD.BC}{2} = S$$

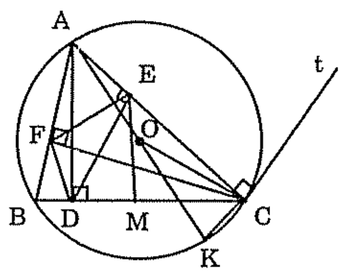
c) Tứ giác BFHD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{DFH}$

Tứ giác BFIC nội tiếp $\widehat{CBE} = \widehat{CFE}$

$\Rightarrow \widehat{EFD} = 2\widehat{EBC}$

Lại có : $\widehat{EMC} = 2\widehat{EBC} \Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{EFD}$

$\Rightarrow$ EFDM nội tiếp.



d) Dựng tiếp tuyến Ct của (O), chứng minh DE // Ct

$\Rightarrow OC \perp DE$.

Tương tự $OA \perp EF$, $OB \perp FD$

$\Rightarrow OA.EF = 2S_{OEAF}$; $OB.FD = 2S_{ODBF}$; $OC.DE = 2S_{ODCE}$

$\Rightarrow OA.EF + OB.FD + OC.DE = 2S \Rightarrow R(EF + FD + DE) = 2S$.

PHỤ LỤC

CÁC BÀI TOÁN HAY VÀ KHÓ

I/ ĐẠI SỐ

Bài 1. Rút gọn biểu thức sau

$$A = \left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{13-\sqrt{6}+2\sqrt{30-\sqrt{54}}}+\sqrt{11}-\sqrt{10-\sqrt{6}}\right)$$

Giải

$$A = \left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{13-\sqrt{6}+2\sqrt{30-\sqrt{54}}}+\sqrt{11}-\sqrt{10-\sqrt{6}}\right)c$$

$$= \left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+2\sqrt{3}\sqrt{10-\sqrt{6}}+10-\sqrt{6}}+\sqrt{11}-\sqrt{10-\sqrt{6}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{10-\sqrt{6}}\right)^2}+\sqrt{11}-\sqrt{10-\sqrt{6}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\left(\left|\sqrt{3}+\sqrt{10-\sqrt{6}}\right|+11-\sqrt{10-\sqrt{6}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right) = 11-3 = 8$$

Bài 2: Cho $x = \dfrac{4}{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt[2]{5\sqrt{2}-7}-3}$, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$P(x) = (x^3 - 2x - 1)^{2012}.$$

Giải

Ta có: $x = \dfrac{4}{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}-3} = \dfrac{4}{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}-3}$

$$= \frac{4}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2-3} = \frac{4}{-2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Do đó: $P = \left(x^3-2x-1\right)^{2012} = \left(-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-1\right)^{2012} = (-1)^{2012} = 1$

Bài 3. Cho $f(x) = (2x^3 - 21x - 29)^{2012}$

Tính $f(x)$ tại $x = \sqrt[3]{7+\sqrt{\dfrac{49}{8}}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{\dfrac{49}{8}}}$

Giải

Ta có: $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

Do đó:

$$x^3 = 7+\sqrt{\frac{49}{8}}+7-\sqrt{\frac{49}{8}}+3\sqrt[3]{7+\sqrt{\frac{49}{8}}}.\sqrt[3]{7+\sqrt{\frac{49}{8}}}.\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{\frac{49}{8}}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{\frac{49}{8}}}\right)$$

$$x^3 = 14+\frac{21}{2}x \Leftrightarrow 2x^3 = 28+21x \Leftrightarrow 2x^3-21x-28 = 0$$

Do đó $f(x) = (2x^3 - 21x - 29)^{2012}$

$$= \left[(2x^3 - 21x - 28) - 1\right]^{2012} = (0-1)^{2012} = 1$$

Bài 4. Tính giá trị của biểu thức:

$$\left(\sqrt{2009} - \sqrt{2008}\right)x^2 - \left(\sqrt{2008} - \sqrt{2007}\right)x + 6\sqrt{2008} - 2\sqrt{2007}$$

Với $x = \dfrac{2\sqrt{2009} - 3\sqrt{2008} + \sqrt{2007}}{\sqrt{2008} - \sqrt{2009}}$

Giải

Xét bài toán:

Cho $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Chứng minh rằng: $P(m) = P\left(-m - \dfrac{b}{a}\right)$ với mọi m

<u>Lời giải</u>

$$P\left(-m - \frac{b}{a}\right) = a\left(-m - \frac{b}{a}\right)^2 + b\left(-m - \frac{b}{a}\right) + c$$

$$= am^2 + 2bm - \frac{b^2}{a} - bm - \frac{b^2}{a} + c = am^2 + bm + c = P(m)$$

Ta có điều phải chứng minh.

Đặt $P(x) = \left(\sqrt{2009} - \sqrt{2008}\right)x^2 - \left(\sqrt{2008} - \sqrt{2007}\right)x + 6\sqrt{2008} - 2\sqrt{2007}$

Ta có:

$$\frac{2\sqrt{2009} - 3\sqrt{2008} + \sqrt{2007}}{\sqrt{2008} - \sqrt{2009}} = \frac{-\sqrt{2008} + \sqrt{2007} - 2\sqrt{2008} + 2\sqrt{2009}}{\sqrt{2008} - \sqrt{2009}}$$

$$= -\frac{-\left(\sqrt{2008} - \sqrt{2007}\right)}{\sqrt{2009} - \sqrt{2008}} - 2$$

Áp dụng bài toán phụ, ta có

$$P\left(\frac{2\sqrt{2009} - 3\sqrt{2008} + \sqrt{2007}}{\sqrt{2008} - \sqrt{2009}}\right) = P(2)$$

$$= \left(\sqrt{2009} - \sqrt{2008}\right)2^2 - \left(\sqrt{2008} - \sqrt{2007}\right)2 + 6\sqrt{2008} - 2\sqrt{2007}$$

$$= 4\sqrt{2009}$$

Bài 5. Tìm các số tự nhiên n sao cho:

$\sqrt{n + 2013} + \sqrt{n - 2013}$ là số hữu tỉ

Giải

Đặt: $\sqrt{n + 2013} + \sqrt{n - 2013} = a$ $(a \in Q)$

Ta có: $a \neq 0$. Do đó $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2013}+\sqrt{n-2013}}$

$= \dfrac{\sqrt{n+2013}-\sqrt{n-2013}}{n+2013-n+2013} = \dfrac{\sqrt{n+2013}-\sqrt{n-2013}}{4026}$

Nên $\sqrt{n+2013}-\sqrt{n-2013} = \dfrac{4026}{a}$

Do đó: $\sqrt{n+2013} = \dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{4026}{a}\right)$ là số hữu tỉ và $\sqrt{n-2013} = \dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{4026}{a}\right)$ là số hữu tỉ

Suy ra n + 2013 và n – 2013 là các số chính phương.

Đặt $n + 2013 = x^2$, $n - 2013 = y^2$ $(x, y \in N)$

Ta có: $x^2 - y^2 = 4026 \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 4026$ (*)

$(x + y)(x - y)$, $(x + y) + (x - y)$ cùng chẵn, nên $x + y$ và $x - y$ cùng chẵn. Do vậy $(x + y)(x - y) \vdots 4$

Mà $4026 \not\vdots 4$. Không xảy ra (*)

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để tổng

$\sqrt{n+2013}+\sqrt{n-2013}$ là số hữu tỉ

Bài 6. Cho a, b, c dương.

Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(a+c)^2}{ac} \geq 9+\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Giải

Ta chứng minh: Với x, y > 0 : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$ (1)

Thật vậy với x, y > 0 có: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y} \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{xy} \geq \dfrac{4}{x+y}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (BĐT đúng)

Ta có: $\dfrac{(a+b)^2}{ab}+\dfrac{(b+c)^2}{bc}+\dfrac{(a+c)^2}{ac}$

$$= \frac{a^2+b^2+2ab}{ab}+\frac{b^2+c^2+2bc}{cb}+\frac{a^2+c^2+2ac}{ac}$$

$$= \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+2+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2$$

$$= 6 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

$$+ \frac{a}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + \frac{c}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \qquad (2)$$

Áp dụng (2) ta được: $\frac{a}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{b+c} = \frac{2a}{b+c}$

Tương tự: $\frac{b}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{2b}{a+c}$; $\frac{c}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{2c}{a+b}$

Từ (2) cho:

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(a+c)^2}{ac} \geq 6 + 1 + 1 + 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$$

Nhận xét: Từ kết quả bài toán trên ta có:

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(a+c)^2}{ac} \geq 9 + 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$$

$$= 3 + 2\left(\frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1\right)$$

$$= 3 + 2(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$$

Từ đó ta có bài toán:

Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(a+c)^2}{ac} \geq 3 + 2(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$$

Bài 7. Cho a, b là các số dương thỏa mãn: $4ab - a - b = 2$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $a + b + \frac{1}{a+b}$

Giải

Ta có: $4ab \leq (a+b)^2$. Do đó $2 = 4ab - a - b \leq (a+b)^2 - (a+b)$

Nên $(a+b)^2 - (a+b) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (a = b + 1)(a + b - 2) \geq 0$. Mà $a, b > 0$

Do đó $a + b - 2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si hai số dương, ta có:

$$a + b + \frac{1}{a+b} = \frac{3}{4}(a+b) + \frac{1}{4}(a+b) + \frac{1}{a+b} \geq \frac{3}{4}.2 + 2\sqrt{\frac{1}{4}(a+b).\frac{1}{a+b}}$$

hay $a + b + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a + b + \frac{1}{a+b}$ là $\frac{5}{2}$

ài 8. Cho a, b, c, d không âm thỏa mãn: $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2a^2 + 2a + 9} + \sqrt{2b^2 + 2b + 9} + \sqrt{2c^2 + 2c + 9} + \sqrt{2d^2 + 2d + 9} \le 16$$

Giải

$2x^2 + 2x + 9 = (x+1)^2 + x^2 + 8 > 0$, với mọi $x \in R$

Ta có: $\sqrt{2x^2 + 2x + 9} - x \le 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 2x + 9} \le x + 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \ge 0 \\ 2x^2 + 2x + 9 \le (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x^2 - 4x \le 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 0 \le x \le 4 \quad (*)$

Từ giả thiết ta có: $0 \le a, b, c, d \le 4$. Áp dụng kết quả trên, ta được:

$$\sqrt{2a^2 + 2a + 9} + \sqrt{2b^2 + 2b + 9} + \sqrt{2c^2 + 2c + 9} + \sqrt{2d^2 + 2d + 9}$$
$$\le a + b + c + d + 12 = 4 + 12 = 16$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\left[\begin{array}{l} a = 4, b = c = d = 0 \\ b = 4, a = c = d = 0 \\ c = 4, a = b = d = 0 \\ d = 4, a = b = c = 0 \end{array}\right.$

ài 9. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xy + yz^2 + z^2x = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = 5x^2 + 5y^2 + z^4$$

Giải

Ta có: $\frac{\sqrt{41} - 1}{4}(x^2 + y^2) \ge \frac{\sqrt{41} - 1}{2}xy \quad (1)$

$$\frac{21 - \sqrt{41}}{4}x^2 + \frac{1}{2}z^4 \ge \frac{\sqrt{41} - 1}{2}xz^2 \quad (2)$$

$$\frac{21 - \sqrt{41}}{4}y^2 + \frac{1}{2}z^4 \ge \frac{\sqrt{41} - 1}{2}yz^2 (3)$$

(Vì $2\sqrt{\frac{21 - \sqrt{41}}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{41} - 1)^2}{4}} = \frac{\sqrt{41} - 1}{2}$)

Từ (1), (2), (3) ta có:

$$M = 5x^2 + 5y^2 + z^4 \geq \frac{\sqrt{41}-1}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{\dfrac{21-\sqrt{41}}{4}}y = \dfrac{1}{2}z^2 \\ \sqrt{\dfrac{21-\sqrt{41}}{4}}x = \dfrac{1}{2}z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{41}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{41}} \\ z = \sqrt{\dfrac{\sqrt{41}-1}{2\sqrt[4]{41}}} \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức

M là $\dfrac{\sqrt{41}-1}{2}$

Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2009x^2 - 6039x + 6\sqrt{x^3 - 2x^2 + 2x - 4} - 8024}{x^2 - 3x - 4}$$

Giải

Điều kiện: $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 \geq 0$ và $x^2 - 3x - 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+2) \geq 0 \\ (x+1)(x-4) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 4 \end{cases} \quad (1)$

$$P = \frac{2009x^2 - 6027x - 8063 + 6\sqrt{(x-2)(x^2-2)} - 12x + 12}{x^2 - 3x - 4}$$

$$= 2009 + \frac{2\sqrt{(9x-18)(x^2+2)} - 12x + 12}{x^2 - 3x - 4}$$

Với điều kiện: $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 4 \end{cases}$ áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm

$9x - 18$ và $x^2 + 2$. Ta có:

$2\sqrt{(9x-18)(x^2+2)} \leq 9x - 18 + x^2 + 2 = x^2 + 9x - 16$

<u>Trường hợp 1:</u> $x^2 - 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -1$; $x > 4$. Kết hợp với (1) $\Leftrightarrow x > 4$

$$P \leq 2009 + \frac{x^2 + 9x - 16 - 12x + 12}{x^2 - 3x - 4} = 2010$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 9x - 18 = x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 - 9x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-5) = 0$

$x = 4$ (loại); $x = 5$

Trường hợp 2: $x^2 - 3x - 4 < 0$. Kết hợp (1) $\Leftrightarrow 2 \le x < 4$. Biến đổi đưa về

$$P = 2011 - \frac{2x^2 + 6x - 20 - 6\sqrt{(x^2+2)(x-2)}}{x^2 - 3x - 4}$$ Xét:

$$2x^2 + 6x - 20 - 6\sqrt{(x^2+2)(x-2)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 20 \le 6\sqrt{(x^2+2)(x-2)}$$

Với điều kiện trên hai vế đều không âm, bình phương hai vế và biến đổi ta có:

$$(x-2)(x-4)(x^2+3x+17) \le 0.$$

Đây là một bất đẳng thức đúng với $2 \le x < 4$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2$. Tức: Với $2 \le x < 4$ thì:

$$x^2 + 6x - 20 - 6\sqrt{(x^2+2)(x-2)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{2x^2 + 6x - 20 - 6\sqrt{(x^2+2)(x-2)}}{x^2 - 3x - 4} \ge 0$$

$\Leftrightarrow$ P lớn nhất $\Leftrightarrow$ Q nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = 2$ nên giá trị lớn nhất bằng 2011 khi $x = 2$.

Kết hợp hai trường hợp ta có giá trị lớn nhất của P bằng 2011 khi $x = 2$.

Bài 11. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x + y + z > 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \dfrac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x+y+z)^3}$

Giải

Đặt $a = \dfrac{x}{x+y+z}$; $b = \dfrac{y}{x+y+z}$; $c = \dfrac{z}{x+y+z}$

Ta có: $a, b, c \ge 0$ và $a + b + c = 1$.

Vì vậy $M = \dfrac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x+y+z)^3} = a^3 + b^3 + 16c^3$

$$= \frac{1}{4}(a+b)^3 + \frac{3}{4}(a+b)(a-b)^3 + 16c^3 \ge \frac{1}{4}(a+b)^3 + 16c^3$$

$$= \frac{1}{4}(1-c)^3 + 16c^3 = \frac{1}{4}(63c^3 + 3c^2 - 3c + 1)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{7}{9}c + \frac{17}{81}\right)(9c-1)^2 + \frac{16}{81} \ge \frac{16}{81}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 9c - 1 = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{9} \\ b = \dfrac{4}{9} \\ c = \dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 4z \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{16}{81}$

Bài 12. Cho m, n nguyên dương thỏa mãn: $\sqrt{7} - \dfrac{m}{n} > 0$

Chứng minh rằng: $\sqrt{7} - \dfrac{m}{n} > \dfrac{1}{mn}$

Giải

$\sqrt{7} - \dfrac{m}{n} > 0 \Rightarrow \sqrt{7} > \dfrac{m}{n} \Rightarrow 7 > \dfrac{m^2}{n^2}$

$\Rightarrow 7n^2 > m^2$

$\Rightarrow$ Mà m^2 chia cho 7 có số dư là 0; 1; 2 hoặc 4 (Vì $m^2 = (7k + r)^2 = 7(7k^2 + 2kr) + r^2$ với $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$)

Nên $m^2 + 1 \not\vdots\, 7$, $m^2 + 2 \not\vdots\, 7$

Do vậy $7n^2 \geq m^2 + 3$

- Nếu m = 1 thì $7n^2 \geq m^2 + 3 > 4 \Rightarrow 7 > \dfrac{4}{n^2}$

$\Rightarrow \sqrt{7} > \dfrac{2}{n} = \dfrac{1}{mn} + \dfrac{m}{n} \Rightarrow \sqrt{7} - \dfrac{m}{n} > \dfrac{1}{mn}$

- Nếu m > 1 thì:

$7n^2 \geq m^2 + 3 > m^2 + \dfrac{1}{m^2} + 2 = \left(m + \dfrac{1}{m}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{7}n > m + \dfrac{1}{m}$

$\Rightarrow \sqrt{7} > \dfrac{m}{n} + \dfrac{1}{mn} \Rightarrow \sqrt{7} - \dfrac{m}{n} > \dfrac{1}{mn}$

Vậy $\sqrt{7} - \dfrac{m}{n} > \dfrac{1}{mn}$

Bài 13. Cho hàm số $y = -x^2$ (P)

Có thể tìm được hay không ba điểm A, B, C thuộc (P) sao cho tam giác ABC là tam giác đều?

Giải

Dễ nhận ra $A\left(-\sqrt{3}; -3\right)$, $B\left(\sqrt{3}; -3\right)$; C ≡ O (0; 0) thì tam giác ABC là tam giác đều. Thật vậy:

ΔHAC vuông tại H nên $\tan ACH = \frac{AH}{CH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \widehat{ACH} = 30^0$ là đường $A\left(-\sqrt{3};-3\right)$ và:

$B\left(\sqrt{3};-3\right)$ đối xứng qua Oy

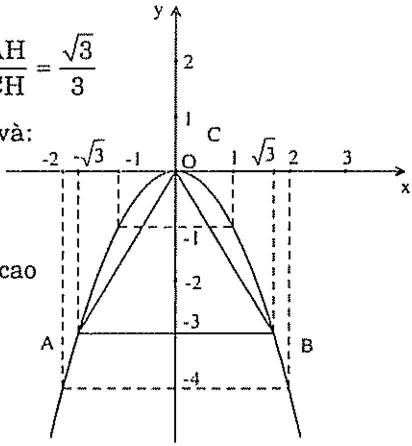
$\Rightarrow$ Oy là đường trung trực của AB

$\Rightarrow$ ΔCAB cân tại C, CH là đường cao nên cũng là đường phân giác.

Do đó $\widehat{ACB} = 2\widehat{ACH} = 60^0$

ΔCAB cân tại C có $\widehat{ACB} = 60^0$

Vậy ΔABC đều.



Bài 14. Cho hàm số $y = x^2$ (P). A và B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là –1; 2 xác định điểm C trên cung AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Giải

Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên Ox.

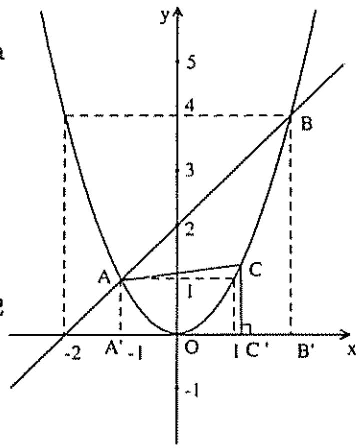
$A(-1; y_A) \in (P)$

$\Rightarrow y_A = x_A^2 = 1$

$B(2; y_B) \in (P) \Rightarrow y_B = x_B^2 = 4$

A(–1; 1); B(2; 4)

Giả sử $C(c; c^2)$ thuộc (P), $-1 < c < 2$ (xem hình bên)



Ta có:

$$S_{ABC} = S_{AA'B'B} - S_{AA'C'C} - S_{CC'B'B}$$

$$= \frac{(1+4)3}{2} - \frac{(1+c^2)(c+1)}{2} - \frac{(4+c^2)(2-c)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(15 - c - 1 - c^3 - c^2 - 8 + 4c - 2c^2 + c^3) = \frac{1}{2}(-3c^2 + 3c + 6)$$

$$= \frac{-3}{2}(c^2 - c - 2) = \frac{-3}{2}\left(c^2 - c + \frac{1}{4} - \frac{9}{4}\right) = \frac{-3}{2}\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{8}$$

$$S_{ABC} \le \frac{27}{8}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow c-\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow c=\dfrac{1}{2}$

Vậy $C\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$ là điểm cần tìm.

Bài 15. Giải phương trình:

$$(x+2013)^3.\left[(x+2011)^3+1\right]=16(x+2011)^3$$

Giải

Dễ thấy phương trình không có nghiệm x = –2011

Do vậy $(x+2012)^3\left[(x+2011)^3+1\right]=16(x+2011)^3$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+2012}{x+2011}\right)^3\left[(x+2011)^3+1\right]=16 \qquad (*)$$

Đặt x + 2011 = y. Phương trình (*) trở thành

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^3.(y^3+1)=16$$

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^3(y^3+1)=16 \Leftrightarrow \left(1+\frac{3}{y}+\frac{3}{y^2}+\frac{1}{y^3}\right)(y^3+1)=16$$

$$\Leftrightarrow y^3+3y^2+3y+1+1+\frac{3}{y}+\frac{3}{y^2}+\frac{1}{y^3}=16$$

$$\Leftrightarrow \left(y^3+3y+\frac{3}{y}+\frac{1}{y^3}\right)+\left(3y^2+\frac{3}{y^2}+6\right)-20=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{y}\right)^3+3\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-20=0 \qquad (**)$$

Đặt $y+\dfrac{1}{y}=z$. Phương trình (**) trở thành: $z^3+3z^2-20=0$

$$z^3+3z^2-20=0 \Leftrightarrow z^3-2z^2+5z^2-10z+10z-20=0$$

$$\Leftrightarrow (z-2)(z^2+5z+10)=0 \Leftrightarrow (z-2)\left[\left(z+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow z-2=0 \Leftrightarrow z=2$$

Ta có $y+\dfrac{1}{y}=2 \Leftrightarrow y^2+1=2y \Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow y=1$

Do đó $x+2011=1 \Leftrightarrow x=1-2011 \Leftrightarrow x=-2010$

$$x=-2010 \text{ (thích hợp)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = –2010

Bài 16. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

Giải

<u>Cách 1:</u> Ta có: $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$. Mà $\sqrt{x^2+12}>\sqrt{x^2+5}$

Nên $3x>5\Rightarrow x>0$

Do đó $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

$$\Leftrightarrow 2x-4+\sqrt{x^2+5}-3+(x+2)-\sqrt{x^2+12}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)+\frac{x^2+5-9}{\sqrt{x^2+5}+3}+\frac{(x+2)^2-(x^2+12)}{(x+2)+\sqrt{x^2+12}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[2+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}+\frac{4}{x+2+\sqrt{x^2+12}}\right]=0$$

Vì $x>0$ nên $2+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}+\frac{4}{x+2+\sqrt{x^2+12}}>0$.

Do đó $x-2=0\Leftrightarrow x=2$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$

<u>Cách 2:</u> Ta có $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$. Mà $\sqrt{x^2+12}>\sqrt{x^2+5}$

Nên $3x>5\Rightarrow x>0$. Do đó $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

$$\Leftrightarrow x-2+\sqrt{x^2+5}-3+2x-\sqrt{x^2+12}=0$$

$$\Leftrightarrow x-2+\frac{x^2+5-9}{\sqrt{x^2+5}+3}+\frac{4x^2-(x^2+12)}{2x+\sqrt{x^2+12}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[1+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}+\frac{3(x+2)}{2x+\sqrt{x^2+12}}\right]=0$$

Vì $x>0$ nên $1+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}+\frac{3(x+2)}{2x+\sqrt{x^2+12}}>0$

Do đó $x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$.

Bài 17. Cho phương trình ẩn x: $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

Có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $ax_1+bx_2+c=0$

Tính giá trị của biểu thức: $M=a^2c+ac^2+b^3-3abc$

Giải

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$

Vì $a\neq 0$. Từ $ax_1+bx_2+c=0$

$$\Rightarrow x_1 + \frac{b}{a}x_2 + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x_1 - (x_1 + x_2)x_2 + x_1x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 - x_1x_2 - x_2^2 + x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2^2$$

Do đó: $M = a^2c + ac^2 + b^3 - 3abc$

$$= a^3\left(\frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - 3\frac{b}{a}.\frac{c}{a}\right)$$

$$= a^3\left[x_1x_2 + (x_1x_2)^2 - (x_1 + x_2)^3 + 3(x_1 + x_2)x_1x_2\right]$$

$$= a^3(x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - x_1^3 - x_2^3) = a^3(x_2^3 + x_2^6 - x_2^6 - x_2^3)$$

$$= a^3.0 = 0$$

Vậy giá trị của biểu thức M bằng 0.

Bài 18. Chứng minh mỗi số hạng của dãy số: $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ với:

$$a_n = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}$$

là số nguyên. Tìm tất cả các giá trị của n để a_n chia hết cho 3.

Giải

Đặt $x_1 = 2+\sqrt{3}$, $x_2 = 2-\sqrt{3}$, $S_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n$

Ta có: $x_1 + x_2 = 4, x_1x_2 = 1$

x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 = 4x + 1 = 0$

Do đó $\begin{cases} x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0 \\ x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{n+2} - 4x_1^{n+1} + x_1^n = 0 \\ x_2^{n+2} - 4x_2^{n+1} + x_1^n = 0 \end{cases}$

Do vậy: $S_{n+2} - 4S_{n+1} + S_n = 0$

Nên $a_n + 2 - 4a_{n+1} + a_n = 0$ (*)

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$ nên từ (*) có a_n nguyên với mọi $n \in N$ và:

$$a_{n+2} - a_{n+1} + a_n \vdots 3,\ a_{n+3} - a_{n+2} + a_{n+1} \vdots 3$$

Suy ra $a_{n+3} + a_n \vdots 3 \Rightarrow a_{n+6} + a_{n+3} \vdots 3$

Do vậy $a_{n+6} - a_n \vdots 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}$

Mặt khác $a_0; a_1; a_2; \ldots a_5$ chia cho 3 có các số dư lần lượt là: 0; 1; 1; 0; 2; 2

Suy ra nếu $n \in N$ thì $a_n \vdots 3 \Leftrightarrow n \vdots 3$

Bài 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x = \dfrac{2y^2}{1+y^2} \\ y = \dfrac{2z^2}{1+z^2} \\ z = \dfrac{2x^2}{1+x^2} \end{cases}$

Giải

Ta có: $\dfrac{2y^2}{1+y^2} \geq 0$. Do đó $x \geq 0$. Tương tự $y \geq 0$, $z \geq 0$

Mà $1 + y^2 \geq 2y \geq 0$. Nên $x = \dfrac{2y^2}{1+y^2} = \dfrac{y.2y}{1+y^2} = \dfrac{y.2y}{1+y^2} \leq \dfrac{y(1+y^2)}{1+y^2} = y$

Tương tự $y \leq z$, $z \leq x$

Ta có $x \leq y \leq z \leq x$. Do đó $x = y = z$

Nên $x = \dfrac{2x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow x(1+x^2) = 2x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

$x = y = z = 0$ hoặc $x = y = z = 1$

Vậy nghiệm $(x; y; z)$ của hệ phương trình là $(0; 0; 0)$; $(1; 1; 1)$

Bài 20. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = \sqrt{2x^2 - y} + \sqrt{z^2+1} \end{cases}$

Giải

Ta có: $x + y \geq 0$; $2x^2 - y \geq 0$

Từ $x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1$. Ta có $\left[(x+y)^2 - 2xy\right](x+y) + 2xy = x + y$

$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) + 2xy - (x+y) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)^3 - (x+y) - 2xy(x+y) + 2xy = 0$

$\Leftrightarrow (x+y-1)[(x+y)^2 + (x+y) + 1 - 2xy] = 0$

$\Leftrightarrow (x+y-1)[x^2 + y^2 + (x+y) + 1] = 0$

Ta có $x + y - 1 = 0$. Vì $x^2 + y^2 + (x+y) + 1 > 0$

$x + y = 1$. Ta có $1 = \sqrt{2x^2 - y} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{z^2+1} \geq 1$

Do đó $\begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 \\ x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1; y = 2; z = 0 \\ x = \dfrac{1}{2}; y = \dfrac{1}{2}; z = 0 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm $(x; y; z)$ của phương trình là $(-1; 2; 0)$; $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 0\right)$.

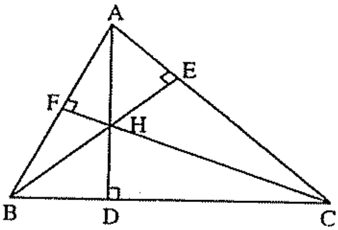
B/ HÌNH HỌC

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:

a) $\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$

b) $\cot A + \cot B = \cot C \ge \sqrt{3}$

Giải



Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. H là trực tâm của tam giác ABC.

a) $\cos A = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$$\cos A = \sqrt{\frac{AE}{AB}\cdot\frac{AF}{AC}} = \sqrt{\frac{AF}{AB}\cdot\frac{AE}{AC}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{AF}{AB}+\frac{AE}{AC}\right)$$

Tương tự: $\cos B \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{BF}{AB}+\dfrac{BD}{BC}\right)$, $\cos C \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{CD}{BC}+\dfrac{CE}{AC}\right)$

Do đó $\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$

b) $\widehat{DHC} = \widehat{B}$ (cùng phụ với $\widehat{BCF}$)

Do đó $\cot B.\cot C = \cot DHC.\cot C = \dfrac{HD}{CD}\cdot\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{HD}{AD} = \dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự có $\cot A.\cot B = \dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$, $\cot C.\cot A = \dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$

Do đó $\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$

Mà: $(\cot A + \cot B + \cot C)^2$

$= 3(\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A)$

$+ \dfrac{1}{2}\left[(\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2\right]$

$\ge 3(\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A)$

Vậy $\cot A + \cot B + \cot C \ge \sqrt{3}$

Bài 2. Cho tam giác ABC (CB = a, AC = b, AB = c) nội tiếp tam giác ABC. r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

Giải

Dễ dàng chứng minh được: $S_{ABC} = \dfrac{abc}{4R} = pr$

$\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$; $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Do đó: $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{p-b+p-a}{(p-b)(p-a)} + \dfrac{p-(p-c)}{p(p-c)}$

$$= \frac{2p-a-b}{(p-a)(p-b)} + \frac{c}{p(p-c)} = c\left[\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{p(p-c)}\right]$$

$$= \frac{c\left[p(p-c)+(p-a)(p-b)\right]}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{c\left[2p^2 - p(a+b+c) + ab\right]}{S_{ABC}^2}$$

$$= \frac{cab}{S_{ABC}^2} = \frac{4R}{S_{ABC}}$$

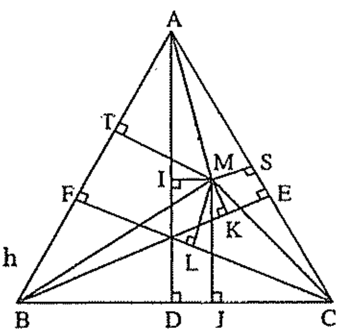
Nên $\dfrac{S}{p-a} + \dfrac{S}{p-b} + \dfrac{S}{p-b} - \dfrac{S}{p} = 4R$

$\Rightarrow r_a + r_b + r_c - r = 4R$

$\Rightarrow r_a + r_b + r_c = 4R + r$

Bài 3. Cho tam giác đều ABC có AD, BE, CF là các đường cao. M là điểm nằm trong tam giác ABC; I, K, L lần lượt là hình chiếu của M trên AD, BE, CF. Xác định vị trí M để: $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ đạt giá trị lớn nhất với, y, z. $x = AI$, $y = BK$, $z = CL$.

Giải



Gọi J, S, T lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB.

Đặt: AB = BC = CA = a

Ta có: MJ + MS + MT

$$= \frac{2S_{MBC}}{BC} + \frac{2S_{MAC}}{CA} + \frac{2S_{MAB}}{AB} = \frac{2S_{ABC}}{a} = h$$

Tứ giác DIMJ có:

$\widehat{MID} = \widehat{IDJ} = \widehat{DJM} = 90^0$ nên là hình chữ nhật

$\Rightarrow MJ = ID$

Do đó $x = AD - ID = h - MJ$

Tương tự $y = h - MS$, $z = h - MT$

Nên x + y + z = 3h – (MJ + MS + MT) = 2h

ÁP dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có:

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \le \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} = 2h \text{, không đổi}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow MJ = MS = MT$

$\Leftrightarrow$ M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

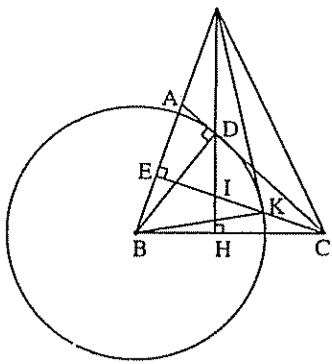
Vậy khi M là tâm của tam giác đều ABC thì $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 4. Cho tam giác ABC (AB < AC) có ba góc nhọn và hai đường cao BD và CE. Vẽ đường tròn tâm B bán kính BD cắt đoạn thẳng CE tại K. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường thẳng BA tại M và cắt đoạn thẳng EC tại I.

a) Chứng minh rằng: MK là tiếp tuyến của đường tròn tâm B bán kính BD.

b) Chứng minh rằng: CE.IK = CK.EK.

Giải



a) Gọi H là giao điểm của DI và BC.

Xét ΔBEC và ΔBHM có:

$\widehat{EBC}$ (chung), $\widehat{BEC} = \widehat{BHM} (= 90^0)$

Do đó $\Delta BEC \backsim \Delta BHM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BE}{BH} = \dfrac{BC}{BM} \Rightarrow BE.BM = BH.BC$

ΔBDC vuông tại D; DH là đường cao

$\Rightarrow BH.BC = BD^2$ (Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông)

Ta có $BE.BM = BD^2$ (= BH.BC)

Mà BD = BK (= R). Nên $BE.BM = BK^2$

Xét ΔBEK và ΔBKM có

$\widehat{EBK}$ (chung), $\dfrac{BE}{BK} = \dfrac{BK}{BM}$ (vì $BE.BM = BK^2$)

Do đó $\Delta BEK \backsim \Delta BKM$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BEK} = \widehat{BKM}$. Mà $\widehat{BEK} = 90^0$. Nên $\widehat{BKM} = 90^0$

Ta có $MK \perp BK$, K thuộc đường tròn (B)

Vậy MK là tiếp tuyến của đường tròn tâm B bán kính BD.

b) Xét ΔEMI và ΔECB có:

$\widehat{MEI} = \widehat{CEB}(= 90^0)$, $\widehat{EMI} = \widehat{ECB}$ (cùng phụ với $\widehat{MBH}$)

Do đó $\Delta EMI \backsim \Delta ECB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EM}{EC} = \dfrac{EI}{EB} \Rightarrow EI.EC = EM.EB$

Mặt khác ΔKBM vuông tại K, KE là đường cao

$\Rightarrow EK^2 = EM.EB$

Ta có $EI.EC = EK^2(=EM.EB) \Rightarrow \dfrac{CE}{EK} = \dfrac{EK}{EI}$

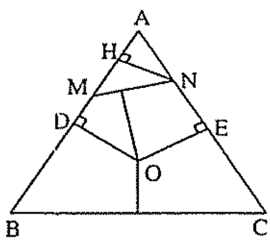
$\Rightarrow \dfrac{CE}{EK} = \dfrac{CE - EK}{EK - EI} = \dfrac{CK}{IK}$

Vậy $CE.IK = CK.EK$

ài 5. Cho tam giác ABC đều cạnh a. M, N lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho $\dfrac{AM}{MB} + \dfrac{AN}{NC} = 1$, đặt AM = x, AN = y. Chứng minh rằng $MN^2 = x^2 + y^2 - xy$, MN tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Giải

Vẽ $NH \perp AM$ tại H



$AH = AN.\cos A = \dfrac{1}{2}$, $HN = AM\sin A = \dfrac{\sqrt{3}y}{2}$

$$MN^2 = MH^2 + HN^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2$$

$$= x^2 + y^2 - xy \quad (1)$$

Ta có: $\dfrac{AM}{MB} + \dfrac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{a-x} + \dfrac{y}{a-y} = 1$

$\Rightarrow x(z - y) + y(a - x) = (a - x)(a - y)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + a^2 + 2xy - 2ax - 2ay = x^2 + y^2 - xy$

$\Rightarrow (x + y - a)^2 = x^2 + y^2 - xy \qquad (2)$

Từ (1), (2) có $MN^2 = (x + y - a)^2$ (mà $x + y - a < 0$; $MN > 0$)

Vậy $MN^2 = x^2 + y^2 - xy$

Gọi (O; r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn (O) tiếp xúc AB, AC tại D, E

$AD = AE = \dfrac{a}{2}$. Vẽ MN' tiếp xúc (O). Chứng minh được $N' \equiv N$

Bài 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 150^0$, $\widehat{B} = 10^0$

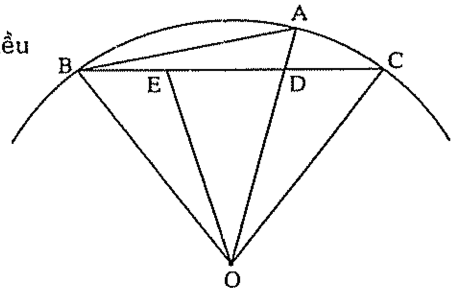
Đặt $\frac{BC}{AC} = t$. Tính giá trị của biểu thức $t^3 - 3t^2$

Giải

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. D là giao điểm của OA và BC. E trên cạnh BC sao cho BE = CD

$\widehat{AOC} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 20^0$

$\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = 40^0$



Nên $\widehat{BOC} = 60^0$. Do đó ΔOBC đều

$\Delta OBE = \Delta OCD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BOE} = \widehat{COD} = 20^0$

Nên $\widehat{EOD} = 20^0$

Đặt: AC = b, BC = a

$\Delta ACD \backsim \Delta AOC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{OA}$. Nên $AD = \frac{b^2}{a}$

$OD = OA - AD = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}$, $ED = BC - (BE + D) = a - 2b$

$\Delta DAC \backsim \Delta DEO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AD}{ED} = \frac{CD}{OD}$

Do đó $\frac{\frac{b^2}{a}}{a - 2b} = \frac{b}{\frac{a^2 - b^2}{a}} \Rightarrow a^3 - 2a^2b = a^2b - b^3$

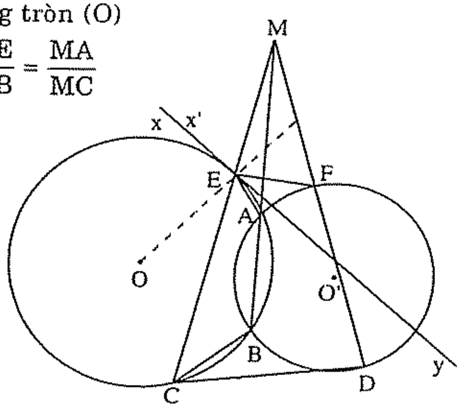
$\Rightarrow a^3 + b^3 - 3a^2b = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3 = 0$

Nên $t + \left(\frac{1}{t}\right)^2 - 3 = 0 \Rightarrow t^3 + 1 - 3t^2 = 0$

Vậy $t^3 - 3t^2 = -1$.

Bài 7. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại A, B. CD là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O), (O'), (C ∈ (O), D ∈ (O'), điểm B gần CD hơn A). M là điểm trên tia đối của tia AB. Gọi E là giao điểm của MC và đường tròn (O), E (khác C), F là giao điểm của MD và đường tròn (O'), (F khác D). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF tiếp xúc với các đường tròn (O). (O').

Giải



Vẽ xAy là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Delta MEA \backsim \Delta MBC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{MA}{MC}$

$\Rightarrow ME.MC = MA.MB$

Tương tự $MF.MD = MA.MB$

$\Delta MEF \backsim \Delta MDC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{MCD}$

Ta có $\widehat{MCD} = \widehat{CEy}$ $\left(\dfrac{1}{2}sđ\overset{\frown}{CE}\right)$

$\widehat{CEy} = \widehat{xEM}$ (đối đỉnh)

Nên $\widehat{xEM} = \widehat{MFE}$

Vẽ Ex' là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN

$\Rightarrow \widehat{x'EM} = \widehat{MFE}$

Do đó $\widehat{x'EM} = \widehat{xEM}$ $\Rightarrow$ Hai tia Ex, Ex' trùng nhau

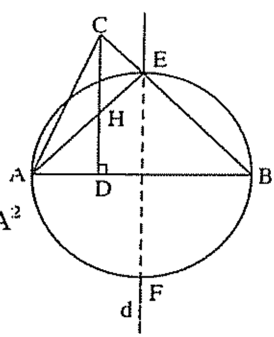
$\Rightarrow$ Ex là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF tiếp xúc với đường tròn (O).

Chứng minh tương tự cũng có đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF tiếp xúc với đường tròn (O').

Bài 8. Cho hai điểm A, B cố định. C là điểm di động sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. H là trực tâm của tam giác ABC, D là chân đường vuông góc vẽ từ C của tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm C để tích DH.DC đạt giá trị lớn nhất.

Giải



Xét ΔDAH và ΔDCB có $\widehat{DAH} = \widehat{DCB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$) và $\widehat{ADH} = \widehat{CDB} (= 90^0)$. Do đó $\Delta DAH \backsim \Delta DCB$

Suy ra $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DH}{DB} \Rightarrow DH.DC = DA.DB$

Nhưng do: $DA.DB = DA(AB - DA) = DA.AB - DA^2$

$$= \frac{AB^2}{4} - \left(\frac{AB^2}{4} - DA.AB + DA^2\right)$$

$$= \frac{AB^2}{4} - \left(\frac{AB}{2} - DA\right)^2 \le \frac{AB^2}{4}$$

Nên $DH.DC \le \frac{AB^2}{4}$, $\frac{AB^2}{4}$ không đổi.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow DA = DB \Leftrightarrow$ C thuộcđường trung trực của đoạn thẳng AB.

Tam giác ABC nhọn nên C nằm ngoài đường tròn đường kính AB.

Do đó C thuộc đường trung trực d của đoạn thẳng AB trừ đoạn thẳng EF (E, F là giao điểm của d và đườn tròn đường kính AB).

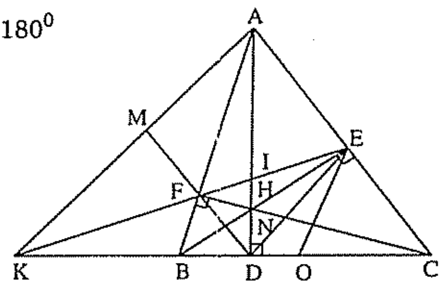
Chú ý: Có thể áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương DA và DB, ta có: $DA.DB \le \left(\frac{DA+DB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$

Bài 9. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. EF cắt BC tại K. Đường thẳng qua F song song với AC cắt AK, AD lần lượt tại M, N. Gọi O là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng:

a) MF = NF

b) BD.CD = DO.DK

Giải



a) $\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác BFHD nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{FBH} = \widehat{FDH}$

$\widehat{BDA} = \widehat{BEA} = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác BAED nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{FBH} = \widehat{ADE}$

Ta có $\widehat{FDH} = \widehat{ADE}$

$\Rightarrow$ DA là tia phân giác của góc EDF.

Mà $AD \perp KD$. Từ đó có DK là đường phân giác ngoài của tam giác DEF.

Gọi I là giao điểm của DH và EF.

Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài ta có: $\frac{IE}{IF} = \frac{KE}{KF}$

ΔKFM có MF // AE $\Rightarrow \frac{AE}{MF} = \frac{KE}{KF}$

ΔIFN có AE // FN $\Rightarrow \frac{AE}{NF} = \frac{IE}{IF}$

Do đó: $\frac{AE}{MF} = \frac{AE}{NF} \Rightarrow MF = NF$

b) Tương tự trên có FC là tia phân giác

$\widehat{EFD} \Rightarrow \widehat{EFD} = 2\widehat{EFC}$

O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFEC

$\Rightarrow \widehat{EOC} = 2\widehat{EFC}$

Ta có $\widehat{EFD} = \widehat{EOC} \Rightarrow$ Tứ giác OEFD nội tiếp.

Mà OE = OF. Nên $\overset{\frown}{OE} = \overset{\frown}{OF}$

$\Rightarrow \widehat{ODE} = \widehat{OEK}$

$\Delta ODE \sim \Delta OEK$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OD}{OE} = \dfrac{OE}{OK}$

$\Rightarrow OD.OK = OE^2$, $OE = OB = OC$

Do đó: $DB.DC = (OB - OD)(OC + OD) = OB^2 - OD^2$

$= OD.OK - OD^2 = OD(OK - OD) = OD.DK$

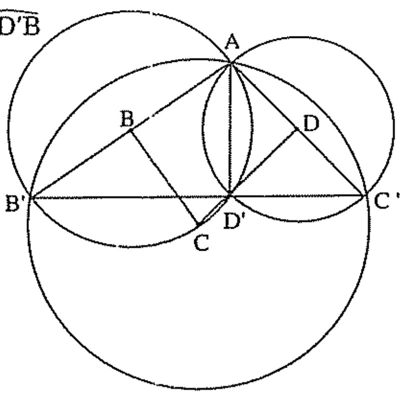
Bài 10. Cho tứ giác ABCD. Vẽ các đường tròn tâm B bán kính BA, tâm C bán kính CA, tâm D bán kính DA. Hai đường tròn (B) và (C) cắt nhau tại A và B'm hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại A và C', hai đường tròn (B) và (D) cắt nhau tại A và D'. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi ba điểm B', D', C' thẳng hàng.

Giải

Xét hình vẽ bên. Hai đường tròn (B) và (C) cắt nhau tại A, B'

$\Rightarrow$ BC là đường trung trực của AB'

Ta có: $\widehat{ABC} = 180^0 - \dfrac{\widehat{ABB'}}{2} = 180^0 - \widehat{AD'B}$



Hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại A, C'

$\Rightarrow$ CD là đường trung trực của AC'

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \dfrac{1}{2}\widehat{ADC'} = 180^0 - \widehat{AD'C'}$

Do vậy, tứ giác ABCD nội tiếp

$\Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^0$

$\Leftrightarrow 180^0 - \widehat{AD'B'} + 180^0 - \widehat{AD'C'} = 180^0$

$\Leftrightarrow \widehat{AD'B'} + \widehat{AD'C'} = 180^0 \Leftrightarrow$ Hai tia D'B', D'C' đối nhau

$\Leftrightarrow$ B', D', C' thẳng hàng.

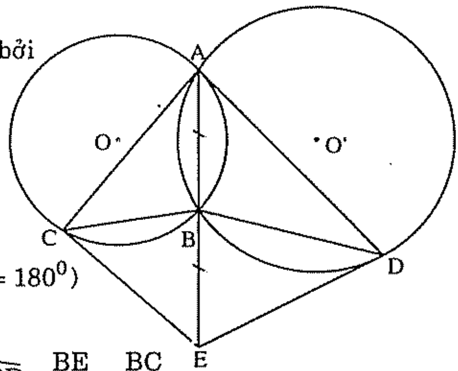
Vậy tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn khi và chỉ khi ba điểm B', D', C' thẳng hàng.

Bài 11. Hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại A, B. Vẽ dây AC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O'). Vẽ dây AD của đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) E là điểm đối xứng của A qua B. Chứng minh rằng tứ giác ACED nội tiếp.

Giải

Cách 1: Xét ΔABC và ΔDBA có $\widehat{BAC} = \widehat{BDA}$ (Hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{BCA} = \widehat{DAB}$ (Hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)



$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD}$ và $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BC}{AB}$

Nên $\dfrac{BE}{BD} = \dfrac{BC}{BE}$

Ta có: $\widehat{CBE} + \widehat{ABC} = \widehat{DBE} + \widehat{ABD} (= 180^0)$

Nên $\widehat{CBE} = \widehat{DBE}$

Xét ΔBCE và ΔBED có: $\widehat{CBE} = \widehat{EBD}$, $\dfrac{BE}{BD} = \dfrac{BC}{BE}$

Do đó $\Delta BCE \backsim \Delta BED$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{BED}$ và $\widehat{BEC} = \widehat{BDE}$

Do đó $\widehat{CAD} + \widehat{CED} = \widehat{BAC} + \widehat{DAB} + \widehat{BED} + \widehat{BEC}$

$= \widehat{BDA} + \widehat{BCA} + \widehat{BCE} + \widehat{BDE} = \widehat{ADE} + \widehat{ACE}$

Nên $\widehat{CAD} + \widehat{CED} = \widehat{ADE} + \widehat{ACE} = 180^0$

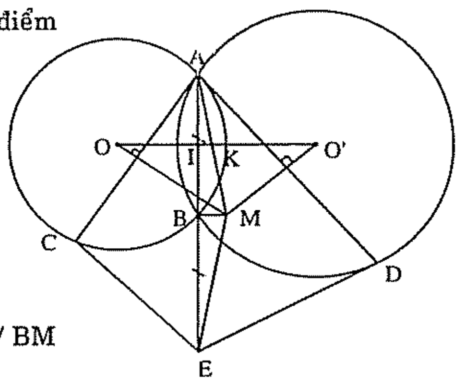
$\Rightarrow$ Tứ giác ACED nội tiếp.

Cách 2: Gọi I, K lần lượt là giao điểm của OO' với AB, AM.

Ta có OA ⊥ MO'

Tương tự OA' // MO

Do đó tứ giác OAO'M là hình bình hành



$\Rightarrow$ K là trung điểm của AM.

(O), (O') cắt nhau tại A, B

$\Rightarrow$ OO' là trung trực của AB OO' // BM

Nên MB ⊥ AE

MB là đường trung trực của AE

$\Rightarrow$ MA = ME

$OM \perp AC \Rightarrow OM$ đi qua trung điểm của AC

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của AC $\Rightarrow MA = MC$

Chứng minh tương tự có MA = MD.

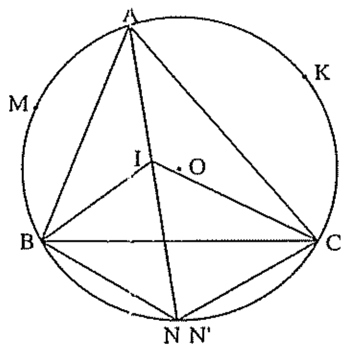
Ta có MA = ME = MC = MD.

$\Rightarrow$ Tứ giác ACED nội tiếp.

Bài 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). I là tâm đường tròn nội tiếp ABC, gọi M, N, K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác IAB, IBC, ICA.

Chứng minh rằng: M, N, K cùng nằm trên đường tròn tâm O.

Giải



N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC

$\Rightarrow NB = NI = NC$

$\Rightarrow \Delta NBI$ cân tại N

ΔNIC cân tại N

$\Rightarrow \widehat{NBI} = \widehat{NIB}$, $\widehat{NCI} = \widehat{NIC}$

Mà $\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$, $\widehat{ACI} = \widehat{ICB}$

Do đó $\widehat{ABN} + \widehat{ACN}$

$= \widehat{ABI} + \widehat{NBI} + \widehat{ACI} + \widehat{NCI}$

$= \widehat{IBC} + \widehat{NIB} + \widehat{ICB} + \widehat{NIC} = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABNC nội tiếp $\Rightarrow N \in (O)$

Chứng minh tương tự có $M \in (O)$ và $K \in (O)$

Vậy M, N, K cùng nằm trên đường tròn tâm O.

Cách 2: AI cắt (O) tại N' (N' khác A)

$\widehat{BAI} = \widehat{CAI} \Rightarrow \overset{\frown}{BN'} = \overset{\frown}{CN'} \Rightarrow BN' = CN'$

$\widehat{N'BI} = \widehat{IBC} + \widehat{CBN'} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI} = \widehat{BIN'}$

$\Rightarrow$ Tam giác N'BI cân tại N' $\Rightarrow BN' = IN'$

Ta có BM' = CN' = IN'

$\Rightarrow$ N' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

$\Rightarrow N' \equiv N$

Vậy $N \in (O)$

Chứng minh tương tự có $M \in (O)$, $K \in (O)$

Vậy M, N, K cùng thuộc đường tròn tâm O.

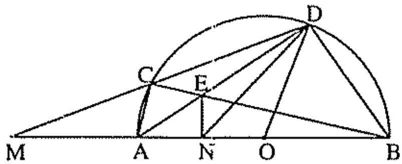
Bài 13. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. M là điểm đối xứng của O qua A. Đường thẳng M cắt nửa đường tròn (O) tại C, D (C nằm giữa M và D). Gọi E là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng: $\frac{BC}{AD} = 3\frac{AE}{BE}$.

Giải

Gọi N là trung điểm của OA.

$\Delta OND \sim \Delta ODM$ (c.g.c) ($\widehat{DON}$ chung, $\frac{ON}{OD} = \frac{OD}{OM} = \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow \widehat{ODN} = \widehat{OMD}$



$OA = OD$ (= R)

$\Rightarrow \Delta OAD$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{ODA}$

Mà $\widehat{ODA} = \widehat{ODN} + \widehat{NDE}$,

$\widehat{OAD} = \widehat{ADC} + \widehat{OMD}$ ($\widehat{OAD}$ là góc ngoài của ΔMAD)

Do đó $\widehat{NDE} = \widehat{ADC}$

Mặt khác $\widehat{NBE} = \widehat{ADC}$

Nên $\widehat{NDE} = \widehat{NBE}$

$\Rightarrow$ Tứ giác NEDB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ANE} = \widehat{EDB} = 90^0$

Ta có $\Delta ANE \sim \Delta ADB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow AE.AD = AN.AB$

Nên $AE.AD = \frac{1}{4}AB^2$ (1)

Mặt khác $\Delta BNE \backsim \Delta BCA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow BE.BC = BN.AB$

Nên $BE.BC = \frac{3}{4}AB^2$ (2)

Từ (1) và (2) có $3AE.AD = BE.BC$

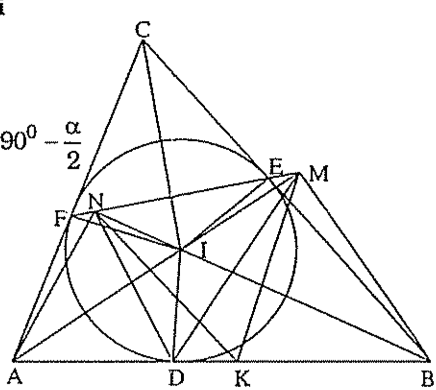
Vậy $\frac{BC}{AD} = 3\frac{AE}{BE}$.

Bài 14. Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định A, B ($A \neq B$). Xét một điểm C di động trong mặt phẳng sao cho $\widehat{ACB} = \alpha$, trong đó α là một góc cho trước ($0^0 < \alpha < 180^0$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, AC và CA tương ứng D, E và F. Các đường thẳng AI và BI lần lượt cắt đường thẳng EF tại M và N. Chứng minh rằng:

a) Đoạn thẳng MN có độ dài không đổi.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định

Giải



a) Ta có: $\widehat{CFN} = 90^0 - \widehat{FCI} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$

và $\widehat{NIA} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{\widehat{CAB} + \widehat{CBA}}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$

Nên $\widehat{CFN} = \widehat{NIA}$

$\Rightarrow$ Tứ giác AFNI nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{AFI} = 90^0$, $\widehat{NAI} = \widehat{NFI}$

Tương tự $\widehat{AMB} = 90^0$

Do đó M, N thuộc đường tròn cố định đường kính AB.

$\widehat{NFI} = \widehat{ECI} = \frac{\alpha}{2}$ (AEIF nội tiếp). Nên $\widehat{NAM} = \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{MN}$ không đổi $\Rightarrow$ MN không đổi

b) Gọi K là trung điểm AB $\Rightarrow$ K cố định và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ANMB $\Rightarrow \widehat{NKM} = 2\widehat{NAM}$

Mặt khác $\widehat{NAI} = \widehat{NDI}$ (ANID nội tiếp), $\widehat{NAI} = \widehat{IBM}$ (ANMB nội tiếp), $\widehat{IDM} = \widehat{IBM}$ (IDBM nội tiếp)

Nên $\widehat{NDM} = 2\widehat{NAM}$

Ta có: $\widehat{NKM} = \widehat{NDM}$ $(= 2\widehat{NAM})$ $\Rightarrow$ Tứ giác DNMK nội tiếp

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN đi qua điểm cố định là trung điểm K của AB.

Bài 15. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), đường tròn (O) đương kính BC. Vẽ AM, AN là các tiếp tuyến của đường tròn (O). AD là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BN, CM đồng quy.

Giải

Gọi I là giao điểm của AD và CM.

$\widehat{AMO} = \widehat{ADO} = \widehat{ANO} = 90^0$

$\Rightarrow$ A, M, D, O, N cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ADM}$

Mà $\widehat{MBN} = \widehat{ANM}$ nên $\widehat{MBN} = \widehat{ADM}$,

$\widehat{BMI} = \widehat{BDI} = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác BMID nội tiếp

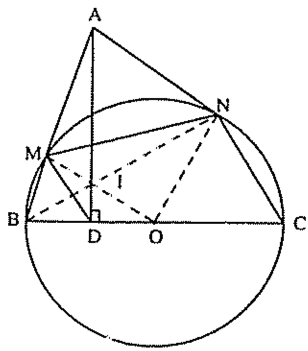
$\Rightarrow \widehat{MBI} = \widehat{ADM}$

Ta có $\widehat{MBI} = \widehat{MBN}(= \widehat{ADM})$

$\Rightarrow$ Hai tia BI, BN trùng nhau

$\Rightarrow$ B, I, N thẳng hàng

Vậy AD, BN, CM đồng quy.



Bài 16. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), đường tròn (O) đường kính BC. Vẽ AM, AN là các tiếp tuyến của đường tròn (O). AB, AC cắt đường tòn (O) lần lượt tại F, E. AD là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng MF, NE, AD đồng quy.

Giải

Gọi H là giao điểm BE, CF

I là giao điểm BN, CM

Ta có: A, H, D thẳng hàng (1)

A, I, D thẳng hàng (2) (bài 15)

Gọi K là giao điểm của MF và NE

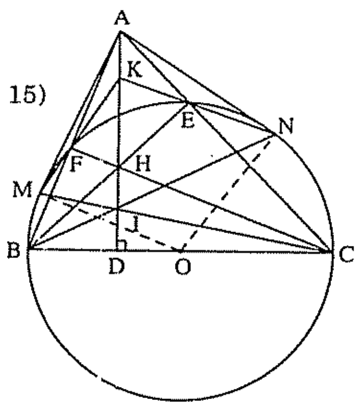
Ta có $\widehat{FHA} = \widehat{FBD}$

$\widehat{FBD} = \widehat{FMI}$

Nên $\widehat{FHA} = \widehat{FMI}$

$\Rightarrow$ Tứ giác MFHI nội tiếp KH cắt đường tròn (MFHI) tại H_1. Ta có:

KF.KM = KH.KI_1



Tương tự tứ giác HENI nội tiếp. Gọi I_2 là giao điểm của KH và đường tròn (HENI) ta có:

KE.KN = KH.KI_2

Mà KF.KM = KE.KN. Nên $KI_1 = KI_2 \Rightarrow I_1 = I_2$

Do đó I_1, I_2, I trùng nhau.

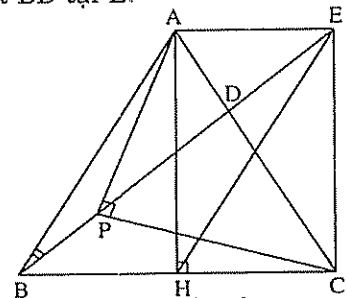
Vậy K, H, I thẳng hàng (3)

Từ (1), (2), (3) có: A, I, H, K, D thẳng hàng

Vậy MF, NE, AD đồng quy.

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy D trên cạnh AC sao cho CD = 2AD. Lấy P trên đoạn thẳng BD sao cho $\widehat{APC} = 90^0$. Chứng minh rằng $\widehat{ABP} = \widehat{PCB}$.

Giải



Đường thẳng qua A song song với BC cắt BD tại E.

Vẽ AH ⊥ BC tại H ta có: BH = HC

ΔDBC có AE // BC $\Rightarrow \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{1}{2}$

Do vậy AE = BH

Tứ giác BAEH là hình bình hành

$\Rightarrow$ AB // EH

$\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{PEH}$ (1)

Tứ giác AECH có AE = HC, AE // HC nên là hình bình hành.

Mà $\widehat{AHC} = 90^0$. Do đó AECH là hình chữ nhật

$\widehat{APC} = \widehat{AHC} = \widehat{AEC} = 90^0$

$\Rightarrow$ A, P, H, C, E cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{PEH} = \widehat{PCB}$ (2)

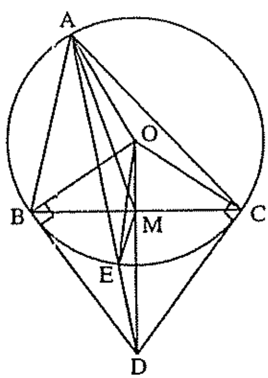
Từ (1) và (2) có $\widehat{ABP} = \widehat{PCB}$.

Bài 18. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), các tiếp tuyến tại B, tại C của đường tròn (O) cắt nhau tại D. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$

Giải

Gọi E là giao điểm của AD và đường tròn (O) (E khác A)

Ta có D, M, O thẳng hàng và DM ⊥ BC



$\Delta DEB \backsim \Delta DAB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DB}{DA} = \dfrac{DE}{DB} \Rightarrow DB^2 = DA.DE$

ΔDBO vuông tại B, BM là đường cao

$\Rightarrow DB^2 = DM.DO$

Ta có: $DA.DE = DM.DO \Rightarrow \dfrac{DE}{DO} = \dfrac{DM}{DA}$

$\Delta DEM \backsim \Delta DOA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{DOA}$

$\Rightarrow$ Tứ giác EMOA nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{EMA} = \widehat{EOA}$, $\widehat{EMD} = \widehat{EAO} = \widehat{AMO}$

$\widehat{EMD} + \widehat{BME} = \widehat{AMO} + \widehat{BMA} = 90^0$

Nên $\widehat{BME} = \widehat{BME} = \frac{1}{2}\widehat{EMA} = \frac{1}{2}\widehat{EOA} = \widehat{ACE}$

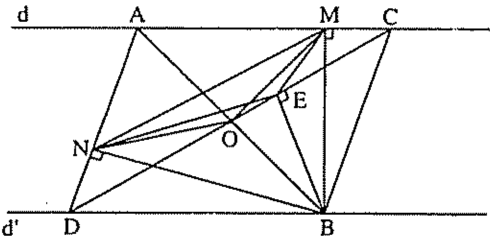
$\Delta ABM \sim \Delta AEC$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{EAC}$

Vậy $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$

Bài 19. Cho hai đường thẳng d, d' cố định, d và d' song song với nhau. A, B là hai điểm cố định lần lượt nằm trên d, d'. Điểm C di động trên d, điểm D di động trên d' sao cho $\widehat{CAD}$ tù và tứ giác ACBD là hình bình hành. E, M, N lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng CD, d, AD. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN di động trên một đường cố định.

Giải

Gọi O là giao điểm của AB, CD



O là trung điểm của AB. O cố định: $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^0$

Nên A, M, B, N cùng thuộc đường tròn tâm O $\Rightarrow \widehat{MBN} = \frac{1}{2}\widehat{MON}$

$\widehat{DNB} = \widehat{DEB} = 90^0 \Rightarrow$ D, N, E, B cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{NED} = \widehat{NBD}$. Tương tự có $\widehat{MEC} = \widehat{MBC}$

Mà $\widehat{MBN} + \widehat{CBD} = \widehat{MBN} + \widehat{MBC} + \widehat{MBD} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Nên $2\widehat{MBN} + \widehat{MBC} + \widehat{NED} = 180^0$

Do đó $2\widehat{MBN} = \widehat{MEN}$. Nên $\widehat{MBN} = \frac{1}{2}\widehat{MEN}$

Ta có: $\widehat{MEN} = \widehat{MON} \Rightarrow$ Tứ giác MNOE nội tiếp.

d, B cố định nên M cố định.

Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN.

Ta có KM = KO, M và O cố định.

Vậy K di động trên đường trung trực của đoạn thẳng MO.

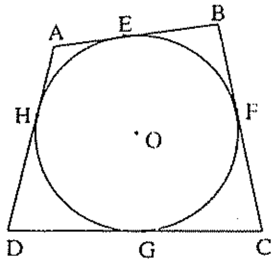
Bài 20.

a) Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng:

$AB + CD = BC + AD$

b) Cho tứ giác ABCD có $AB + CD = BC + AD$. Chứng minh rằng: tứ giác ABCD ngoại tiếp.

Giải

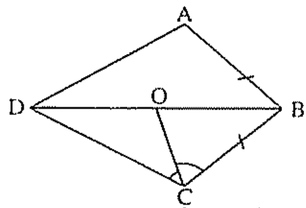


a) Giả sử đường tròn (O) tiếp xúc với AB, BC, CD, DA lần lượt tại E, F, G, H.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$AE = AH$, $BE = BF$, $DH = DG$, $CG = CF$.

Do đó $AB + CD = BC + AD$



b) • Nếu $AB = BC$

Mà $AB + CD = BC + AD$ (gt)

Suy ra $CD = AD$

$\Delta ABD = \Delta CBD$ (c.c.c)

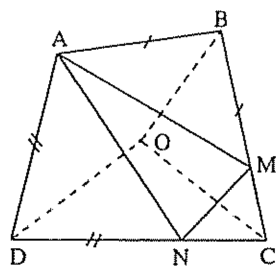
Từ đó ta có BD là đường phân giác của các góc $\widehat{B}$ và $\widehat{D}$.

Gọi O là giao điểm của tia phân giác góc $\widehat{C}$ và BD

Ta có BO, DO, CO lần lượt là các tia phân giác của $\widehat{B}$, $\widehat{D}$, $\widehat{C}$.

$\Rightarrow$ O là điểm cách đều các cạnh của tứ giác ABCD

Vậy tứ giác ABCD ngoại tiếp.



• Nếu $AB \neq BC$. Giả sử $AB < BC$

Mà $AB + CD = BC + AD$.

Nên: $AD < CD$.

Trên các cạnh BC, CD lần lượt lấy M, N sao cho:

$BM = AB$, $DN = AD$

Mà $AB + CD = BC + AD$. Do vậy $CM = CN$

ΔBAM cân tại B, ΔDAN cân tại D, ΔCMN cân tại C

Các đường phân giác của các góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ chính là các đường trung trực của tam giác AMN nên chúng đồng quy tại O.

$\Rightarrow$ O là điểm cách đều các cạnh của tứ giác ABCD.

Vậy tứ giác ABCD ngoại tiếp.

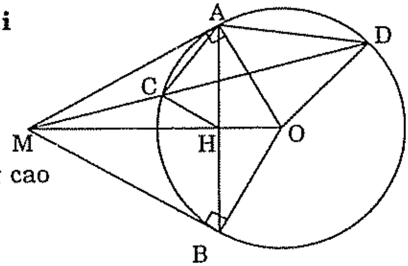
TÌM KIẾM ỨNG DỤNG CỦA MỘT TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Bài toán

Cho điểm M ở bên ngoài đường tròn (O; R). Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và một cát tuyến MCD (A, B, C, D thuộc đường tròn (O; R), C nằm giữa M và D, tia MC nằm giữa hai tia MA, MO. Gọi H là giao điểm của AB và MO.

Chứng minh rằng tứ giác CDOH nội tiếp.

Giải



Ta có $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$

ΔMAO vuông tại A, AH là đường cao

$\Rightarrow MA^2 = MH.MO$

Ta có $MC.MD = MH.MO$

$\Delta MCH \sim \Delta MOD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{MOD}$

$\Rightarrow$ Tứ giác CDOH nội tiếp

Đây là một bài toán rất quen thuộc đối với mọi học sinh lớp 9, do vậy mà kì thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên tỉnh Đồng Nai năm học 2012 – 2013 có một câu là bài toán trên.

Tứ giác nội tiếp CDOH là " Bửu bối" giúp giải nhiều bài toán.

Chúng ta hãy cũng tìm kiếm ứng dụng của tứ giác nội tiếp CDOH trong giải toán, qua việc giải các bài toán hay và khó sau:

Bài 1. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O và hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm và C nằm giữa M, D)

a) Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn. Suy ra AB là đường phân giác của $\widehat{CHD}$.

b) Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O). Chứng minh A, B, K thẳng hàng. (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Tp.Hồ Chí Minh, năm học 2008 – 2009 và đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường Đại học sư phạm Tp.Hồ Chí Minh, năm học 2011 – 2012)

Bài 2. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đường thẳng AB lấy điểm C nằm ngoài đoạn AB. Từ C vẽ hai tiếp tuyến CE, CF với đường tròn (O) (E, F là hai tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của AB và EF

Qua C vẽ một cát tuyến bất kì cắt đường tròn (O) tại M, N (M nằm giữa C và N). Chứng minh:

a) Bốn điểm O, I, M, N cùng nằm trên một đường tròn

b) $\widehat{AIM} = \widehat{BIN}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Quận Phú Nhuận Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2004 – 2005)

Bài 3. Cho đường tròn (O; R) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M vẽ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm). D di động trên cung lớn AB (D không trùng với A, B và điểm chính giữa của cung) C là giao điểm thứ hai của MD với đường tròn. H là giao điểm của OM với AB. Chứng minh MH.MO: MC.MD, từ đó suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác HCD luôn đi qua một điểm cố định.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, Tỉnh Phú Thọ, năm học 2011 – 2012)

Bài 4. Cho điểm M ở bên ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và một cát tuyến MCD. AB cắt MO, CD lần lượt tại H, J. Chứng minh rằng: CJ.MD = MC.DJ.

Bài 5. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại D. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$ (Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 9, trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Tp. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013)

Bài 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), BE và CF là các đường cao. Các tiếp tuyến với đường tòn (O) tại B và C cắt nhau tại S, các đường thẳng BC và OS cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng: $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{ME}$

b) Chứng minh rằng: $\Delta AEM \backsim \Delta ABS$

c) Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của AS và BC. Chứng minh rằng $NP \perp BC$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, trường Đại học sư phạm Hà Nội, năm học 2011 – 2012)

Bài 7. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC (B nằm giữa M và C) với đường tròn. Gọi H là hình chiếu của A trên MO. K giao điểm của đoạn thẳng MO với đường tòn (O)

Chứng minh rằng:

a) Tứ giác OHBC nội tiếp

b) BK là tia phân giác của góc HBM

(Bài 5/407 Tạp chí Toán học và tuổi trẻ)

Bài 8. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các tia AB, DC cắt nhau tại M, các tia AC, BD cắt nhau tại T. Vẽ ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn (O). chứng minh ba điểm E, F, T thẳng hàng.

Bài 9. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các tia AB, DC cắt nhau tại M, các tia AD, BC cắt nhau tại N. Vẽ ME, MF là các tiếp tuyến của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

Bài 10. Cho tam giác nhịn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Vẽ AD là đường cao của tam giác ABC. Tia phân giác góc OAD cắt đường tròn (O) tại E. F là giao điểm các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O). OF cắt BC tại H, AF cắt đường tròn (O) tại K. vẽ đường kính AN của đường tròn (O), DK cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh rằng ba điểm M, H, N thẳng hàng.

Các bạn hãy tiếp tục tìm tòi suy nghĩ, tôi thực sự tin rằng chúng ta sẽ còn tìm ra được ứng dụng đặc sắc của tứ giác nội tiếp CDOH trong giải toán hình học.

Hướng dẫn giải

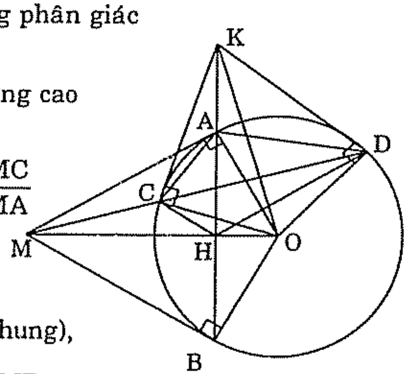
Bài 1.

a) MA, MB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (gt)

$\Rightarrow$ MA = MB, MO là tia phân giác của góc AMB.

ΔMAB cân tại M, MO là đường phân giác

$\Rightarrow MO \perp AB$



ΔMAO vuông tại A, AH là đường cao

$\Rightarrow MA^2 = MH.MO$

$\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MA}$

$\Rightarrow MA^2 = MC.MD$

Do đó MH.MO = MC.MD

Xét ΔMHC và ΔMDO có $\widehat{HMC}$ (chung),

$\dfrac{MH}{MD} = \dfrac{MC}{MO}$ (vì MH.MO = MC.MD

Do đó $\Delta MHC \backsim \Delta MDO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$

$\Rightarrow$ Tứ giác CHOD nội tiếp

ΔOCD có OC = OD (= R) $\Rightarrow \Delta OCD$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{DCO} = \widehat{CDO}$

Mà $\widehat{MHC} = \widehat{MDO}$ (vì tứ giác CHOD nội tiếp)

Do đó $\widehat{MHC} = \widehat{DHO}$

Ta có $\widehat{MHC} + \widehat{CHA} = \widehat{DHO} + \widehat{DHA} (= 90^0)$

Vậy $\widehat{CHA} = \widehat{DHA}$. Nên AB là đường phân giác của góc CHD.

b) Ta có $\widehat{KCO} = \widehat{KHO} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác KCOD nội tiếp

Mà tứ giác CHOD nội tiếp.

Do đó 5 điểm C, K, D, O, H cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{KHO} = \widehat{KCO} = 90^0$

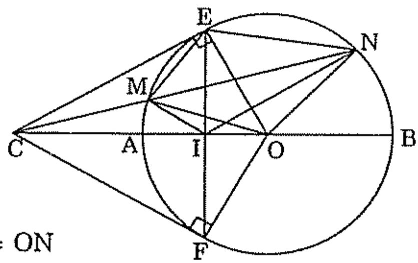
Ta có KH $\perp$ OM tại H.

Mà AB $\perp$ OM tại H.

Do vậy hai đường thẳng KH, AB trùng nhau

Suy ra ba điểm A, B, K thẳng hàng.

Bài 2.



a) CM.CN = CI.CO (= CE^2)

ΔCMI $\backsim$ ΔCON (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{CMI} = \widehat{CON}$

$\Rightarrow$ Tứ giác MNOI nội tiếp.

b) OM = ON (= R)

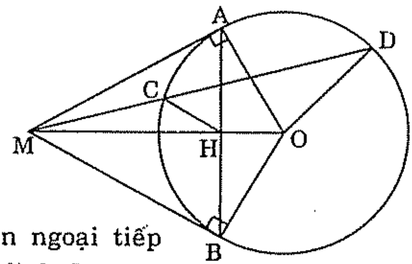
Xét đường tròn (MNOI) có OM = ON

$\Rightarrow \overset{\frown}{OM} = \overset{\frown}{ON}$

$\Rightarrow \widehat{BIN} = \widehat{ONM}$

Mà $\widehat{AIM} = \widehat{ONM}$ (Tứ giác MNOI nội tiếp)

Vậy $\widehat{AIM} = \widehat{BIN}$



Bài 3. MC.MD = MH.MO (= MA^2)

ΔMCH $\backsim$ ΔMOD (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MCH} = \widehat{MOD}$

$\Rightarrow$ Tứ giác CHOD nội tiếp.

Mà O cố định. Do vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác HCD luôn đi qua điểm cố định O.

Bài 4. MC.MD = MH.MO (= MA^2)

ΔMCH $\backsim$ ΔMOD (c.g.c)

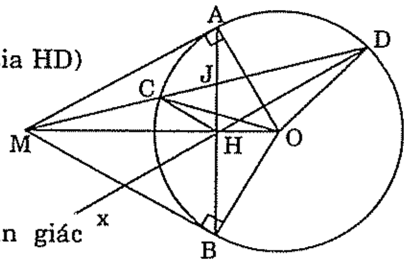
$\Rightarrow \widehat{MCH} = \widehat{MOD} \Rightarrow$ Tứ giác CHOD nội tiếp

Mà OC = OC (= R)

Xét đường tròn (CHOD) có $\widehat{MHC} = \widehat{ODC}$

Và $\overset{\frown}{OC} = \overset{\frown}{OD}$ nên $\widehat{ODC} = \widehat{OHD}$

$\widehat{OHD} = \widehat{MHx}$ (Hx là tia đối của tia HD)



Do đó $\widehat{MHC} = \widehat{MHx}$

Ta có $\widehat{MHC} + \widehat{CHA} = \widehat{MHx} + \widehat{AHD}$

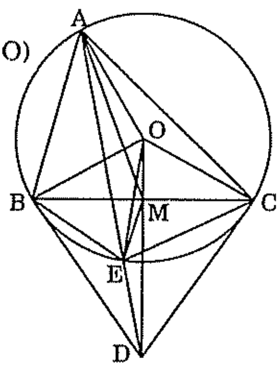
Nên $\widehat{CHA} = \widehat{AHD}$

Ta có HJ, HM là các đường phân giác trong và ngoài của tam giác HCD.

$\Rightarrow \dfrac{CJ}{DJ} = \dfrac{MC}{MD}$

Vậy CJ.MD = MC.DJ

Bài 5. Gọi E là giao điểm của DA và đường tròn (O)



Tứ giác AOME nội tiếp:

$\widehat{AMB} = \widehat{BME} = \dfrac{1}{2}\widehat{AME} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOE} = \widehat{ACE}$

$\widehat{ABE} + \widehat{ACE} = 180^0$, $\widehat{AMC} + \widehat{AMB} = 180^0$

Nên $\widehat{ABE} = \widehat{AMC}$

$\Delta ABE \backsim \Delta AMC$ (g.g)

Vậy $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$

Chú ý: Nếu gọi N là giao điểm của AM và đường tròn (O) thì $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CN}$. Do đó tứ giác BENC là hình thang cân (Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Bình Phước năm học 2013 – 2014)

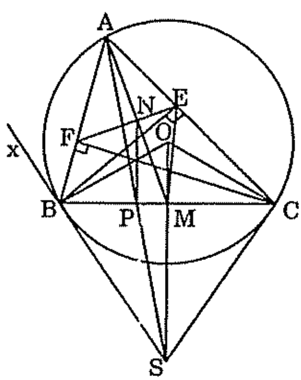
Bài 6.

a) $\Delta EAB \backsim \Delta MBS$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BS} = \dfrac{AE}{MB} \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{MB}$

Mà MB = MC = ME

Vậy $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BS}{MB}$



b) Gọi Bx là tia đối của tia BS

$\widehat{ABx} = \widehat{ACB} = \widehat{CEM}$

$\Rightarrow \widehat{ABS} = \widehat{AEM}$

$\Delta AEM \sim \Delta ABS$ (c.g.c)

Cách khác: Chứng minh $\widehat{BAS} = \widehat{MAC}$

$\Delta AEM \sim \Delta ABS$ (g.g)

c) $\Delta ABP \sim \Delta AEN$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AP}{AN}$

Mà $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AS}{AM}$ ($\Delta ABS \sim \Delta AEM$)

Nên $\dfrac{AP}{AN} = \dfrac{AS}{AM} \Rightarrow \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AS}{AP}$

ΔAMS có $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AS}{AP} \Rightarrow NP \,//\, SM$

Ta có $NP \,//\, SM$, $SM \perp BC$

Vậy $NP \perp BC$

Bài 7.

a) $MB.MC = MH.MO$ ($= MA^2$)

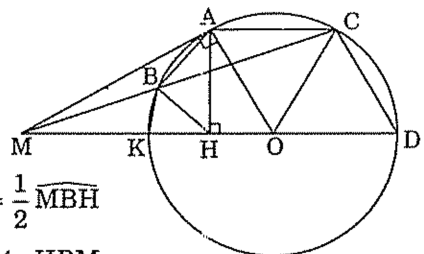
$\Delta MBH \sim \Delta MOC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MBH} = \widehat{MOC} \Rightarrow$ Tứ giác OHBC nội tiếp

Gọi D là giao điểm của tia đối tia OM và đường tròn (O)

$\widehat{MBK} = \widehat{CDK}$

$\widehat{MBH} = \widehat{COK}$

$\widehat{CDK} = \dfrac{1}{2}\widehat{COK}$



Do đó $\widehat{MBK} = \widehat{CDK} = \dfrac{1}{2}\widehat{COK} = \dfrac{1}{2}\widehat{MBH}$

Nên BK là tia phân giác của góc HBM

Bài 8. Gọi H là giao điểm của OM và EF.

$MB.MA = MH.MO$ ($= ME^2$)

$\Delta MBH \backsim \Delta MAO$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MBH} = \widehat{MAO} \Rightarrow$ Tứ giác ABHO nội tiếp.

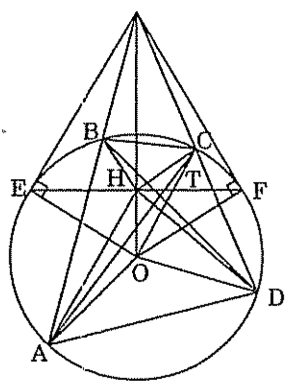
Tương tự tứ giác CDOH nội tiếp

$\widehat{BHC} = \widehat{BHM} + \widehat{MHC} = \widehat{BAO} + \widehat{ODC}$

Nên $\widehat{BHC} = \widehat{BTC}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BHTC nội tiếp

Tương tự tứ giác AHTD nội tiếp



Ta có $\widehat{MHC} = \widehat{ODC} = \widehat{OCD} = \widehat{OHD}$

$\widehat{THC} = \widehat{TBC} = \widehat{TAD} = \widehat{THD}$

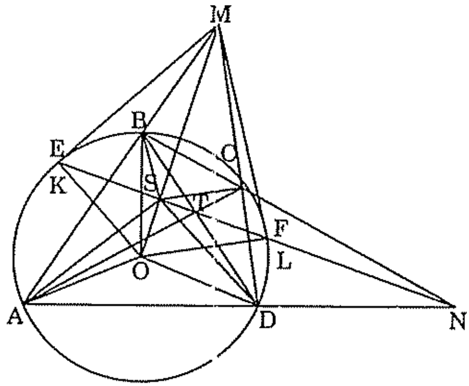
Do đó $\widehat{MHT} = \frac{1}{2}(\widehat{MHC} + \widehat{THC} + \widehat{THD} + \widehat{OHD}) = 90^0$

Ta có TH $\perp$ OM tại H. Mà EF $\perp$ OM tại H

Nên hai đường thẳng TH, EF trùng nhau

Vậy ba điểm E, F, T thẳng hàng

Bài 9. Gọi T là giao điểm của AC và BD. NT cắt đường tròn (O) tại K, L (L nằm giữa T, N)



Đường tròn (TBC) cắt NK tại S.

NA.MD = MC.MB = MT.MS

Ta có tứ giác STDA nội tiếp.

Ta có $\widehat{BSA} = \widehat{BSK} + \widehat{KSA}$

$= \widehat{BCA} + \widehat{BDA} = \widehat{BOA}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BSOA nội tiếp.

Tương tự tứ giác SCDO nội tiếp.

MA.MB = MC.MD

Ta có M, S, O thẳng hàng.

$\widehat{MSC} = \widehat{ODC} = \widehat{OCD} = \widehat{OSD}$

$\widehat{CST} = \widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \widehat{TSD}$

Nên $\widehat{MSL} = \frac{1}{2}(\widehat{MSC} + \widehat{CST} + \widehat{TSD} + \widehat{OSD}) = 90^0$

$\Rightarrow$ OM $\perp$ KL.

$\widehat{OSC} = 180^0 - \widehat{ODC} = 180^0 - \widehat{OCD} = \widehat{OCM}$

$\Delta OSC \backsim \Delta OCM \Rightarrow \frac{OS}{OC} = \frac{OC}{OM} \Rightarrow OS.OM = OC^2$

$\Delta OLM \backsim \Delta OSL$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OLM} = \widehat{OSL} = 90^0$

L $\equiv$ F. Tương tự K $\equiv$ E

Vậy N, E, F thẳng hàng.

Bài 10. Ta có FK.FA = FH.FO (= FB^2)

$\Delta FKH \backsim \Delta FOA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{FKH} = \widehat{FOA} \Rightarrow$ Tứ giác AOHK nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KHF} = \widehat{KAO} = \widehat{AHO}$

$\Rightarrow \widehat{BHK} = \widehat{BHA}$

$\Rightarrow \widehat{BHA} = \frac{1}{2}\widehat{AHK} = \frac{1}{2}\widehat{AOK} = \widehat{ACK}$

Nên $\widehat{BHA} = \widehat{ACK} \Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{ABK}$

$\Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{HAC} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{KAC}$

$$\widehat{KDC} = \frac{sđ\widehat{BM} + sđ\widehat{CK}}{2}$$

$= \widehat{MAB} + \widehat{KAC} = \widehat{MAB} + \widehat{BAH} = \widehat{MAH}$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMDH nội tiếp

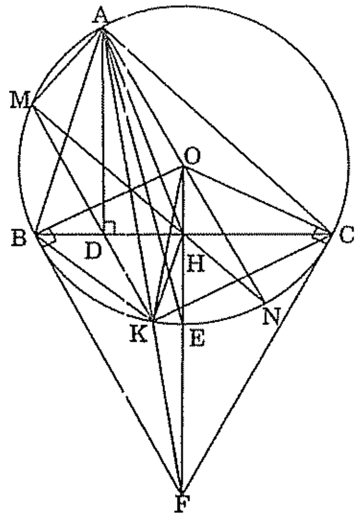
$\Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{AHD} = 90^0$

Mà $\widehat{AMN} = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Ta có $\widehat{AMH} = \widehat{AMN} = 90^0$

$\Rightarrow$ Hai tia MH, MN trùng nhau

Vậy ba điểm M, H, N thẳng hàng.



HÃY BẮT ĐẦU TỪ BÀI TOÁN QUEN THUỘC

Chúng ta hãy cùng bắt đầu từ bài toán quen thuộc sau:

Bài toán: Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O, R). A di động trên đường tròn (O). Xác định vị trí A để AB + AC lớn nhất.

Giải

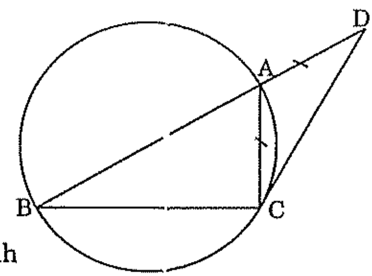
Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AC

ΔADC cân tại A

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{BDC}$

$\widehat{BDC} = \frac{1}{4}sđ\widehat{BC}$

$\widehat{BDC} = \alpha$, α không đổi, BC cố định



Nên D thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng BC.

Ta có: AB + AC = AB + AD = BD

Do đó AB + AC lớn nhất $\Leftrightarrow$ BD lớn nhất $\Leftrightarrow$ BD là đường kính của cung chứa góc α

$\Leftrightarrow \widehat{DBC} + \widehat{DCB} = \widehat{BCD} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{DBC} = \widehat{ACB} \Leftrightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB}$

Vậy khi A là điểm chính giữa của cung BC thì AB + AC lớn nhất.

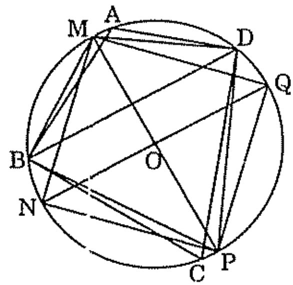
Do có BC không đổi, ta có bài toán.

Bài 1. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O). A di động trên đường tròn (O). Xã định vị trí A để chu vi tam giác ABC lớn nhất.

Giải

Thử xét tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O)

Gọi M, N, Q là điểm chính giữa các cung $\overset{\frown}{BAD}$, $\overset{\frown}{BCD}$, $\overset{\frown}{MBDP}$, $\overset{\frown}{MADP}$.



Ta có (AB + AD) + (BC + CD)

$\le$ (MB + MD) + (PB + PD)

= (MB + PB) + (MD + PD)

$\le$ (MN + PN) + (MQ + PQ)

Do đó: chu vi (ABCD) $\le$ chu vi (MNPQ), MNPQ là hình vuông. Giúp ta có bài toán mới:

Bài 2. Chứng minh rằng trong các tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), hình vuông có chu vi lớn nhất.

Giải

Từ bài toán nhận ra AB + AC $\le$ T, T không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$

Ta có $AB.AC \le \left(\dfrac{AB + AC}{2}\right)^2 \le T^2$

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \ge \frac{4}{AB + AC} \ge \frac{4}{T}$$

Giúp có các bài toán.

Bài 3. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O, R). A di động trên đường tròn (O). Xác định vị trí A để:

a) AB.AC lớn nhất

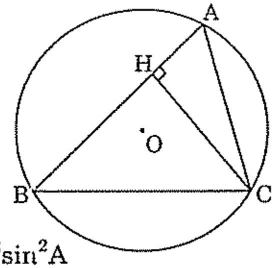
b) Diện tích tam giác ABC lớn nhất

c) $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$ nhỏ nhất

Giải

Từ bài toán xét A thuộc cung lớn BC, ta có $\widehat{BAC} < 90^0$, $\widehat{BAC} = t$, không đổi.

Vẽ CH ⊥ AB tại H.



Ta có AH = ACcosA, CH = AcsinA.

Nên BH = AB – AccosA

ΔHBC vuông tại H.

$\Rightarrow BC^2 = BH^2 + CH^2$

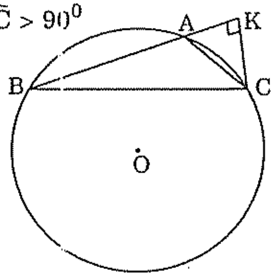
$BC^2 = (AB - AccosA)^2 + (AcsinA)^2$

$= AB^2 - 2AB.AC.cosA + AC^2cos^2A + AC^2sin^2A$

$= AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.cosA$

Do vậy $AB^2 + AC^2$ lớn nhất ⇔ AB.AC lớn nhất ⇔ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$

Tiếp tục xét A thuộc cung nhỏ BC, ta có $\widehat{BAC} > 90^0$



$\widehat{BAC} = 1$, 1 không đổi

Vẽ CK ⊥ AB tại K

CK = ACsinCAK = ACsin($180^0 - \widehat{BAC}$),

AK = ACcosCAK = Accos($180^0 - \widehat{BAC}$)

Tương tự trên có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB.ACcos(180^0 - \widehat{BAC})$

$AB^2 + AC^2$ nhỏ nhất ⇔ AB.AC lớn nhất ⇔ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$

Đây có lẽ là một điều thú vị trong hình học

Nếu A thuộc cung lớn BC thì $AB^2 + AC^2$ lớn nhất ⇔ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$

Nếu A thuộc cung nhỏ BC thì $AB^2 + AC^2$ nhỏ nhất ⇔ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$

Chúng ta có được bài toán.

Bài 4. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O; R). A di động trên cung nhỏ BC. Xác định vị trí A để $AB^2 + AC^2$ nhỏ nhất.

Giải

Tìm thêm cách giải của bài toán.

Chợt nhớ đến AB.MC + AC.MB = AM.BC (xét M nằm trên cung BC không chứa A) (định lí Pê-tô-lê-mê)

Nếu M là điểm chính giữa cung BC. Ta có MB = MC, không đổi

Ta có MB(AB + AC) = AM.BC

AB + AC lớn nhất ⇔ AM lớn nhất ⇔ AM là đường kính của đường tròn (O) ⇔ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$

Chúng ta đã có được lời giải khác của bài toán và còn giúp giải được bài toán tổng quát.

Bài 5. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O; R). A di động trên đường tròn (O). Xác định vị trí A để mAB + nAC lớn nhất (m, n là các số dương cho trước).

Giải

Chỉ cần chọn điểm M trên cung BC không chứa A sao cho $BM = \frac{n}{m}CM$ là đến với lời giải.

Tiếp tục tìm tòi suy nghĩ bài toán sẽ còn đem đến nhiều điều thú vị nữa!

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

PHẦN HÌNH HỌC

PHỤ LỤC. CÁC BÀI TOÁN HAY VÀ KHÓ

CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 (Tái bản)
NGUYỄN ĐỨC TẤN – NGUYỄN ANH HOÀNG – NGUYỄN ĐOÀN VŨ

Chịu trách nhiệm xuất bản
Giám đốc – Tổng biên tập
ĐINH THỊ THANH THỦY

Biên tập : **HOÀNG NHẤT**
Sửa bản in : **NGÔ QUỐC NHÀN**
Trình bày : **Công ty KHANG VIỆT**
Bìa : **Công ty KHANG VIỆT**

NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
62 Nguyễn Thị Minh Khai, Q.1, TP.HCM
ĐT: 38225340 – 38296764 – 38247225 – Fax: 84.8.38222726
Email: tonghop@nxbhcm.com.vn
Website: www.nxbhcm.com.vn – Sách điện tử: www.sachweb.vn

NHÀ SÁCH TỔNG HỢP 1
62 Nguyễn Thị Minh Khai, Q.1, TP.HCM – ĐT: 38 256 804
NHÀ SÁCH TỔNG HỢP 2
86 - 88 Nguyễn Tất Thành, Q.4, TP.HCM – ĐT: 39 433 868

Đối tác liên kết và tổng phát hành

CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P.Đa Kao - Q.1 - TP.HCM
Điện thoại: 08.39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: 08.3911 0880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Website: www.khangvietbook.com.vn
www.nhasachkhangviet.vn

Số lượng 2.000 cuốn, khổ 16×24cm.
Tại: **Cty TNHH MTV IN ẤN MAI THỊNH ĐỨC**
Địa chỉ: 71, Kha Vạn Cân, P. Hiệp Bình Chánh, Q. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh
Số ĐKKHXB: 2304-2015/CXBIPH/14-149/THTPHCM ngày 18/08/2015.
Quyết định xuất bản số: 1047/QĐ-THTPHCM-2015 do NXB Tổng Hợp Thành Phố Hồ Chí Minh cấp ngày 21/8/2015.
Mã số ISBN: 978–604–58–2805–2
In xong và nộp lưu chiểu Quý IV năm 2015.