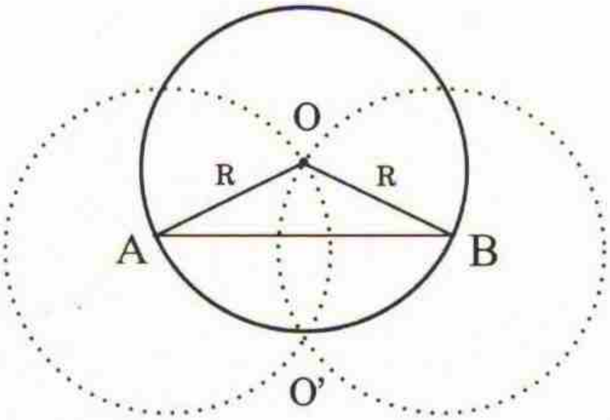
Th.s Toán học - Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC - Chủ biên
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIỆN KHẢI
LÊ BÍCH NGỌC
LÊ HỮU TRÍ

Để học tốt TOÁN 9



TẬP 1

- Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.
- Với Thầy, Cô giáo và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.s Toán học - Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC - Chủ biên
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIỆN KHẢI
LÊ BÍCH NGỌC
LÊ HỮU TRÍ

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 9

TẬP 1

- Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.
- Với Thầy, Cô và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : (04) 9 714898 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 9 714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc : **PHÙNG QUỐC BẢO**
Tổng biên tập : **NGUYỄN BÁ THÀNH**

Biên tập
Minh Hải

Chế bản
NS. Bình Thạnh

Trình bày bìa
Xuân Duyên

Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
Địa chỉ : 374 Xô Viết Nghệ Tĩnh P.25 – Q.BT – TP.HCM
ĐT: 5117907 – Fax: 8999898
Email: binhthanhbookstore@yahoo.com

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 9 TẬP 1
Mã số : 1L – 219 ĐH2007
In 3.000 cuốn, khổ 16×24 cm, tại Công ty in VIỆT HƯNG.
Số xuất bản : 729 – 2007/CXB/16 – 110/ĐHQGHN ngày 07/09/2007.
Quyết định xuất bản số : 448 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2007.

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới các Thầy, Cô giáo, các Phụ huynh, cùng toàn thể các Em học sinh bộ sách:

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN THCS

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên.

Bộ tài liệu gồm 9 cuốn :

Cuốn 1: Toán 6 — Tập 1
Cuốn 2: Toán 6 — Tập 2
Cuốn 3: Toán 7 — Tập 1
Cuốn 4: Toán 7 — Tập 2
Cuốn 5: Toán 8 — Tập 1
Cuốn 6: Toán 8 — Tập 2
Cuốn 7: Toán 9 — Tập 1
Cuốn 8: Toán 9 — Tập 2
Cuốn 9: 81 đề Toán mẫu luyện thi Tốt nghiệp THCS

Bộ sách được viết theo chương trình sách giáo khoa mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo dựa trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp giải Toán THCS.

Mục tiêu của bộ sách:

1. *Cung cấp cho các Thầy, Cô giáo, các Phụ huynh một bộ giáo án có chất lượng về mặt sư phạm và chứa đựng đầy đủ kiến thức cơ bản cũng như chuyên sâu, để sau khi tham khảo có thể chuyển đổi ngay thành giáo án mang đi giảng dạy cho học sinh của mình.*

2. *Cung cấp cho các em học sinh THCS yêu thích môn Toán một bộ sách tự học tập dễ hiểu và bổ ích. Nó chắc chắn sẽ trở thành người bạn đồng hành để giúp các Em chủ động hơn trong việc học Toán theo chương trình sách giáo khoa và mở mang kiến thức Toán THCS của bản thân.*

Các cuốn Toán 6, Toán 7, Toán 8, Toán 9 đều có chung một cấu trúc, bao gồm hai phần:

Phần I – Số học hoặc đại số
Phần II – Hình học

Mỗi phần chứa đựng các chương (chương I, chương II, ...). Ở mỗi chương chứa đựng các chủ đề (chủ đề 1, chủ đề 2, ...) theo nội dung của sách giáo khoa.

Mỗi chủ đề đều được chia thành 5 mục:

I. *Kiến thức cơ bản*

Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan (trong hầu hết các trường hợp chúng được bắt đầu bằng phương pháp đặt vấn đề) cùng với những thí dụ minh hoạ ngay sau đó.

II. *Các ví dụ minh hoạ*

Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kỹ năng giải Toán.

III. *Câu hỏi ôn tập lý thuyết*

IV. *Bài tập đề nghị*

V. *Hướng dẫn - Đáp số*

Như vậy, ở mỗi chủ đề:

1. *Với việc trình bày kiến thức cơ bản theo kiểu đặt vấn đề, cùng thí dụ minh hoạ ngay sau đó, sẽ giúp tăng chất lượng bài giảng cho các Thày, Cô giáo. Và với các em học sinh sẽ thấy dễ hiểu kiến thức mới để rồi biết cách trình bày bài. Điều này phù hợp với xu hướng giáo dục mới trong công cuộc cải cách phương pháp dạy và học theo hướng " **Lấy học trò làm trung tâm** "*
2. *Tiếp đó, tới các ví dụ minh hoạ có chọn lọc, sẽ giúp các Thày, Cô giáo dẫn dắt các em học sinh hoàn thiện kiến thức.*
3. *Đặc biệt là nội dung của các **chú ý, nhận xét** và **yêu cầu** sau mỗi kiến thức cùng với một vài thí dụ và ví dụ sẽ giúp các Thày, Cô giáo củng cố những hiểu biết chưa thật thấu đáo cho các em học sinh, cùng với cách nhìn nhận vấn đề đặt ra cho các em học sinh, để trả lời một cách thoả đáng câu hỏi " **Tại sao lại nghĩ và làm như vậy ?** ".*
4. *Ngoài ra, còn có rất nhiều bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Chúng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã nhận lời đọc bản thảo, nhận lời tới dự giờ trong các tiết giảng thử của chúng tôi theo giáo trình này ở trên các lớp 6, 7, 8, 9 tại một số trường THCS của Hà Nội và từ đó đóng góp những nhận xét quí báu để giúp chúng tôi tới ngày hôm nay hoàn thiện được bộ sách này.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cự Môn do Th.s Toán học Lê Hồng Đức phụ trách
Số 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0983046689
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com.

Hà nội, ngày 18 tháng 12 năm 2004

Chủ biên LÊ HỒNG ĐỨC

MỤC LỤC

CHƯƠNG II
ĐƯỜNG TRÒN

Phần 1

Đại số

CHƯƠNG I - CĂN BẬC HAI – CĂN BẬC BA

Chương này, bao gồm:

1. **Căn bậc hai**
2. **Căn thức bậc hai – Hằng đẳng thức** $\sqrt{A} = A$
3. **Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương**
4. **Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương**
5. **Biến đổi đơn giản căn thức bậc hai**
6. **Rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai**
7. **Căn bậc ba – Căn bậc n**

CHỦ ĐỀ 1 CĂN BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. NHẮC LẠI MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA LUỸ THỪA BẬC HAI

Ta có một số tính chất sau:

Tính chất 1. Bình phương hay luỹ thừa bậc hai của mọi số đều không âm.

Tức là, ta luôn có:

$$a^2 \geq 0, \forall a \in \mathbf{R}.$$

Tính chất 2. Hai số bằng nhau hoặc đối nhau có bình phương bằng nhau. Ngược lại, nếu hai số có bình phương bằng nhau thì chúng bằng nhau hoặc đối nhau.

Tức là, ta luôn có:

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.;$$

Tính chất 3. Với hai số dương a, b, ta có:

$$a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b.$$

Tính chất 4. Bình phương của một tích bằng tích các bình phương của mỗi thừa số.

Tức là, ta luôn có:

$$(ab)^2 = a^2b^2.$$

Tính chất 5. Bình phương của một thương bằng thương của bình phương của số bị chia với bình phương số chia.

Tức là, ta luôn có:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Thí dụ 1: Thực hiện phép tính:

a. $3^2.\left(-\frac{2}{3}\right)^2$. b. $(-0,05)^2:\left(\frac{1}{100}\right)^2$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$3^2.\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 3^2.\frac{2^2}{3^2} = 2^2 = 4.$$

b. Ta có ngay:

$$(-0{,}05)^2 : \left(\frac{1}{100}\right)^2 = \left(\frac{5}{100}\right)^2 : \left(\frac{1}{100}\right)^2 = \frac{5^2}{100^2} \cdot 100^2 = 25.$$

2. CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ

Để xây dựng khái niệm căn bậc hai của một số, chúng ta sẽ bắt đầu với hai bài toán sau:

Bài toán 1: Tìm cạnh của hình vuông có diện tích bằng 16.

Giải

Gọi cạnh của hình vuông là x, điều kiện $x > 0$.

Từ giả thiết, ta có:

$$x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 4 \text{ hoặc } x_2 = -4, \text{ vì } 4^2 = (-4)^2 = 16.$$

Vậy, cạnh hình vuông bằng 4.

Bài toán 2: Cho số thực a. Hãy tìm số thực x sao cho $x^2 = a$.

Giải

Xét phương trình: $x^2 = a$

ta có nhận xét:

- Nếu $a < 0$, thì theo tính chất 1, ta có $x^2 \geq 0$ do đó không tồn tại x.
- Nếu $a > 0$, thì theo bài toán 1 ta thấy tồn tại hai số thực:

$$x_1 > 0 \text{ và } x_1^2 = a$$

$$x_2 < 0 \text{ và } x_2^2 = a$$

hơn nữa, ta còn có có x_1 và x_2 đối nhau.

Chú ý: Người ta chứng minh được rằng, với mọi số thực $a \geq 0$ luôn tồn tại số thực duy nhất $x \geq 0$ thoả mãn $x^2 = a$. Ta kí hiệu $x = \sqrt{a}$ và gọi là căn bậc hai số học của a.

Từ đó, ta có định nghĩa căn bậc hai số học:

Định nghĩa: Căn bậc hai số học của một số $a \geq 0$ là một số x không âm mà bình phương của nó bằng a. Kí hiệu $\sqrt{a}$.

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}, \text{ với } a \geq 0.$$

Thí dụ 2: Ta có:

$\sqrt{16} = 4$ vì $4 > 0$ và $4^2 = 16$.

$\sqrt{1,44} = 1,2$ vì $1,2 > 0$ và $(1,2)^2 = 1,44$.

$\sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$ vì $8 > 0$ và $8^2 = 64$.

Chú ý: Rất nhiều học sinh nhầm lẫn công thức:

$$\sqrt{a^2} = a, \text{ dẫn tới cho rằng } \sqrt{(-8)^2} = -8.$$

Cần chú ý rằng:

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ do đó } \sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8.$$

Thí dụ 3: Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \sqrt{0,09} - \sqrt{\frac{4}{25}} + \sqrt{1\frac{9}{16}}.$$

Giải

Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$M = \sqrt{(0,3)^2} - \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = 0,3 - \frac{2}{5} + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{2}{5} + \frac{5}{4} = \frac{6 - 8 + 25}{20} = \frac{23}{20}.$$

Chú ý: Ta thấy rằng, số $-\sqrt{a} < 0$ là số đối của $\sqrt{a}$, với $a > 0$. Và số $-\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai âm của a. Vậy, mọi số thực $a > 0$ có 2 căn bậc hai là hai số đối nhau, trong đó:

- $\sqrt{a} > 0$ gọi là căn bậc hai số học hay còn gọi là căn bậc hai dương của a.
- $-\sqrt{a} < 0$ gọi là căn bậc hai âm của a.

Thí dụ 4: Trong các số $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{3^2}$, $-\sqrt{(-3)^2}$, $-\sqrt{3^2}$ số nào là căn bậc hai số học của 9.

Giải

Các số $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{3^2}$, là căn bậc hai số học cua 9 bởi vì:

$$\sqrt{9} = \sqrt{(-3)^2} = 3 > 0 \text{ và } \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3 > 0.$$

Tóm lại:

Một cách tổng quát trên **R**:

1. Mọi số dương $a > 0$ có hai căn bậc hai là hai số đối nhau:
   - $\sqrt{a} > 0$ gọi là căn bậc hai số học hay còn gọi là căn bậc hai dương của a.
   - $-\sqrt{a} < 0$ gọi là căn bậc hai âm của a.
2. Số 0 có căn bậc hai duy nhất là 0.
3. Số âm không có căn bậc hai.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $\sqrt{0,16} + \sqrt{\frac{4}{25}}$. b. $\sqrt{3\frac{1}{16}} - \sqrt{0,36}$.

Giải

a. Ta có:

$$\sqrt{0,16} + \sqrt{\frac{4}{25}} = \sqrt{(0,4)^2} + \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = 0,4 + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}.$$

b. Ta có:

$$\sqrt{3\frac{1}{16}} - \sqrt{0,36} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2} - \sqrt{(0,6)^2} = \frac{7}{4} - \frac{3}{5} = \frac{23}{20}.$$

Ví dụ 2. Tìm x, biết:

a. $x^2 = \frac{16}{9}$. c. $4x^2 = 0,16$.

b. $x^2 = 3$. d. $(x-1)^2 = \frac{1}{9}$.

Giải

a. Ta có:

$$x^2 = \frac{16}{9} = \left(\pm\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{4}{3}.$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right\}$.

b. Ta có:

$$x^2 = 3 = (\pm\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$.

c. Ta có thể biến đổi theo hai cách:

Cách 1: Ta có:

$$4x^2 = 0{,}16 \Leftrightarrow x^2 = 0{,}04 = (\pm 0{,}2)^2 \Leftrightarrow x = \pm 0{,}2.$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{0{,}2; -0{,}2\}$.

Cách 2: Ta có:

$$4x^2 = 0{,}16 \Leftrightarrow (2x)^2 = (\pm 0{,}4)^2 \Leftrightarrow 2x = \pm 0{,}4 \Leftrightarrow x = \pm 0{,}2.$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{0{,}2; -0{,}2\}$.

d. Ta có:

$$(x-1)^2 = \frac{1}{9} = \left(\pm\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x - 1 = \pm\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.

Nhận xét: Như vậy, thông qua ví dụ trên chúng ta đã làm quen được với việc sử dụng khái niệm căn bậc hai để tìm nghiệm của phương trình, Tuy nhiên, chúng ta mới chỉ bắt đầu với phương trình dạng $x^2 = a^2$ hoặc cần biến đổi đôi chút để có được dạng này. Ví dụ tiếp theo sẽ nâng mức tiếp cận cho chúng ta.

Ví dụ 3. Tìm x, biết:

a. $x^2 = 4 - 2\sqrt{3}$.

b. $x^2 + 4x = 23 - 10\sqrt{2}$.

c. $(2x-1)^2 = |1 - 2x|$.

d. $(x-2)^2 + (2x+1)^2 = 0$.

Giải

a. Ta biến đổi phương trình:

$$x^2 = 4 - 2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm(\sqrt{3} - 1) \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1 \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{3}.$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{\sqrt{3} - 1; 1 - \sqrt{3}\}$.

b. Ta biến đổi phương trình:

$$x^2 + 4x + 4 = 25 - 10\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = (5 - \sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = \pm(5 - \sqrt{2}) \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{2} \text{ hoặc } x = \sqrt{2} - 7.$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{3 - \sqrt{2}; \sqrt{2} - 7\}$.

c. Nhận xét rằng $(2x - 1)^2 = |1 - 2x|^2$, do đó phương trình được viết dưới dạng:

$$|1 - 2x|^2 = |1 - 2x| \Leftrightarrow |1 - 2x|(|1 - 2x| - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |1-2x| = 0 \\ |1-2x| = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x = 0 \\ 1-2x = 1 \\ 1-2x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1/2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{0; \frac{1}{2}; 1\}$.

d. Vì vế trái là tổng của hai bình phương (hai số không âm) nên phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ điều này không xảy ra.}$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Chúng ta đã biết rằng:

$$a^2 \geq 0 \text{ và } b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 0$$

điều đó cho thấy:

$$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ và } b = 0.$$

Ví dụ 4. Tìm x, biết:

$$x^2 = a \text{ (hằng số).}$$

Giải

Với phương trình:

$$x^2 = a \text{ (hằng số)}$$

ta đi xét ba trường hợp của a.

- Nếu $a > 0$ thì tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{\sqrt{a}; -\sqrt{a}\}$.
- Nếu $a = 0$ thì tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{0\}$.
- Nếu $a < 0$ thì tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \varnothing$.

Ví dụ 5. So sánh các số sau:

$$x = 4\sqrt{3} \text{ và } y = 3\sqrt{4}.$$

Giải

Ta có:

$$x^2 = (4\sqrt{3})^2 = 16.3 = 48.$$

$$y^2 = (3\sqrt{4})^2 = 9.4 = 36.$$

Nhận thấy $x^2 > y^2$, mà x và y dương nên $x > y$.

Nhận xét: Để so sánh hai số, nhiều khi ta cần so sánh bình phương của chúng. Khi đó, cần lưu ý:

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$$

$$a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|.$$

Các kết quả trên sẽ cho phép chúng ta tìm được nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 6. Tìm giá trị của x, biết:

a. $x^2 > 16$.

b. $x^2 < 25$.

c. $x^2 \le \dfrac{1}{3}$.

d. $(x-1)^2 \ge 4$.

Giải

Ta biết với $a > 0$ thì:

$$x^2 > a^2 \Leftrightarrow |x| > a \quad \text{và} \quad x^2 < a^2 \Leftrightarrow |x| < a.$$

a. Ta có:

$$x^2 > 16 = 4^2 \Leftrightarrow |x| > 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < -4 \end{array}\right..$$

b. Ta có:

$$x^2 < 25 = 5^2 \Leftrightarrow |x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5.$$

c. Ta có:

$$x^2 \le \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

d. Ta có:

$$(x-1)^2 \ge 4 = 2^2 \Leftrightarrow |x-1| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 > 2 \\ x - 1 < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < -1 \end{array}\right..$$

Chú ý: Các em học sinh cần thận trọng khi giải dạng bài này vì có thể mắc phải sai lầm dẫn đến làm mất nghiệm

$$x^2 > 4^2 \Leftrightarrow x > 4$$

hoặc thừa nghiệm

$$x^2 < 5^2 \Leftrightarrow x < 5.$$

Chúng ta sẽ tiếp tục với các bất phương trình phức tạp hơn trong ví dụ sau.

Ví dụ 7. Tìm giá trị của x, biết:

a. $x^2 + 2x - 3 > 0$. b. $4x^2 - 4x < 8$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 > 2^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 > 2 \\ x + 1 < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -3 \end{array}\right..$$

b. Ta biến đổi:

$$4x^2 - 4x < 10 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 < 9 \Leftrightarrow (2x-1)^2 < 3^2$$

$$\Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

Ví dụ 8. Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không âm:

a. $A = 15x^2 + (x^2 - 4x + 4)$.

b. $B = x^2(x^2 + 6x + 9)$.

Giải

a. Viết lại:

$$A = 15x^2 + (x-2)^2.$$

Ta có:

$$15x^2 \geq 0;$$

$$(x-2)^2 \geq 0.$$

suy ra:

$$A = 15x^2 + (x-2)^2 \geq 0.$$

Trong trường hợp này dấu " = " không xảy ra do x không thể đồng thời nhận hai giá trị: x=0 và x=2. Vậy, ta được:

$$A = 15x^2 + (x-2)^2 > 0 \text{ - đpcm.}$$

b. Ta có:

$$x^2 \geq 0;$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \geq 0.$$

suy ra:

$$B = x^2(x+3)^2 \geq 0.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ (x+3)^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array}\right..$$

Chú ý: Trong bài toán chứng minh giá trị các biểu thức không âm chúng ta cố gắng phân tích biểu thức thành tổng hay tích các bình phương. Cũng có thể sử dụng phương pháp này để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức như trong ví dụ sau.

Ví dụ 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = x^2 - 8x + 3.$$

Giải

Ta có:

$$A = x^2 - 2.4x + 4^2 - 13 = (x-4)^2 - 13.$$

Do $(x-4)^2 \geq 0$, suy ra:

$$A = (x-4)^2 - 13 \geq -13.$$

Vậy min A = −13 khi và chỉ khi $(x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Nhận xét: Từ định nghĩa về căn bậc hai, chúng ta có mở rộng:

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases},$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow A = B \geq 0.$$

Kết quả trên sẽ được sử dụng nhiều trong bài toán giải phương trình.

Ví dụ 10. Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{x-1} = 3$.

b. $\sqrt{2x+1} = x + 1$.

c. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$.

Giải

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$(\sqrt{x-1})^2 = 3^2 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 10.

b. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 2x+1 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ 2x+1 = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

c. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$x^2-3x+2 = 2x^2-3x+1 \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 \ge 0 \\ x^2-3x+2 = 2x^2-3x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 \ge 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 \ge 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \pm 1$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nhắc lại một số tính chất của luỹ thừa bậc hai và chứng minh các tính chất đó.

Câu hỏi 2: Hãy xây dựng khái niệm căn bậc hai của một số.

Câu hỏi 3: Phát biểu định nghĩa căn bậc hai số học của một số.

Câu hỏi 4: Nêu kết quả tổng quát trên **R**.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Thực hiện phép tính:

a. $(-5)^2.\left(-\frac{7}{5}\right)^2$.

b. $(-0,25)^2 : \left(\frac{3}{100}\right)^2$.

Bài tập 2. Tìm x, biết:

a. $x^2 = 9$.

b. $x^2 = (-2)^2$.

c. $4x^2 + 1 = 8 - 2\sqrt{6}$.

d. $x^2 + 1 = 6 - 2\sqrt{6}$.

Bài tập 3. So sánh các cặp số sau:

a. 0,3 và 0,2(5).

b. $4\sqrt{\frac{1}{2}}$ và $2\sqrt{\frac{1}{3}}$

c. $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$

d. $6\sqrt{\frac{2}{7}}$ và $7\sqrt{\frac{2}{6}}$

Bài tập 4. Chứng minh các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x

a. $x^2 + 1 \geq 2x$.

b. $2x^2 + 2x - 1 \geq -15$

c. $x^2(x^2 - 1) \geq x^2 - 1$

d. $9x^2 + 6ax + a^2 + 8 > 0$, a là hằng số.

Bài tập 5. Tìm giá trị của x biết:

a. $x^2 \geq 25$; $x^2 < 25$;

b. $x^2 + 2x - 5 \geq 0$;

c. $x^2 - 1 < 9$;

d. $x^2 + 6ax + 9a^2 - 4 > 0$, a là hằng số.

Bài tập 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 8 + \sqrt{x^2 + 3x - 4}.$$

Bài tập 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = 11 - \sqrt{x^2 + 7x + 6}.$$

Bài tập 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a. $A = 5 + \sqrt{x^2 - 3x + 9}$.

b. $B = \sqrt{x^2 - 7x + 5}$.

c. $C = \sqrt{x^2 - 7x + 6} - 25$

d. $D = x^2 - 6x + 11$

Bài tập 9. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a. $A = 15 - \sqrt{x^2 - 4x + 13}$.

b. $B = -3x^2 + 6x - 15$.

c. $C = 12 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

d. $D = 17 + 10x - x^2$.

Bài tập 10. Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{2x - 1} = 1$.

b. $\sqrt{x^2 + 5} = x + 1$.

c. $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 2x}$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1: *Học sinh tự làm.*

a. 49.

b. $\frac{625}{9}$

Bài tập 2:

a. $S = \{3 ; -3\}$.

b. $S = \{2 ; -2\}$.

c. Ta có:

$$4x^2 + 1 = 8 - 2\sqrt{6} \Leftrightarrow (2x)^2 = 7 - 2\sqrt{6} = 6 - 2\sqrt{6} + 1 = (\sqrt{6} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm(\sqrt{6} - 1) \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{6} - 1).$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{\frac{1}{2}(\sqrt{6} - 1) ; -\frac{1}{2}(\sqrt{6} - 1)\}$.

d. Ta có:

$$x^2+1=6-2\sqrt{6} \Leftrightarrow x^2=5-2\sqrt{6}=3-2\sqrt{3}.\sqrt{2}+2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow x=\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

Vậy, tập hợp nghiệm của phương trình là $S=\{\sqrt{3}-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}-\sqrt{3}\}$.

Bài tập 3:

a. $0,3>0,2(5)$.

b. $4\sqrt{\frac{1}{2}}>2\sqrt{\frac{1}{3}}$.

c. $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$.

d. $6\sqrt{\frac{2}{7}}<7\sqrt{\frac{2}{6}}$.

Bài tập 4:

a. Ta có:

$$x^2+1\geq 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

b. Ta có:

$$2x^2+2x-1\geq -15 \Leftrightarrow 2x^2+2x-1+15\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x+14\geq 0 \Leftrightarrow 2(x^2+x+7)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2.\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+7-\frac{1}{4}\geq 0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2+\frac{27}{4}\geq 0$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

c. Ta có:

$$x^2(x^2-1)\geq x^2-1 \Leftrightarrow x^2(x^2-1)-(x^2-1)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-1)\geq 0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2\geq 0$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

d. Ta có:

$$9x^2+6ax+a^2+8>0 \Leftrightarrow (3x+a)^2+8>0$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

Bài tập 5:

a. Ta có:

$$x^2\geq 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 5 \\ x\leq -5 \end{array}\right. \text{ và } x^2<25 \Leftrightarrow -5<x<5.$$

Do đó, không tồn tại x.

b. Ta có:

$$x^2+2x-5\geq 0 \Leftrightarrow x^2+2x+1-6\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2-6\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\geq 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1\geq \sqrt{6} \\ x+1\leq -\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq \sqrt{6}-1 \\ x\leq -\sqrt{6}-1 \end{array}\right.$$

c. Ta có:

$$x^2-1<9 \Leftrightarrow x^2<10 \Leftrightarrow -\sqrt{10}<x<\sqrt{10}.$$

d. Ta có:

$$x^2+6ax+9a^2-4>0 \Leftrightarrow (x+3a)^2-4>0$$

$$\Leftrightarrow (x+3a)^2>4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3a>2 \\ x+3a<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2-3a \\ x<-2-3a \end{array}\right..$$

Bài tập 6: Ta có:

$$\sqrt{x^2+3x-4} \ge 0 \Rightarrow 8+\sqrt{x^2+3x-4} \ge 8.$$

Vậy, $A_{\text{nhỏ nhất}}=8$, đạt được khi:

$$\sqrt{x^2+3x-4}=0 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \end{array}\right..$$

Bài tập 7: Ta có:

$$\sqrt{x^2+7x+6} \ge 0 \Rightarrow -\sqrt{x^2+7x+6} \le 0 \Rightarrow 11-\sqrt{x^2+7x+6} \le 11.$$

Vậy, $B_{\text{lớn nhất}}=11$, đạt được khi:

$$\sqrt{x^2+7x+6}=0 \Leftrightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right..$$

Bài tập 8:

a. Ta có:

$$x^2-3x+9>0 \Leftrightarrow 5+\sqrt{x^2-3x+9}>5$$

Vậy, A không có giá trị nhỏ nhất.

b. Ta có:

$$\sqrt{x^2-7x+5} \ge 0.$$

Vậy, $A_{\text{nhỏ nhất}}=0$, đạt được khi:

$$x^2-7x+5=0 \Leftrightarrow x^2-2.\frac{7}{2}x+\frac{49}{4}-\frac{29}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{49}{4}\right)^2-\frac{29}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{49}{4}\right)^2=\frac{29}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{29}}{2}+\dfrac{49}{4} \\ x=-\dfrac{\sqrt{29}}{2}+\dfrac{49}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\sqrt{29}+49}{4} \\ x=\dfrac{-2\sqrt{29}+49}{4} \end{array}\right..$$

c. Ta có:

$$\sqrt{x^2-7x+6} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-7x+6}-25 \ge -25$$

Vậy, $A_{\text{nhỏ nhất}}=-25$, đạt được khi:

$$x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right..$$

d. Ta có:

$$x^2 - 6x + 11 = x^2 - 2.3x + 9 + 2 = (x - 3)^2 + 2 \geq 2$$

Vậy, $A_{\text{nhỏ nhất}} = 2$, đạt được khi:

$$(x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Bài tập 9:

a. Ta có:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 13} > 0 \text{ (do } x^2 - 4x + 13 > 0) \Leftrightarrow 15 - \sqrt{x^2 - 4x + 13} < 0$$

Vậy, A không có giá trị lớn nhất.

b. Ta có:

$$-3x^2 + 6x - 15 = -3(x^2 - 2x + 3)$$
$$= -3(x - 1)^2 + 3 \cdot 2 = -3(x - 1)^2 + 6 \leq 6$$

Vậy, $B_{\text{lớn nhất}} = 6$, đạt được khi:

$$(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

c. Ta có:

$$12 - \sqrt{x^2 - 2x + 1} \leq 12.$$

Vậy, $C_{\text{lớn nhất}} = 12$, đạt được khi:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

d. Ta có:

$$17 + 10x - x^2 = -(x - 5)^2 + 48 \leq 48$$

Vậy, $D_{\text{lớn nhất}} = 48$, đạt được khi:

$$(x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Bài tập 10:

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$(\sqrt{2x - 1})^2 = 1^2 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

b. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 5 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 5 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 2.

c. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 = x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 4 \\ 2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 2.

CHỦ ĐỀ 2

CĂN THỨC BẬC HAI
HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. NHẮC LẠI GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Ta có:

> *Giá trị tuyệt đối của biểu thức a được xác định như sau:*
>
> $$|a| = \begin{cases} a \text{ nếu } a \geq 0 \\ -a \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$$

Thí dụ 1: Ta có:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x - 1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{nếu } x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{nếu } x < 1 \end{cases}.$$

2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ $\sqrt{A}$ CÓ NGHĨA

Ta có ngay:

> $\sqrt{A}$ *chỉ có nghĩa khi và chỉ khi* $A \geq 0$.

Thí dụ 2: Với giá trị nào của x thì $\sqrt{2 - x}$ có nghĩa ?

Giải

Để $\sqrt{2 - x}$ có nghĩa, điều kiện là:

$2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Vậy, với $x \leq 2$ thì $\sqrt{2 - x}$ có nghĩa.

Thí dụ 3: Tìm điều kiện của x để $\sqrt{-2x + 1}$ tồn tại ?

Giải

Để $\sqrt{-2x + 1}$ tồn tại, điều kiện là:

$$-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy, $\sqrt{-2x + 1}$ tồn tại khi và chỉ khi $x \leq \frac{1}{2}$.

3. HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

Ta có kết quả:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}.$$

Thí dụ 4: Từ kết quả trên ta thấy:

$$\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8.$$

$$\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1, \text{ vì } \sqrt{3}-1 > 0.$$

$$\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2}-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}, \text{ vì } \sqrt{2}-\sqrt{3} < 0.$$

Thí dụ 5: Tính:

a. $\sqrt{a^4}$. b. $\sqrt{(x-3)^2}$.

Giải

a. Ta có:

$$\sqrt{a^4} = \sqrt{(a^2)^2} = |a^2| = a^2, \text{ vì } a^2 \geq 0 \text{ với mọi a.}$$

b. Ta có:

$$\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \begin{cases} x-3 \text{ nếu } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) \text{ nếu } x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 \text{ nếu } x \geq 3 \\ 3-x \text{ nếu } x < 3 \end{cases}$$

Thí dụ 6: Tìm x, biết:

a. $\sqrt{(x+1)^2} = 9$. b. $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$.

Giải

a. Ta có:

$$\sqrt{(x+1)^2} = 9 \Leftrightarrow |x+1| = 9$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 9 \text{ nếu } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) = 9 \text{ nếu } x+1 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \text{ nếu } x \geq -1 \\ x = -10 \text{ nếu } x < -1 \end{array}\right.$$

Vậy, ta nhận được hai giá trị $x = 8$ và $x = -10$.

b. Ta có:

$$\sqrt{(x-3)^2} = 3-x \Leftrightarrow |x-3| = 3-x \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là $x \leq 3$.

Chú ý: Trong lời giải câu b), chúng ta đã sử dụng tính chất:

$$|a| = -a \Leftrightarrow a \leq 0.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Tính $|x^2 - 3x + 2|$.

Giải

Ta có:

$$|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \text{ nếu } x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ -(x^2 - 3x + 2) \text{ nếu } x^2 - 3x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \text{ nếu } x \geq 2 \text{ hoặc } x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 2 \text{ nếu } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của x để biểu thức sau có nghĩa:

a. $A = \dfrac{1}{\sqrt{5x + 10}}$.　　　　b. $B = \dfrac{\sqrt{2x + 1}}{3x^2 - 5x + 2}$.

Giải

a. Để A có nghĩa, điều kiện là:

$5x + 10 > 0 \Leftrightarrow x > -2.$

Vậy, với $x > -2$ thì A có nghĩa.

b. Để B có nghĩa, điều kiện là:

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x \neq 1; x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy, với $x \geq -\dfrac{1}{2}$ và $x \neq 1$; $x \neq \dfrac{2}{3}$ thì B có nghĩa.

Ví dụ 3. Tìm các giá trị của x để biểu thức sau có nghĩa:

a. $A = \sqrt{x^2 - 36}$.　　　　c. $C = \sqrt{\dfrac{2 - x}{x - 3}}$.

b. $B = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

Giải

a. Để A có nghĩa, điều kiện là:

$x^2 - 36 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 6^2 \Leftrightarrow |x| \geq 6.$

Vậy, với $|x| \geq 6$ thì A có nghĩa.

b. Để B có nghĩa, điều kiện là:

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x-2| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 \geq 1 \\ x - 2 \leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{array}\right.$$

Vậy, với $x \geq 3$ hoặc $x \leq 1$ thì B có nghĩa.

c. Để C có nghĩa, điều kiện là:

$$\frac{2-x}{x-3} \geq 0$$

ta đi lập bảng xét dấu, dựa trên:

$$2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

như sau:

x		2		3	
$2-x$	+	0	–	|	–
$x-3$	–	|	–	0	+
$\frac{2-x}{x-3}$	–	0	+	||	–

Từ đó, suy ra:

$$\frac{2-x}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x < 3.$$

Vậy, với $2 \leq x < 3$ thì C có nghĩa.

Ví dụ 4. Tính:

a. $\sqrt{(0,09)^2}$.

b. $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$.

c. $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$.

d. $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

Giải

a. Ta có:

$$\sqrt{(0,09)^2} = |0,09| = 0,09.$$

b. Ta có:

$$\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}.$$

c. Ta có:

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1, \text{ vì } \sqrt{2}-1>0.$$

d. Ta có:

$$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}, \text{ vì } 2-\sqrt{3}<0.$$

Ví dụ 5. Tính:

a. $\sqrt{x^6}$.

b. $\sqrt{x^2-4x+4}$

c. $x+\sqrt{x^2-2x+1}$.

d. $x+y+\sqrt{(x-y)^2}$.

Giải

a. Ta có:

$$\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3| = \begin{cases} x^3 \text{ nếu } x^3 \ge 0 \\ -x^3 \text{ nếu } x^3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 \text{ nếu } x \ge 0 \\ -x^3 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}.$$

b. Ta có:

$$\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

$$= \begin{cases} x-2 \text{ nếu } x-2 \ge 0 \\ -(x-2) \text{ nếu } x-2<0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 \text{ nếu } x \ge 2 \\ 2-x \text{ nếu } x<2 \end{cases}.$$

c. Ta có:

$$x+\sqrt{x^2-2x+1} = x+\sqrt{(x-1)^2} = x+|x-1|$$

$$= \begin{cases} x+x-1 \quad \text{nếu } x-1 \ge 0 \\ x-(x-1) \text{ nếu } x-1<0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 \text{ nếu } x \ge 1 \\ 1 \quad\quad \text{nếu } x<1 \end{cases}.$$

d. Ta có:

$$x+y+\sqrt{(x-y)^2} = x+y+|x-y|$$

$$= \begin{cases} x+y+x-y \quad \text{nếu } x-y \ge 0 \\ x+y-(x-y) \text{ nếu } x-y<0 \end{cases} = \begin{cases} 2x \text{ nếu } x \ge y \\ 2y \text{ nếu } x<y \end{cases}.$$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} \text{ nếu } x \ge 2 \\ 2 \quad\quad \text{nếu } 1 \le x < 2 \end{cases}.$$

Giải

Ta có:

$$P = \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1|$$

$$= \begin{cases} \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1 \text{ nếu } \sqrt{x-1}-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1 \text{ nếu } \sqrt{x-1}-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & \text{nếu } \sqrt{x-1} \geq 1 \\ 2 & \text{nếu } \sqrt{x-1} < 1 \end{cases} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & \text{nếu } x-1 \geq 1 \\ 2 & \text{nếu } 0 \leq x-1 < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & \text{nếu } x \geq 2 \\ 2 & \text{nếu } 1 \leq x < 2 \end{cases}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 7. Cho biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{9x^2-6x+1}}{9x^2-1}.$$

a. Tìm tập xác định của A.

b. Rút gọn biểu thức A.

c. Tính giá trị của A tại x = 1.

d. Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{3}$.

e. Tìm giá trị của x để A < 0.

Giải

a. Điều kiện để biểu thức A có nghĩa:

$$\begin{cases} 9x^2-6x+1 \geq 0 \\ 9x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-1)^2 \geq 0 \\ (3x-1)(3x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{1}{3}.$$

b. Ta có:

$$A = \frac{\sqrt{9x^2-6x+1}}{9x^2-1} = \frac{\sqrt{(3x-1)^2}}{9x^2-1} = \frac{|3x-1|}{(3x-1)(3x+1)}.$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{3x+1} & \text{nếu } 3x-1>0 \\ \dfrac{-1}{3x+1} & \text{nếu } 3x-1<0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{3x+1} & \text{nếu } x > \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-1}{3x+1} & \text{nếu } x < \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

c. Với $x = 1 > \frac{1}{3}$, ta được:

$$A = \frac{1}{3.1+1} = \frac{1}{4}.$$

d. Để $A = \frac{1}{3}$, ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu

$$\begin{cases} \frac{1}{3x+1} = \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 3x+1 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Trường hợp 2: Nếu

$$\begin{cases} \frac{-1}{3x+1} = \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 3x+1 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}.$$

Vậy, với $x = \frac{2}{3}$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$ thì $A = \frac{1}{3}$.

e. Ta có:

$$A < 0 \Leftrightarrow \frac{|3x-1|}{9x^2-1} < 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \neq 0 \\ 9x^2-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}.$$

Vậy, với $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ thì $A < 0$.

Chú ý: Ở câu này ta có thể làm cách khác nhanh hơn nhờ việc đánh giá được:

$$|3x-1| > 0 \quad (\text{TXĐ: } x \neq \pm\frac{1}{3})$$

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow 9x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Tổng quát: Trong trường hợp bất phương trình tích phức tạp ta có thể lập bảng xét dấu.

Ví dụ 8.

a. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} \geq \sqrt{(a+b)^2}.$$

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{(2006-x)^2} + \sqrt{(2005-x)^2}.$$

Giải

a. Xét bất đẳng thức, vì hai vế không âm nên bình phương hai vế ta được:

$$a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2}.\sqrt{b^2} \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow 2|a.b| \geq 2ab, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, bất đẳng thức được chứng minh và dấu " = " xảy ra khi:

$a.b \geq 0$, tức là khi a và b cùng dấu.

b. Ta viết:

$$A = \sqrt{(2006-x)^2} + \sqrt{(x-2005)^2} \geq \sqrt{(2006-x+x-2005)^2} = 1.$$

Vậy, $A_{Min} = 1$, đạt được khi:

$(2006 - x)(2005 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2005 \leq x \leq 2006.$

Nhận xét: Trong câu a), chúng ta đã sử dụng phép bình phương để khử căn, rồi từ đó nhận được bất đẳng thức đúng. Tuy nhiên, ta cũng có thể chứng minh bằng cách biến đổi:

$$\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} \geq \sqrt{(a+b)^2} \Leftrightarrow |a| + |b| \geq |a+b|$$

Ta thấy ngay, bất đẳng thức trên luôn đúng (vì đã được chứng minh trong phần bất đẳng thức chứa dấu trị tuyệt đối).

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} = 2.$ b. $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1.$

Giải

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x} - 1| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x} - 1 = 2\\ \sqrt{x} - 1 = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x} = 3\\ \sqrt{x} = -1 \text{ vô nghiệm}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = 9.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 9.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1} = \sqrt{x-1} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = \sqrt{x-1} - 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1} - 1| = \sqrt{x-1} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x \geq 2$.

Ví dụ 10. Tìm x, biết:

a. $\sqrt{x-2}+2=x$.

b. $\sqrt{x-1}+1\le x$.

Giải

a. Điều kiện có nghĩa:

$$x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-2}=x-2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=(\sqrt{x-2})^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=0\\ \sqrt{x-2}-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=0\\ \sqrt{x-2}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=3\end{array}\right., \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 3$.

b. Điều kiện có nghĩa:

$$x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1. \qquad (*)$$

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-1}\le x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\le(\sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=0\\ \sqrt{x-1}-1\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=0\\ \sqrt{x-1}\ge 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x\ge 2\end{array}\right., \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x = 1$ hoặc $x \ge 2$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu định nghĩa giá trị tuyệt đối của a. Áp dụng để tính $|2x-5|$.

Câu hỏi 2: Viết điều kiện của A để $\sqrt{A}$ có nghĩa.

Câu hỏi 3: Viết hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$. Áp dụng để tính $\sqrt{(2x-1)^2}$.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm tập xác định của các biểu thức.

a. $A=\sqrt{5x+40}$.

b. $B=\dfrac{2x^2+3x+1}{\sqrt{x^2-4}}$

c. $C=\dfrac{\sqrt{2x+4}}{x^2-6x+9}$

d. $D=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+123}}$

Bài tập 2. Rút gọn biểu thức:

a. $A = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x + 3}}{x^2 - 3}$.

b. $B = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\sqrt{x - 2}}$

c. $C = \dfrac{\sqrt{(x - 4)^2}}{x^2 - 5x + 4}$

d. $D = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{9x^2 + 6x + 1}}$

Bài tập 3. Giải phương trình:

a. $\sqrt{x + 2\sqrt{x} + 1} = 3$.

b. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 1 - 2x$.

c. $\sqrt{x - 2\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 1$.

d. $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 2} - 1} = \sqrt{x - 2} - 1$.

Bài tập 4. Cho biểu thức:

$$A = 6x - 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tính giá trị biểu thức A với x = 5.

c. Tìm giá trị của x để biểu thức A = 1.

Bài tập 5. Cho biểu thức:

$$A = x + 8 - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tính giá trị biểu thức A với x = – 1.

c. Tìm giá trị của x để biểu thức A = 0.

Bài tập 6. Tìm x, biết:

a. $\sqrt{2x - 1} + 1 = 2x$.

b. $\sqrt{3x - 2} + 4 \le 6x$.

Bài tập 7. Giải phương trình:

a. $\sqrt{x^2 - 5x + 8} = 2$.

b. $\sqrt{x + 1} - \sqrt{2 - x} = 0$.

Bài tập 8. Giải phương trình:

a. $\sqrt{x^2 - x + 1} = x + 1$.

b. $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x + 5$.

Bài tập 9. Giải phương trình:

a. $5\sqrt{x - 2} = x + 2$.

b. $3\sqrt{2x - 1} = 2x - 5$.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1: Tìm tập xác định của các biểu thức.

a. Để A có nghĩa:

$$5x + 40 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -8.$$

Vậy, TXĐ: $x \geq -8$.

b. Để B có nghĩa:

$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right..$$

Vậy, TXĐ: $|x| > 2$.

c. Để C có nghĩa:

$$\begin{cases} 2x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \neq 3.$$

Vậy, TXĐ: $-2 \leq x \neq 3$.

d. Để D có nghĩa:

$$x^2 + 123 \neq 0, \forall x$$

Vậy, TXĐ: $x \in \mathbf{R}$.

Bài tập 2:

a. TXĐ:

$$x^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{3}.$$

Ta có:

$$A = \frac{\sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x + 3}}{x^2 - 3} = \frac{\sqrt{(x + \sqrt{3})^2}}{x^2 - 3} = \frac{|x + \sqrt{3}|}{x^2 - 3}.$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x + \sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow x > -\sqrt{3}$.

Ta được:

$$A = \frac{x + \sqrt{3}}{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})} = \frac{1}{x - \sqrt{3}}.$$

Trường hợp 2: Nếu $x + \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{3}$.

Ta được:

$$A = \frac{-(x+\sqrt{3})}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})} = -\frac{1}{x-\sqrt{3}}.$$

b. TXĐ:

$x \geq 2$.

Ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{(x-2)(x-3)}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-3}.$$

c. TXĐ:

$x^2 - 5x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, x \neq 4$.

Ta có:

$$C = \frac{\sqrt{(x-4)^2}}{x^2-5x+4} = \frac{\sqrt{(x-4)^2}}{(x-1)(x-4)} = \frac{|x-4|}{(x-1)(x-4)}.$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

Ta được:

$$C = \frac{x-4}{(x-1)(x-4)} = \frac{1}{x-1}.$$

Trường hợp 2: Nếu $x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$.

Ta được:

$$C = \frac{-(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \frac{-1}{x-1}.$$

d. TXĐ:

$\forall x \in \mathbf{R}\backslash\{-1/3\}$ (do $9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2 \geq 0$).

Ta có:

$$D = \frac{3x+1}{\sqrt{9x^2+6x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{(3x+1)^2}} = \frac{3x+1}{|3x+1|}.$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$.

Ta được:

$$D = \frac{3x+1}{3x+1} = 1.$$

Trường hợp 2: Nếu $3x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$.

Ta được:

$$D = \frac{3x+1}{-(3x+1)} = -1.$$

Bài tập 3:

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2} = 3 \Leftrightarrow |\sqrt{x} + 1| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 4$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(2x-1)^2} = 1-2x \Leftrightarrow |2x-1| = 1 - 2x \Leftrightarrow 1 - 2x \le 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x \ge \frac{1}{2}$.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow |\sqrt{x} - 1| = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x \ge 1$.

d. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-2-2\sqrt{x-2}+1} = \sqrt{x-2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2} = \sqrt{x-2} - 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2} - 1| = \sqrt{x-2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow x - 2 \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x \ge 3$.

Bài tập 4:

a. Điều kiện $\forall x \in \mathbf{R}$ do:

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

Ta có:

$$A = 6x - 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 6x - 1 + \sqrt{(x-2)^2}$$

$$= 6x - 1 + |x - 2| =$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Ta được:

$$A = 6x - 1 + x - 2 = 7x - 3.$$

Trường hợp 2: Nếu $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Ta được:

$$A = 6x - 1 - (x - 2) = 5x + 1.$$

b. Với $x = 5$, ta có:

$$A = 7 . 5 - 3 = 32.$$

c. Để $A = 1$, ta có:

Trường hợp 1: Với $x \geq 2$ thì

$$7x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}, \text{ không thoả mãn.}$$

Trường hợp 2: Với $x < 2$ thì

$$5x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0, \text{ thoả mãn.}$$

Vậy, $x = 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 5:

a. Điều kiện:

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Ta có:

$$A = x + 8 - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = x + 8 - \sqrt{(x-3)^2} = x + 8 - |x - 3|$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Ta được:

$$A = x + 8 - (x - 3) = 11.$$

Trường hợp 2: Nếu $x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$.

Ta được:

$$A = x + 8 - (3 - x) = 2x + 5.$$

b. Với $x = 3$, ta được $A = 11$.

c. Để $A = 0$ với $x < 3$, ta có:

$$2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

Vậy, $x = \frac{5}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 6:

a. Điều kiện có nghĩa:

$$2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{2x-1} = 2x-1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = (\sqrt{2x-1})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}\,(\sqrt{x-2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x-1} = 0 \\ \sqrt{2x-1} - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 0 \\ \sqrt{2x-1} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right., \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \frac{1}{2}$ và $x = 1$.

b. Điều kiện có nghĩa:

$$3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}. \qquad (*)$$

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{3x-2} \leq 2(3x-2) \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} \leq 2(\sqrt{3x-2})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}\,(2\sqrt{3x-2} - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x-2} = 0 \\ 2\sqrt{3x-2} - 1 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 2 = 0 \\ \sqrt{3x-2} \geq \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ x \geq 3/4 \end{array}\right., \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x = \frac{2}{3}$ hoặc $x \geq \frac{3}{4}$.

Bài tập 7:

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.

Điều kiện: $\forall x \in \mathbf{R}$ do

$$x^2 - 5x + 8 = (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq 0.$$

Ta có:

$$\sqrt{x^2 - 5x + 8} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 8} = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 8 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 4$.

Cách 2: Giải theo kiểu biến đổi tương đương.

$$x^2 - 5x + 8 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 4$.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Ta có:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 2 - x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Cách 2: Giải theo kiểu biến đổi tương đương.

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow x + 1 = 2 - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 1 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Bài tập 8:

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.

Điều kiện $\forall x \in \mathbf{R}$ do:

$$x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 0.$$

Ta có:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = (x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = 0$.

Cách 2: Giải theo kiểu biến đổi tương đương.

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - x + 1 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = 0$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.

Điều kiện $\forall x \in \mathbf{R}$ do:

$$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 \geq 0.$$

Ta có:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = (x + 5)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = x^2 + 10x + 25 \Leftrightarrow 12x = -22 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6}.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = -\frac{11}{6}$.

Cách 2: Giải theo kiểu biến đổi tương đương.

$$\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 3 = (x + 5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ 12x = -22 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6}.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm $x = -\frac{11}{6}$.

Bài tập 9: Đề nghị các em học sinh giải theo hai cách đã biết:

Cách 1: Giải theo kiểu đặt điều kiện có nghĩa rồi biến đổi.

Cách 2: Giải theo kiểu biến đổi tương đương.

Ở đây trình bày theo cách đặt ẩn phụ để các em làm quen.

a. Điều kiện có nghĩa:

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x - 2 - 5\sqrt{x-2} + 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x-2})^2 - 5\sqrt{x-2} + 4 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{x-2}$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{x-2} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 18 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 3$ và $x = 18$.

b. Điều kiện có nghĩa:

$$2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$2x - 1 - 3\sqrt{2x-1} - 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1})^2 - 3\sqrt{2x-1} - 4 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{2x-1}$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó phương trình (1) có dạng:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ loại} \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 4 \Leftrightarrow 2x - 1 = 16 \Leftrightarrow x = \frac{17}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{17}{2}$.

CHỦ ĐỀ 3 LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. MỞ ĐẦU

Chúng ta bắt đầu với phép so sánh $\sqrt{4.16}$ và $\sqrt{4}.\sqrt{16}$.

Ta có:

$$\sqrt{4.16} = \sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$$

$$\sqrt{4}.\sqrt{16} = \sqrt{2^2}.\sqrt{4^2} = 2.4 = 8$$

tức là, ta có:

$$\sqrt{4.16} = \sqrt{4}.\sqrt{16}$$

Tổng quát hoá, ta có:

> *Với $A \geq 0, B \geq 0$ thì:*
>
> $$\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}.$$

Kết quả trên cho phép chúng ta phát biểu được hai quy tắc theo hai chiều của biểu thức trên.

2. KHAI PHƯƠNG MỘT TÍCH

Ta có quy tắc:

> ***Quy tắc khai phương một tích**: Muốn khai phương một tích các biểu thức không âm, ta có thể khai phương từng biểu thức rồi nhân kết quả với nhau.*

Thí dụ 1: Sử dụng quy tắc khai phương một tích, tính:

a. $\sqrt{25.49}$. c. $\sqrt{27.48}$.

b. $\sqrt{9.16.36}$. d. $\sqrt{81a^2}$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$\sqrt{25.49} = \sqrt{25}.\sqrt{49} = 5.7 = 35.$$

b. Ta có ngay:

$$\sqrt{9.16.36} = \sqrt{9}.\sqrt{16}.\sqrt{36} = 3.4.6 = 72.$$

c. Ta viết lại:

$$\sqrt{27.48} = \sqrt{27.3.16} = \sqrt{81.16} = 9.4 = 36.$$

d. Ta có ngay:

$$\sqrt{81a^2} = \sqrt{81}.\sqrt{a^2} = 9.|a|.$$

Nhận xét: Trong câu c), nếu chúng ta vận dụng một cách máy móc quy tắc khai phương một tích sẽ không nhận được kết quả gọn.

3. NHÂN CÁC CĂN THỨC BẬC HAI

Ta có quy tắc:

Quy tắc nhân các căn thức bậc hai*: Muốn nhân các căn thức bậc hai của các biểu thức không âm ta có thể nhân các biểu thức dưới dấu căn với nhau rồi lấy căn bậc hai của kết quả đó.*

Thí dụ 2: Sử dụng quy tắc nhân các căn thức bậc hai, tính:

a. $\sqrt{2}.\sqrt{18}$.

b. $\sqrt{1,1}.\sqrt{44}.\sqrt{10}$.

c. $\sqrt{\sqrt{2}-1}.\sqrt{\sqrt{2}+1}$.

d. $\sqrt{27a}.\sqrt{3a}$, với $a > 0$.

Giải

a. Ta có:

$$\sqrt{2}.\sqrt{18} = \sqrt{2.18} = \sqrt{36} = 6.$$

b. Ta có:

$$\sqrt{1,1}.\sqrt{44}.\sqrt{10} = \sqrt{1,1.44.10} = \sqrt{11.11.4} = 22.$$

c. Ta có:

$$\sqrt{\sqrt{2}-1}.\sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2-1} = 1.$$

d. Ta có:

$$\sqrt{27a}.\sqrt{3a} = \sqrt{81a^2} = 9|a| = 9a, \text{ do } a > 0.$$

Nhận xét: Trong câu c), chúng ta đã sử dụng hằng đẳng thức:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a. $\sqrt{a^4(3-a)^2}$, với $a \geq 3$.

b. $\frac{1}{a-b}.\sqrt{a^6(a-b)^2}$, với $a < b < 0$.

Giải

a. Ta có:

$$\sqrt{a^4(3-a)^2} = \sqrt{a^4}.\sqrt{(3-a)^2} = a^2.|3 - a| \overset{a\geq 3}{=} a^2(a - 3).$$

b. Ta có:

$$\frac{1}{a-b}.\sqrt{a^6(a-b)^2} = \frac{1}{a-b}.\sqrt{a^6}.\sqrt{(a-b)^2} = \frac{1}{a-b}.|\,a^3\,|\,.\,|a-b|$$

$$\overset{a<b<0}{=} \frac{1}{a-b}.(-a^3)\,.\,(b-a) = a^3.$$

Ví dụ 2. Thực hiện phép tính:

a. $A = (\sqrt{8} + \sqrt{72} - \sqrt{2})\sqrt{2}$.

b. $B = (\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}})^2$.

c. $C = (3\sqrt{5} + \sqrt{2})(3\sqrt{5} - \sqrt{2})$.

Giải

a. Ta có:

$$A = \sqrt{8}\,.\sqrt{2} + \sqrt{72}\,.\sqrt{2} - \sqrt{2}\,.\sqrt{2} = \sqrt{16} + \sqrt{144} - 2$$
$$= 4 + 12 - 2 = 14$$

b. Ta có:

$$B = \left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2 - 2\sqrt{4+\sqrt{7}}.\sqrt{4-\sqrt{7}} + \left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$$

$$= 4 + \sqrt{7} - 2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})} + 4 - \sqrt{7}$$

$$= 8 - 2\sqrt{16-7} = 8 - 2.3 = 2.$$

c. Ta có:

$$C = (3\sqrt{5})^2 - 2 = 45 - 2 = 43.$$

Nhận xét: Như vậy, trong câu c), bằng việc sử dụng hằng đẳng thức chúng ta đã giảm được đáng kể độ phức tạp.

Ví dụ 3. Tính:

a. $A = 1 - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$.

b. $B = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}}$.

c. $C = \sqrt{2x + 2\sqrt{2x - 1}}$.

d. $D = \sqrt{117^2 - 108^2}$.

Giải

a. Ta có:

$$A = 1 - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = 1 - \sqrt{6 + 2\sqrt{6}\sqrt{1} + 1} = 1 - \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{6} + 1}$$

$$= 1 - \sqrt{(\sqrt{6} + 1)^2} = 1 - (\sqrt{6} + 1) = -\sqrt{6}.$$

b. Ta có:

$$B = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{3}\sqrt{4} + 4} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{4} + (\sqrt{4})^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{4})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{4}| = 2 - \sqrt{3}$$

c. Ta có:

$$C = \sqrt{2x + 2\sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2x - 1 + 2\sqrt{2x - 1} + 1}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2x - 1} + 1)^2} = \sqrt{2x - 1} + 1.$$

d. Ta có:

$$D = \sqrt{(117 - 108)(117 + 108)} = \sqrt{9.225} = 3.15 = 45.$$

Chú ý: Các em học sinh cẩn thận trọng khi khai căn, nếu chưa chắc chắn thì phải có dấu trị tuyệt đối.

Ví dụ 4.

a. So sánh $\sqrt{16 + 4}$ với $\sqrt{16} + \sqrt{4}$.

b. Chứng minh rằng $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, với mọi a, b dương.

Giải

a. Nhận xét rằng:

$$(\sqrt{16 + 4})^2 = 20$$

$$(\sqrt{16} + \sqrt{4})^2 = (4 + 2)^2 = 36$$

suy ra:

$$(\sqrt{16 + 4})^2 < (\sqrt{16} + \sqrt{4})^2 \Rightarrow \sqrt{16 + 4} < \sqrt{16} + \sqrt{4}.$$

b. Hai vế của bất đẳng thức không âm nên bình phương hai vế, ta được:

$$(\sqrt{a+b})^2 \le (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow a + b \le a + b + 2\sqrt{a.b}$$

$$\Leftrightarrow 0 \le 2\sqrt{a.b}\text{, luôn đúng.}$$

Nhận xét: Cách đặt vấn đề của ví dụ trên, giúp chúng ta tiếp cận với bất đẳng thức trước khi đi chứng minh nó. Tuy nhiên, nếu đặt vấn đề theo kiểu ngược lại, chúng ta sẽ được quyền sử dụng bất đẳng thức này để đưa ra đánh giá cho phép so sánh.

Ví dụ 5.

a. Chứng minh bất đẳng thức:

$$|ac + bd| \le \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$ – *Bất đẳng thức Bunhiacôpxki.*

b. Biết $x^2 + y^2 = 52$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 3x + 2y.$$

Giải

a. Hai vế của bất đẳng thức không âm nên bình phương hai vế, ta được:

$$(ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd \le a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2d^2 - 2acbd \ge 0 \Leftrightarrow (bc - ad)^2 \ge 0\text{, luôn đúng.}$$

Dấu " = " xảy ra khi:

$$bc = ad \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

b. Nhận xét rằng:

$$|A| = |3x + 2y| \le \sqrt{(3^2 + 2^2)(x^2 + y^2)} = \sqrt{13.52} = 26$$

$$\Leftrightarrow -26 \le A \le 26.$$

Dấu " = " xảy ra khi:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = t \Leftrightarrow x = 3t \text{ và } y = 2t$$

do đó:

$$52 = x^2 + y^2 = (3t)^2 + (2t)^2 = 13t^2 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \text{ và } y = 4 \\ x = -6 \text{ và } y = -4 \end{array}\right.$$

Vậy, ta được:

- $A_{Max} = 26$, đạt được khi $x = 6$ và $y = 4$.
- $A_{Min} = -26$, đạt được khi $x = -6$ và $y = -4$.

Ví dụ 6. Cho biểu thức:

$$A = \frac{2x^2 - ax - 3a^2}{2x^2 - 5ax + 3a^2}.$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Chứng minh rằng $A = (a + \sqrt{a^2+1})^2$ khi $x = \sqrt{a^2+1}$

Giải

a. Ta có:

$$A = \frac{2x^2 - ax - 3a^2}{2x^2 - 5ax + 3a^2} = \frac{2x^2 + 2ax - 3ax - 3a^2}{2x^2 - 2ax - 3ax + 3a^2}$$

$$= \frac{2x(x+a) - 3a(x+a)}{2x(x-a) - 3a(x-a)} = \frac{(x+a)(2x-3a)}{(2x-3a)(x-a)} = \frac{x+a}{x-a}$$

b. Thay $x = \sqrt{a^2+1}$ vào $A = \dfrac{x+a}{x-a}$.

Ta có:

$$A = \frac{\sqrt{a^2+1}+a}{\sqrt{a^2+1}-a} = \frac{(\sqrt{a^2+1}+a)(\sqrt{a^2+1}+a)}{(\sqrt{a^2+1})^2 - a^2} = \frac{(\sqrt{a^2+1}+a)^2}{a^2+1-a^2}$$

$$= (a + \sqrt{a^2+1})^2 \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 7. Cho biểu thức:

$$A = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-1}{a-b}.$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tính giá trị của A, biết $a - b = 1$.

Giải

a. Nhận xét rằng:

$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b-\sqrt{ab})$$

do đó, biểu thức A, được biến đổi như sau:

$$A = \frac{a+b-\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b-\sqrt{ab})} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-1}{a-b}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-1}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-1}{a-b}$$

$$= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-(\sqrt{a}-\sqrt{b}-1)}{a-b} = \frac{1}{a-b}.$$

b. Với $a - b = 1$, ta suy ra $A = 1$.

Ví dụ 8. Cho hai biểu thức:

$$A = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \text{ và } B = \sqrt{x-1}.\sqrt{x-2}.$$

a. Tìm x để A có nghĩa.

b. Tìm x để B có nghĩa.

c. Với giá trị nào của x thì A = B ?

d. Với giá trị nào của x thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa ?

Giải

a. Viết lại A dưới dạng:

$$A = \sqrt{(x-1)(x-2)}.$$

Để A có nghĩa điều kiện là:

$$(x-1)(x-2) \geq 0$$

ta đi lập bảng xét dấu, dựa trên:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

như sau:

x		1		2	
x − 1	−	0	+	|	+
x − 2	−	|	−	0	+
(x−1)(x−2)	+	0	−	0	+

Từ đó, suy ra:

$$(x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ hoặc } x \geq 2.$$

Vậy, với $x \leq 1$ hoặc $x \geq 2$ thì A có nghĩa.

b. Để B có nghĩa điều kiện là:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Vậy, với $x \geq 2$ thì B có nghĩa.

c. Để có A = B, tức là:

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} = \sqrt{x-1}.\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Vậy, với $x \geq 2$ thì A = B.

d. Ta có ngay, với $x \leq 1$ thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa.

Ví dụ 9. Cho a, b, c và a', b', c' là số đo các cạnh tương ứng của hai tam giác đồng dạng. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}.$$

Giải

Giả sử hai tam giác đồng dạng với tỉ số k, suy ra:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k \Leftrightarrow a' = ka,\ b' = kb,\ c' = kc.$$

Khi đó, ta biến đổi được đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$\sqrt{ka^2} + \sqrt{kb^2} + \sqrt{kc^2} = \sqrt{(a+b+c)(ka+kb+kc)}$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{k} + b\sqrt{k} + c\sqrt{k} = \sqrt{k(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k}\,(a+b+c) = \sqrt{k}\,(a+b+c),\ \text{luôn đúng.}$$

Nhận xét:

1. Như vậy, trong lời giải trên để chứng minh đẳng thức chúng ta đã sử dụng cách " *Biến đổi tương đương đẳng thức về một đẳng thức đúng* ". Tuy nhiên, ta cũng có thể sử dụng cách biến đổi một vế thành vế còn lại, cụ thể:

$$\begin{aligned}\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} &= \sqrt{ka^2} + \sqrt{kb^2} + \sqrt{kc^2}\\ &= a\sqrt{k} + b\sqrt{k} + c\sqrt{k} = \sqrt{k}\,(a+b+c)\\ &= \sqrt{k(a+b+c)^2} = \sqrt{(a+b+c)(ka+kb+kc)}\\ &= \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')},\ \text{đpcm.}\end{aligned}$$

2. Qua cách biến đổi trên, chúng ta thấy ngay rằng việc sử dụng quy tắc khai phương một tích có thể giúp làm xuất hiện nhân tử chung trong một biểu thức. Nhận định này sẽ giúp chúng ta trong việc biến đổi biểu thức về dạng tích và được sử dụng nhiều trong dạng toán " *Giải phương trình chứa căn bậc hai* ".

Ví dụ 10. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{x^2-9} - \sqrt{x-3} = 0.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 9 \ge 0 \\ x - 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ge 9 \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-3}.\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3}\,(\sqrt{x+3}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-3}=0\\ \sqrt{x+3}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3=0\\ x+3=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-2\text{(loại)}\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 3$.

Nhận xét: Như chúng ta đã biết, phương trình trên còn có thể được giải bằng phương pháp biến đổi tương đương, cụ thể:

$$\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x-3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-9}=\sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-3\ge 0\\ x^2-9=x-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\ (x-3)(x+3)=x-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\ (x-3)(x+3-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\ x=3 \text{hoặc } x=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 3$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng $\sqrt{A.B}=\sqrt{A}.\sqrt{B}$ với A, B không âm.

Câu hỏi 2: Phát biểu quy tắc khai phương một tích. Lấy ví dụ minh hoạ.

Câu hỏi 3: Phát biểu quy tắc nhân các căn thức bậc hai. Lấy ví dụ minh hoạ.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính:

a. $\sqrt{49.100}$.

b. $\sqrt{2^4.(-9)^2}$.

c. $\sqrt{72.32}$.

d. $\sqrt{12,1.490}$.

Bài tập 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a. $\sqrt{27.48(a-3)^2}$.

b. $\sqrt{48.75a^2}$.

Bài tập 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a. $\sqrt{a}.\sqrt{\dfrac{9}{a}}$, với $a > 0$.

b. $\sqrt{8a^2}.\sqrt{18a^4}$, với $a < 0$.

Bài tập 4. Thực hiện phép tính:

a. $A = \sqrt{72}.\sqrt{18}$.

b. $B = \sqrt{\frac{25}{7}}.\sqrt{\frac{7}{16}}$.

c. $C = \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}\right)\sqrt{2}$.

Bài tập 5. Thực hiện phép tính:

a. $A = (\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - 1)$.

b. $B = (\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3})(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3})$.

c. $C = \left(\sqrt{4 - \sqrt{3}} - \sqrt{4 + \sqrt{3}}\right)^2$.

Bài tập 6. Chứng minh các đẳng thức:

a. $\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{8 + 2\sqrt{5}}$.

b. $\sqrt{5} + 2 = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

Bài tập 7. Cho $a > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a} + 1 > \sqrt{a + 1}.$$

Bài tập 8. Cho $a \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a - 1} < \sqrt{a}.$$

Bài tập 9. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{6} - 1 > \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Bài tập 10. Tính giá trị của biểu thức:

a. $A = x^2 + 2x + 16$ với $x = \sqrt{2} - 1$.

b. $B = x^2 + 12x - 14$ với $x = 5\sqrt{2} - 6$.

Bài tập 11. Cho hai biểu thức:

$$A = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \text{ và } B = \sqrt{x - 1}.\sqrt{2x - 1}.$$

a. Tìm x để A có nghĩa.

b. Tìm x để B có nghĩa.

c. Với giá trị nào của x thì A = B ?

d. Với giá trị nào của x thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa ?

Bài tập 12. Biết $x^2 + y^2 = 117$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = 2x + 3y$.

Bài tập 13. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là một nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}.$$

Bài tập 14. Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{3x+2}{\sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2}$.   b. $\sqrt{4x^2-1} - 2\sqrt{2x+1} = 0$.

Bài tập 15. Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4x-8} - \dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{25x-50}{4}} = 4$.

b. $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. 70.   c. 48.

b. 36   d. 77.

Bài tập 2:

a. $36|a-3|$.   b. $60|a|$.

Bài tập 3:

a. Ta biến đổi:

$$\sqrt{a}.\sqrt{\frac{9}{a}} = \sqrt{a.\frac{9}{a}} = \sqrt{9} = 3.$$

b. Ta biến đổi:

$$\sqrt{8a^2}.\sqrt{18a^4} = \sqrt{8a^2.18a^4} = \sqrt{144.a^6} = 12.|a^3| \overset{a<0}{=} -12a^3.$$

Bài tập 4:

a. Ta có:

$$A = \sqrt{72}.\sqrt{18} = \sqrt{8.9.2.9} = \sqrt{4.4.9.9} = 4.9 = 36.$$

b. Ta có:

$$B = \sqrt{\frac{25}{7}}.\sqrt{\frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{25}{7}.\frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}.$$

c. Ta có:

$$C = \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}\right)\sqrt{2} = \sqrt{2}.\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}.\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{\frac{9.2}{2}} + \sqrt{\frac{3.2}{2}} - \sqrt{2.2} = \sqrt{9} + \sqrt{3} - 2 = 1 + \sqrt{3}.$$

Bài tập 5:

a. Ta có:

$$A = (\sqrt{5} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - 1)$$
$$= \sqrt{5}.\sqrt{5} + \sqrt{5}.\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{5} - \sqrt{2} - 1$$
$$= 5 + \sqrt{10} - \sqrt{2} - 1 = 4 + \sqrt{10} - \sqrt{2}.$$

b. Ta có:

$$B = (\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3})(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3})$$
$$= (\sqrt{2} + 1)^2 - (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 - 3 = 2\sqrt{2}.$$

c. Ta có:

$$C = \left(\sqrt{4 - \sqrt{3}} - \sqrt{4 + \sqrt{3}}\right)^2$$
$$= 4 - \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} - 2\sqrt{4 - \sqrt{3}}\sqrt{4 + \sqrt{3}}$$
$$= 8 - 2\sqrt{(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})} = 8 - \sqrt{16 - 3} = 8 - \sqrt{13}.$$

Bài tập 6:

a. Ta có:

$$VT = \sqrt{8 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{3 + 5 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{5} = VP$$

b. Ta có:

$$VT = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{4 + 5 + 2.2\sqrt{5}} = \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2}$$
$$= \sqrt{5} + 2 = VP.$$

Bài tập 7: Với $a > 0$, ta có:

$$(\sqrt{a} + 1)^2 = a + 2\sqrt{a} + 1;$$
$$(\sqrt{a + 1})^2 = a + 1.$$

Nhận thấy:

$$a + 1 + 2\sqrt{a} > a + 1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} + 1)^2 > (\sqrt{a + 1})^2.$$

Vậy, $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{a + 1}$.

Bài tập 8: Với $a \geq 1$, ta có:

$$(\sqrt{a - 1})^2 = a - 1;$$
$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Nhận thấy:

$$a > a - 1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a-1})^2 < (\sqrt{a})^2.$$

Vậy, $\sqrt{a-1} < \sqrt{a}$.

Bài tập 9: Ta có:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 + 2 - 2.\sqrt{3}.\sqrt{2} = 5 - 2\sqrt{6};$$

$$(\sqrt{6} - 1)^2 = 1 + 6 - 2.\sqrt{6} = 7 - 2\sqrt{6}.$$

Dễ thấy, $5 - 2\sqrt{6} < 7 - 2\sqrt{6}$.

Vậy, $\sqrt{6} - 1 > \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Bài tập 10:

a. Thay $x = \sqrt{2} - 1$ vào A, ta được:

$$A = (\sqrt{2} - 1)^2 + 2(\sqrt{2} - 1) + 16 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} - 2 + 16 = 17.$$

b. Thay $x = 5\sqrt{2} - 6$ vào B, ta được:

$$B = (5\sqrt{2} - 6)^2 + 12(5\sqrt{2} - 6) - 14$$

$$= 50 - 60\sqrt{2} + 36 + 60\sqrt{2} - 72 - 14 = 0.$$

Bài tập 11:

a. Viết lại A dưới dạng:

$$A = \sqrt{(x-1)(2x-1)}.$$

Để A có nghĩa điều kiện là:

$$(x - 1)(2x - 1) \geq 0$$

ta đi lập bảng xét dấu, dựa trên:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

như sau:

x		1/2		1	
x – 1	–	|	–	0	+
2x – 1	–	0	+	|	+
(x–1)(x–2)	+	0	–	0	+

Từ đó, suy ra:

$$(x - 1)(2x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \text{ hoặc } x \geq 1.$$

Vậy, với $x \leq \frac{1}{2}$ hoặc $x \geq 1$ thì A có nghĩa.

b. Để B có nghĩa điều kiện là:

$$\begin{cases} x-1\ge 0 \\ 2x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1.$$

Vậy, với $x \ge 1$ thì B có nghĩa.

c. Để có A = B, tức là:

$$\sqrt{2x^2-3x+1}=\sqrt{x-1}.\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ 2x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1.$$

Vậy, với $x \ge 1$ thì A = B.

d. Ta có ngay, với $x \le \dfrac{1}{2}$ thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa.

Bài tập 12: Nhận xét rằng:

$$|A| = |2x+3y| \le \sqrt{(2^2+3^2)(x^2+y^2)} = \sqrt{13.117} = 39$$

$$\Leftrightarrow -39 \le A \le 39.$$

Dấu " = " xảy ra khi:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=t \Leftrightarrow x=2t \text{ và } y=3t$$

do đó:

$$117=x^2+y^2=(2t)^2+(3t)^2=13t^2 \Leftrightarrow t^2=9 \Leftrightarrow t=\pm 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \text{ và } y=9 \\ x=-6 \text{ và } y=-9 \end{array}\right.$$

Vậy, ta được:

- $A_{Max} = 39$, đạt được khi $x = 6$ và $y = 9$.
- $A_{Min} = -39$, đạt được khi $x = -6$ và $y = -9$.

Bài tập 13:

- Ta có:

$$(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})^2$$
$$=(1.\sqrt{p-a}+1.\sqrt{p-b}+1.\sqrt{p-c})^2$$
$$\le (1^2+1^2+1^2)(p-a+p-b+p-c)=3p$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{\sqrt{p-a}}{1} = \frac{\sqrt{p-b}}{1} = \frac{\sqrt{p-c}}{1} \Leftrightarrow a = b = c.$$

- Ta đi chứng minh

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$$

bằng phép biến đổi tương đương, cụ thể:

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$$

$$\Leftrightarrow p < p - a + p - b + p - c +$$

$$+ 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{(p-a)(p-b)} + 2\sqrt{(p-c)(p-a)} + 2\sqrt{(p-b)(p-c)}.$$

Bài tập 14:

a. **Điều kiện:**

$$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3x + 2 = 2(\sqrt{x+2})^2 \Leftrightarrow 3x + 2 = 2(x + 2) \Leftrightarrow x = 2, \text{ thoả mãn } (*)$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

b. **Điều kiện:**

$$\begin{cases} 4x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq \frac{1}{4} \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{2x-1}.\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{2x+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}(\sqrt{2x-1} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+1} = 0 \\ \sqrt{2x-1} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 0 \\ 2x - 1 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{array}\right., \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$ và $x = \frac{5}{2}$.

Bài tập 15:

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4(x-2)} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{4}(x-2)} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 2$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 6.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm x = 0.

CHỦ ĐỀ 4 LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. MỞ ĐẦU

Chúng ta bắt đầu với phép so sánh $\sqrt{\frac{4}{25}}$ và $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}$. Ta có:

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \sqrt{0,16} = 0,4 \text{ và } \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

tức là, ta có:

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}.$$

Tổng quát hoá, ta có:

> *Với $A \geq 0, B > 0$ thì:*
> $$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

Kết quả trên, cho phép chúng ta phát biểu được hai quy tắc theo hai chiều của biểu thức trên.

2. KHAI PHƯƠNG MỘT THƯƠNG

Ta có quy tắc sau:

> ***Quy tắc khai phương một thương**: Muốn khai phương một thương $\frac{A}{B}$ của hai biểu thức $A \geq 0$, $B > 0$, ta có thể khai phương lần lượt biểu thức bị chia A và biểu thức chia B. Sau đó lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.*

Thí dụ 1: Sử dụng quy tắc khai phương một thương, tính:

a. $\sqrt{\frac{16}{25}}$. b. $2\sqrt{\frac{9a^2}{4}}$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}.$$

b. Ta có ngay:

$$2\sqrt{\frac{9a^2}{4}} = 2.\frac{\sqrt{9a^2}}{\sqrt{4}} = 2.\frac{3|a|}{2} = 3|a| = \begin{cases} 3a \text{ nếu } a \geq 0 \\ -3a \text{ nếu } a < 0 \end{cases}.$$

Thí dụ 2: Sử dụng quy tắc khai phương một thương, tính:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}.\sqrt{\frac{a^6}{b^3}}, \text{ với } b > 0.$$

Giải

Trước hết ta sử dụng quy tắc nhân hai căn bậc hai, rồi biến đổi tiếp:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}.\sqrt{\frac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\frac{a^2}{b}.\frac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\frac{a^8}{b^4}} = \frac{a^4}{b^2}.$$

Nhận xét: Như vậy, nếu chúng ta vận dụng quy tắc khai phương một thương một cách máy móc sẽ không nhận được kết quả gọn.

3. CHIA HAI CĂN THỨC BẬC HAI

***Quy tắc chia hai căn thức bậc hai**: Muốn chia căn thức bậc hai của biểu thức không âm A cho căn thức bậc hai của biểu thức dương B, ta có thể chia biểu thức A cho biểu thức B rồi lấy căn bậc hai của thương đó.*

Thí dụ 3: Sử dụng quy tắc chia hai căn thức bậc hai, tính:

a. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}}$. b. $\dfrac{9\sqrt{2a^2b^4}}{\sqrt{18}}$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{2}{72}} = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}.$$

b. Ta có ngay:

$$\frac{9\sqrt{2a^2b^4}}{\sqrt{18}} = 9\sqrt{\frac{2a^2b^4}{18}} = 9\sqrt{\frac{a^2b^4}{9}} = = \frac{9|a|.b^2}{3}$$

$$= 3|a|.b^2 = \begin{cases} 3ab^2 \text{ nếu } a \geq 0 \\ -3ab^2 \text{ nếu } a < 0 \end{cases}.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính:

a. $A = \sqrt{72} : \sqrt{2}$.

b. $B = (\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3}$.

c. $C = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{15}$.

d. $D = \sqrt{27(1 - \sqrt{3})^2} : 3\sqrt{15}$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$A = \sqrt{72} : \sqrt{2} = \sqrt{72 : 2} = \sqrt{36} = 6.$$

b. Ta có ngay:

$$B = (\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}) : \sqrt{3} = \sqrt{12 : 3} - \sqrt{27 : 3} + \sqrt{3 : 3}$$

$$= \sqrt{4} - \sqrt{9} + 1 = 0.$$

c. Ta C viết dưới dạng:

$$C = (5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) : \sqrt{3}.\sqrt{5} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}.\sqrt{5}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}.$$

d. Ta D viết dưới dạng:

$$D = \frac{\sqrt{9.3(\sqrt{3} - 1)^2}}{3\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{3\sqrt{3}.\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{5}}.$$

Nhận xét:

1. Trong các câu a) và b), chúng ta thực hiện phép bằng bằng việc sử dụng ngay quy tắc chia hai căn thức bậc hai. Tuy nhiên, câu b) có thể thực hiện theo cách biến đổi:

$$\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3} = \sqrt{4}.\sqrt{3} - \sqrt{9}.\sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow B = 0.$$

2. Trong câu c), chúng ta thực hiện tách $\sqrt{15} = \sqrt{3}.\sqrt{5}$. Tuy nhiên, cũng có thể thực hiện như sau:

$$C = (\sqrt{5^2.3} + \sqrt{3^2.5}) : \sqrt{15} = \sqrt{\frac{5^2.3}{15}} + \sqrt{\frac{3^2.5}{15}}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{3}.$$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức:

a. $A = \dfrac{\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}{2 - \sqrt{5}}$. b. $B = \dfrac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$.

Giải

a. Ta có ngay:

$$A = \frac{\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}{2 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4 - 2.2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}}{2 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}}{2 - \sqrt{5}}$$

$$= \frac{|2 - \sqrt{5}|}{2 - \sqrt{5}} = -1.$$

b. Ta có ngay:

$$B = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5} + 1}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Chú ý: 1. Trong lời giải câu a), các em học sinh cần chú ý tới dấu của $2 - \sqrt{5} < 0$ để xác định được đúng giá trị cho A.

2. Trong lời giải câu b), bằng việc nhân cả tử và mẫu với 2 chúng ta đạt được hai mục đích:

- Mẫu số trở thành số chính phương.
- Tử số được biến đổi về dạng bình phương một nhị thức.

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức:

a. $A = ab^2\sqrt{\dfrac{3}{a^2b^4}}$. b. $B = b^5\sqrt{\dfrac{a^2 + 6a + 9}{b^8}}$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$A = ab^2.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2b^4}} = ab^2.\frac{\sqrt{3}}{|a|.b^2} = \begin{cases} \sqrt{3} \text{ nếu } a > 0 \\ -\sqrt{3} \text{ nếu } a < 0 \end{cases}.$$

b. Ta biến đổi:

$$B = b^5\sqrt{\frac{(a + 3)^2}{b^8}} = b^5.\frac{|a + 3|}{b^4} = b.|a + 3|$$

$$= \begin{cases} b(a + 3) \text{ nếu } a + 3 \geq 0 \\ -b(a + 3) \text{ nếu } a + 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} b(a + 3) \text{ nếu } a \geq -3 \\ -b(a + 3) \text{ nếu } a < -3 \end{cases}.$$

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức:

a. $A = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

b. $B = \dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$.

Giải

a. Ta có:

$$A = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$= (\sqrt{a}-\sqrt{b}) - (\sqrt{a}-\sqrt{b}) = 0.$$

b. Ta có:

$$B = \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x(\sqrt{x}+\sqrt{y})-y(\sqrt{y}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-y)} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

Nhận xét:

1. Trong lời giải câu a), chúng ta đã lựa chọn cách đơn giản từng biểu thức, dựa trên việc phân tách tử số thành các hằng đẳng thức. Tất nhiên, biểu thức cũng có thể được đơn giản bằng việc quy đồng mẫu số, xong cách giải này hẳn phức tạp hơn.
2. Trong lời giải câu b), chúng ta đánh giá được tử số là một hằng đẳng thức, tuy nhiên mẫu số không phải là hằng đẳng thức, do đó chúng ta sử dụng phương pháp nhóm số hạng để phân tích nó thành tích.

Ví dụ 5.

a. So sánh $\sqrt{25-16}$ với $\sqrt{25}-\sqrt{16}$.

b. Chứng minh rằng với $a > b > 0$ luôn có:

$$\sqrt{a-b} > \sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

Giải

a. Ta nhận thấy:

$$\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3 \text{ và } \sqrt{25}-\sqrt{16} = 5-4 = 1$$

suy ra $\sqrt{25-16} > \sqrt{25}-\sqrt{16}$.

b. Hai vế của bất đẳng thức không âm nên bình phương hai vế, ta được:

$$(\sqrt{a-b})^2 > (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \Leftrightarrow a-b > a+b-2\sqrt{a.b}$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{a.b} > 0$, luôn đúng với $a > b > 0$.

Nhận xét: Cách đặt vấn đề của ví dụ trên, giúp chúng ta tiếp cận với bất đẳng thức trước khi đi chứng minh nó. Tuy nhiên, nếu đặt vấn đề theo kiểu ngược lại, chúng ta sẽ được quyền sử dụng bất đẳng thức này để đưa ra đánh giá cho phép so sánh.

Ví dụ 6. Cho biểu thức:

$$A = \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^3}-x}{\sqrt{x}-1}.$$

a. Tìm điều kiện để biểu thức A có nghĩa.

b. Rút gọn biểu thức.

c. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \dfrac{53}{9-2\sqrt{7}}$.

Giải

a. Điều kiện để biểu thức A có nghĩa:

$$\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ \sqrt{x}-1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy, tập xác định của A là $x > 1$.

b. Ta có:

$$A = \frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})+(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})} + \frac{|x|(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{x-1}}{x-1-x} + x = -2\sqrt{x-1} + x = (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1$$

$$= (\sqrt{x-1}-1)^2.$$

c. Trước hết, ta đi đơn giản biểu thức giá trị của x, bằng cách:

$$x = \frac{53}{9-2\sqrt{7}} = \frac{53(9+2\sqrt{7})}{(9-2\sqrt{7})(9+2\sqrt{7})} = \frac{53(9+2\sqrt{7})}{81-28} = 9+2\sqrt{7}.$$

Khi đó:

$$A = (\sqrt{9 + 2\sqrt{7} - 1} - 1)^2 = (\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} - 1)^2$$

$$= (\sqrt{7 + 2\sqrt{7} + 1} - 1)^2 = [\sqrt{(\sqrt{7} + 1)^2} - 1]^2 = (\sqrt{7} + 1 - 1)^2 = 7.$$

Vậy, với $x = \dfrac{53}{9 - 2\sqrt{7}}$ thì $A = 7$.

Nhận xét:

1. Trong lời giải câu b), ở bước biến đổi thứ hai, ta bỏ được dấu trị tuyệt đối do điều kiện $x > 1$ đã xác định ở câu a).
2. Trong lời giải câu c), để nhận được kết quả $A = 7$, chúng ta đã phải thực hiện hai công việc:
   - *Đơn giản biểu thức giá trị của x,* bằng cách nhận cả tử và mẫu với $9 + 2\sqrt{7}$. Bản chất của việc làm này được gọi là "*Phép nhân liên hợp*" và chúng ta sẽ nghiên cứu kĩ trong chủ đề sau.
   - *Đơn giản biểu thức giá trị của A,* bằng cách tách $8 + 2\sqrt{7}$ thành $7 + 2\sqrt{7} + 1$ để nhận được một nhị thức bình phương, từ đó khử được căn thức.

Ví dụ 7. Cho hai biểu thức:

$$A = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}.$$

a. Tìm x để A có nghĩa.

b. Tìm x để B có nghĩa.

c. Với giá trị nào của x thì A = B ?

d. Với giá trị nào của x thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa ?

Giải

a. Để A có nghĩa điều kiện là:

$$\frac{x-1}{x-3} \geq 0$$

ta đi lập bảng xét dấu, dựa trên:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

như sau:

x		1		3	
$x-1$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-3$	$-$	|	$-$	0	$+$
$\dfrac{x-1}{x-3}$	$+$	0	$-$	||	$+$

Từ đó, suy ra:

$$\frac{x-1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ hoặc } x > 3.$$

Vậy, với $x \leq 1$ hoặc $x > 3$ thì A có nghĩa.

b. Để B có nghĩa điều kiện là:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy, với $x > 3$ thì B có nghĩa.

c. Để có A = B, tức là:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x-3}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy, với $x > 3$ thì A = B.

d. Ta có ngay, với $x \leq 1$ thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Chứng minh rằng với $A \geq 0$, $B > 0$ luôn có:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

Câu hỏi 2: Phát biểu quy tắc khai phương một thương. Lấy ví dụ minh hoạ.

Câu hỏi 3: Phát biểu quy tắc chia hai căn thức bậc hai. Lấy ví dụ minh hoạ.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Thực hiện phép tính:

a. $A = \sqrt{72} : \sqrt{18}$.

b. $B = \sqrt{52} : \sqrt{117}$.

c. $C = \left(\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{\frac{18}{5}} + 2\sqrt{5}\right).\sqrt{5}$.

Bài tập 2. Rút gọn các biểu thức:

a. $A = \dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

b. $B = \dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4+\sqrt{24}}$.

c. $C = \dfrac{1-\sqrt{a}}{a-1}$.

d. $D = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$.

e. $E = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

f. $F = \dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2}$.

Bài tập 3. Rút gọn các biểu thức:

a. $A = 3.\sqrt{\dfrac{12(a-2)^2}{27}}$.

b. $B = (a-b).\sqrt{\dfrac{ab}{(a-b)^2}}$.

Bài tập 4. Cho biểu thức:

$$A = x^2 - x\sqrt{10}.$$

Tính giá trị biểu thức A với $x = \sqrt{\dfrac{2}{5}} + \sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Bài tập 5. Cho biểu thức:

$$A = \left[\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+1\right)\right]:\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right).$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Cho b = 1, tìm a để biểu thức A = 2.

Bài tập 6. Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x-1}\right).$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm x để $A = \dfrac{1}{5}$.

Bài tập 7. Cho hai biểu thức:

$$A = \sqrt{\frac{x-1}{2x-3}} \text{ và } B = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-3}}.$$

a. Tìm x để A có nghĩa.

b. Tìm x để B có nghĩa.

c. Với giá trị nào của x thì A = B ?

d. Với giá trị nào của x thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa ?

Bài tập 8. Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{\sqrt{x} - 1}}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}} + \frac{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{\sqrt{x} - 1}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x - 1}}.$$

a. Tìm x để A có nghĩa.

b. Rút gọn biểu thức A.

c. Tính giá trị của biểu thức với $x = 19 - 8\sqrt{3}$.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. Ta có:

$$A = \sqrt{72} : \sqrt{18} = \sqrt{72 : 18} = \sqrt{4} = 2.$$

b. Ta có:

$$B = \sqrt{52} : \sqrt{117} = \sqrt{\frac{52}{117}} = \sqrt{\frac{52 : 13}{117 : 13}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

c. Ta có:

$$C = \left(\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{\frac{18}{5}} + 2\sqrt{5} \right) . \sqrt{5} = \sqrt{\frac{2.5}{5}} - \sqrt{\frac{18.5}{5}} + 2\sqrt{5.5}$$

$$= \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2 = 2 - 2\sqrt{2}.$$

Bài tập 2:

a. Ta có:

$$A = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

b. Ta có:

$$B = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4 + \sqrt{12}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{2(2 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c. Ta có:

$$C = \frac{1 - \sqrt{a^3}}{a - 1} = \frac{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{-(\sqrt{a} - 1)(1 + \sqrt{a} + a)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)}$$

$$= \frac{-(1 + \sqrt{a} + a)}{\sqrt{a} + 1}.$$

d. Ta có:

$$D = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{\sqrt{5}+1} = 1.$$

c. Ta có:

$$E = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{6}+3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 1.$$

f. Ta có:

$$F = \frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3-2.2\sqrt{3}+4}}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}}{\sqrt{3}-2} = \frac{|\sqrt{3}-2|}{\sqrt{3}-2} = -1.$$

Bài tập 3:

a. Ta biến đổi:

$$A = 3.\sqrt{\frac{4(a-2)^2}{9}} = 3.\frac{2|a-2|}{3} = 2|a-2|$$

$$= \begin{cases} 2(a-2) \text{ nếu } a-2 \geq 0 \\ -2(a-2) \text{ nếu } a-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2(a-2) \text{ nếu } a \geq 2 \\ -2(a-2) \text{ nếu } a < 2 \end{cases}.$$

b. Ta biến đổi:

$$B = (a-b).\frac{\sqrt{ab}}{|a-b|} = \begin{cases} \sqrt{ab} \text{ nếu } a-b > 0 \\ -\sqrt{ab} \text{ nếu } a-b < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{ab} \text{ nếu } a > b \\ -\sqrt{ab} \text{ nếu } a < b \end{cases}.$$

Bài tập 4: Thay $x = \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$ vào A, ta được $A = \frac{21}{10}$.

Bài tập 5:

a. Ta có:

$$A = \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$$

$$= \left(\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$$

$$= \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) : \left[\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}.$$

b. Với b = 1 được A = 2, vậy:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}}=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{a+1}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = 2(a+1) \Leftrightarrow 2a-\sqrt{a}+2=0. \qquad (1)$$

Ta thấy:

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{2}\sqrt{a})^2-2.\sqrt{2}.\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a}+\frac{1}{8}+\frac{17}{8}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2a}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{17}{8}\geq\frac{17}{8}>0$$

Do đó, (1) không thoả mãn.

Vậy, không có giá trị nào của a để với b = 1 thì A = 2.

Bài tập 6:

a. Ta có:

$$A=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(x-1)+(x-1)}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{2\sqrt{x}-2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right):\frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{x-1-2\sqrt{x}+2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}:\frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}:\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}:\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2}.(\sqrt{x}+1)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$$

b. Ta có:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow 5(\sqrt{x}-1)=\sqrt{x}+1\Leftrightarrow 4\sqrt{x}-6=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{6}{4}\Leftrightarrow x=\frac{9}{4}.$$

Vậy, với $x=\frac{9}{4}$ thì $A=\frac{1}{5}$.

Bài tập 7:

a. Để A có nghĩa điều kiện là:

$$\frac{x-1}{2x-3} \geq 0$$

ta đi lập bảng xét dấu, dựa trên:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

như sau:

x		1		$3/2$	
$x-1$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$
$2x-3$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$
$\frac{x-1}{2x-3}$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$

Từ đó, suy ra:

$$\frac{x-1}{2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ hoặc } x > \frac{3}{2}.$$

Vậy, với $x \leq 1$ hoặc $x > \frac{3}{2}$ thì A có nghĩa.

b. Để B có nghĩa điều kiện là:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Vậy, với $x > \frac{3}{2}$ thì B có nghĩa.

c. Để có A = B, tức là:

$$\sqrt{\frac{x-1}{2x-3}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Vậy, với $x > \frac{3}{2}$ thì A = B.

d. Ta có ngay, với $x \leq 1$ thì chỉ A có nghĩa, còn B không có nghĩa.

Bài tập 8:

a. Để A có nghĩa điều kiện là:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

b. Biến đổi A về dạng:

$$A = \left(\frac{\sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x} + 1)^2}}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}.\sqrt{\sqrt{x} - 1}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$$

$$= \left(\frac{|\sqrt{x} - 1| + |\sqrt{x} + 1|}{\sqrt{\sqrt{x}^2 - 1}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$$

$$\overset{x>1}{=} \frac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x - 1}} . \sqrt{x - 1} = 2\sqrt{x} .$$

c. Với $x = 19 - 8\sqrt{3}$, ta có:

$$\sqrt{x} = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{4^2 - 2.4.\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = |4 - \sqrt{3}| = 4 - \sqrt{3}$$

do đo:

$$A = 2(4 - \sqrt{3}) = 8 - 2\sqrt{3} .$$

CHỦ ĐỀ 5 BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN CĂN THỨC BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐƯA MỘT THỪA SỐ RA NGOÀI DẤU CĂN

Chúng ta sẽ bắt đầu với các phép biến đổi:

$\sqrt{4.7} = 2\sqrt{7}$, ở đây ta đưa được 4 ra ngoài dấu căn.

$\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$, ở đây ta đưa được 9 ra ngoài dấu căn sau phép tách $18 = 9.2$.

$\sqrt{6.15} = \sqrt{2.3.3.5} = 3\sqrt{10}$, ở đây ta đưa được 9 ra ngoài dấu căn sau phép kết hợp.

$\sqrt{32a^2b} = \sqrt{16.a^2.2b} = \sqrt{16}.\sqrt{a^2}.\sqrt{2b} = 4|a|\sqrt{2b}$.

Như vậy, nếu biểu thức dưới dấu căn có dạng tích hoặc phân tích được dưới dạng tích các thừa số, trong đó có thừa số là bình phương của một số hoặc một biểu thức. Thừa số đó có thể đưa ra ngoài dấu căn và phải có trị tuyệt đối.

Tổng quát, ta có:

$$\boxed{\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}\text{, với } B \ge 0.}$$

Thí dụ 1: Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{2}{a-2}.\sqrt{2a^8(a^2-4a+4)}.$$

Giải

Ta biến đổi A về dạng:

$$A = \frac{2}{a-2}.\sqrt{2a^8(a-2)^2} = \frac{2\sqrt{2}a^4.|a-2|}{a-2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}a^4.(a-2)}{a-2} \text{ nếu } a-2>0 \\ -\dfrac{2\sqrt{2}a^4.(a-2)}{a-2} \text{ nếu } a-2<0 \end{cases} = \begin{cases} 2\sqrt{2}a^4 \text{ nếu } a>2 \\ -2\sqrt{2}a^4 \text{ nếu } a<2 \end{cases}.$$

Nhận xét: Như vậy, ở trong A có thể đưa được a^8 và $(a-2)^2$ ra ngoài dấu căn. Tuy nhiên, ta thấy rằng:

$\sqrt{a^8} = \sqrt{(a^4)^2} = a^4$, bởi $a^4 > 0$ với mọi a.

$\sqrt{(a-2)^2} = |a - 2|$, bởi ta chưa xác định được dấu của a – 2.

2. ĐƯA MỘT THỪA SỐ VÀO TRONG DẤU CĂN

Chúng ta sẽ bắt đầu với các phép biến đổi:

$2\sqrt{7} = \sqrt{2^2}.\sqrt{7} = \sqrt{4.7} = \sqrt{28}$, ta đưa 2 vào căn, để thành 2^2.

$3\sqrt{\dfrac{2}{15}} = \sqrt{3^2}.\sqrt{\dfrac{2}{15}} = \sqrt{\dfrac{9.2}{15}} = \sqrt{\dfrac{6}{5}}$, ta đưa 2 vào căn, để thành 3^2.

$a^2\sqrt{ab^3} = \sqrt{(a^2)^2}.\sqrt{ab^3} = \sqrt{a^4.ab^3} = \sqrt{a^5b^3}$.

Như vậy, muốn đưa một thừa số A > 0 ở ngoài dấu căn bậc hai có thể đưa vào trong dấu căn và trở thành thừa số A^2.

Tổng quát, ta có:

$$|A|\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}\text{, với } B \geq 0.$$

Ta có hai trường hợp:

1. Nếu $A \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$, với $B \geq 0$.
2. Nếu $A < 0$ thì $A\sqrt{B} = -|A|\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$, với $B \geq 0$.

Thí dụ 2: Chứng minh rằng:

$$\frac{a-b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = |a|\text{, với } a > b.$$

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng quy tắc đưa một thừa số vào trong dấu căn.

Vì a > b nên $\dfrac{a-b}{b^2} > 0$, do đó:

$$\frac{a-b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = \sqrt{\frac{(a-b)^2}{b^4}\cdot\frac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Cách 2: Sử dụng quy tắc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn.

Ta có:

$$\frac{a-b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2-2ab+b^2}} = \frac{a-b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{(a-b)^2}} = \frac{a-b}{b^2}\cdot\frac{|a|.b^2}{|a-b|}$$

$$\overset{a>b}{=} \frac{a-b}{b^2}\cdot\frac{|a|.b^2}{(a-b)} = |a|, \text{ đpcm.}$$

Nhận xét: Như vậy, phép biến đổi đưa thừa số vào trong dấu căn đã giúp chúng ta có thể chứng minh được đẳng thức. Ngoài ra, nó còn rất cần thiết trong các phép tính toán, thí dụ:

1. Để so sánh $\sqrt{31}$ và $2\sqrt{7}$, ta biến đổi:

$$2\sqrt{7} = \sqrt{2^2.7} = \sqrt{28} < \sqrt{31}.$$

2. Khi tính $3\sqrt{2}$:

- Nếu ta tính $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ (sai chưa đến 0,01) rồi nhân 3 thì sai số sẽ gấp 3 lần sai số của giá trị gần đúng của $\sqrt{2}$ mà ta đã lấy.
- Còn nếu ta thực hiện $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2.2} = \sqrt{18}$, rồi dùng bảng tìm giá trị gần đúng của $\sqrt{18}$ thì sai số không bị nhân lên 3 lần như cách làm trên.

Thí dụ 3: Sắp xếp các số sau theo thứ thự giảm dần:

$$6\sqrt{2},\ 4\sqrt{5},\ 2\sqrt{13},\ 3\sqrt{7}.$$

Giải

Sử dụng quy tắc đưa một thừa số vào trong dấu căn, ta viết lại dãy số dưới dạng:

$$6\sqrt{2} = \sqrt{72},$$

$$4\sqrt{5} = \sqrt{80},$$

$$2\sqrt{13} = \sqrt{52},$$

$$3\sqrt{7} = \sqrt{63},$$

do đó, ta có sắp xếp:

$$4\sqrt{5},\ 6\sqrt{2},\ 3\sqrt{7},\ 2\sqrt{13}.$$

3. KHỬ MẪU CỦA BIỂU THỨC LẤY CĂN

Chúng ta sẽ bắt đầu với các phép biến đổi:

$\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, ở đây, ta có ngay mẫu số $\sqrt{16} = 4$.

$\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{2.5}{5.5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, ở đây vì 5 không phải là bình phương nên ta thực hiện nhân cả tử và mẫu với 5.

$\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{7.2}{8.2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$, ở đây vì 8 không phải là bình phương nhưng ta chỉ cần nhân cả tử và mẫu với 2.

$$\sqrt{\frac{6}{ab^3}} = \sqrt{\frac{6ab^3}{a^2b^6}} = \frac{\sqrt{6ab^3}}{ab^3}.$$

Như vậy, nếu mẫu của biểu thức dưới dấu căn là bình phương của một số hoặc một biểu thức, ta khai phương riêng mẫu rồi đưa ra ngoài dấu căn. Trong trường hợp mẫu không phải là bình phương của một số hoặc một biểu thức, ta cố gắng biến đổi biểu thức đó sao cho có mẫu có dạng bình phương rồi khai phương và đưa ra ngoài dấu căn.

Tổng quát, ta có:

$$\boxed{\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A.B}{B^2}} = \frac{1}{|B|}\sqrt{A.B}\text{, với } A.B \geq 0,\ B \neq 0.}$$

Thí dụ 4: Khử mẫu số của các biểu thức dưới dấu căn:

a. $\sqrt{\frac{7}{12}}$.

b. $\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{18}}$.

c. $ab^2\sqrt{\frac{a}{b}}$, với $a, b > 0$.

d. $\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}}$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$\sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{\frac{7}{4.3}} = \sqrt{\frac{7.3}{36}} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

b. Ta biến đổi:

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{18}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{9.2}} = \sqrt{\frac{2(\sqrt{2}-1)^2}{36}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{36}} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}.$$

c. Ta biến đổi:

$$ab^2\sqrt{\frac{a}{b}} = ab^2\sqrt{\frac{ab}{b^2}} = ab^2\frac{\sqrt{ab}}{|b|} \overset{b>0}{=} ab^2\frac{\sqrt{ab}}{b} = ab\sqrt{ab}.$$

d. Ta biến đổi:

$$\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}} = \sqrt{\frac{a-1}{a^2}} = \frac{\sqrt{a-1}}{|a|}.$$

4. TRỤC CĂN THỨC Ở MẪU

Trục căn thức ở mẫu là phép biến đổi được sử dụng rất nhiều trong quá trình học. Để hiểu thế nào là phép trục căn thức cũng như phương pháp để thực hiện điều này, chúng ta sẽ bắt đầu với các phép biến đổi:

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{2.3}{\sqrt{3}} = \frac{2.(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ hoặc } \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}..$$

$$\frac{7}{\sqrt{12}} = \frac{7}{\sqrt{4.3}} = \frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{6}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}-1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 2(\sqrt{2}+1).$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}.$$

Như vậy, để trục căn thức ở mẫu, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: **Phân tích tử và mẫu ra thừa số chung chứa căn rồi rút gọn thừa số đó.**

Cách 2: **Nhân tử và mẫu với thừa số thích hợp để làm mất căn thức ở mẫu. Có các dạng cơ bản sau:**

1. $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ **(B > 0).**

2. $\dfrac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \dfrac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})} = \dfrac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{A-B}$,

với A > 0, B > 0, A ≠ B.

3. $\dfrac{1}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \dfrac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})} = \dfrac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{A-B}$,

với A > 0, B > 0, A ≠ B.

Chú ý: Hai phép biến đổi dạng 2 và dạng 3 gọi là phép nhân liên hợp.

Thí dụ 5: Trục căn thức ở mẫu:

a. $\dfrac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}$.

b. $\dfrac{\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a-1}-1}$.

c. $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

d. $\dfrac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}}$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$\frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}=\frac{(a+1)\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}.$$

b. Ta biến đổi:

$$\frac{\sqrt{a-1}+1}{\sqrt{a-1}-1}=\frac{(\sqrt{a-1}+1)^2}{(\sqrt{a-1}-1)(\sqrt{a-1}+1)}=\frac{(\sqrt{a-1}+1)^2}{a-1-1}=\frac{(\sqrt{a-1}+1)^2}{a-2}.$$

c. Ta biến đổi:

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(a-b)(a+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b)$$

hoặc có thể biến đổi:

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(a^2-b^2)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{(a^2-b^2)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

$$=(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b}).$$

d. Ta biến đổi:

$$\frac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}}=\frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}}{1+\sqrt{a}}=\frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}.(1-\sqrt{a})}{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a})}$$

$$=\frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}.(1-\sqrt{a})}{1-a}=\sqrt{1+\sqrt{a}}.(1-\sqrt{a}).$$

Nhận xét: Trong lời giải câu d), chúng ta phải đi trục căn thức hai lần. Các em học sinh có thể thực hiện theo chiều ngược lại.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Viết gọn các biểu thức sau:

a. $A = \sqrt{25.90}$.

b. $B = \sqrt{75.54}$.

c. $C = \dfrac{1}{3ab}\sqrt{27a^2b^5c^3}$ $(a, b, c > 0)$.

Giải

a. Ta có:

$$A = \sqrt{25.90} = \sqrt{25.9.10} = 5.3\sqrt{10} = 15\sqrt{10}.$$

b. Ta có:

$$B = \sqrt{75.54} = \sqrt{25.3.9.6} = 5.3\sqrt{3.2.3} = 45.\sqrt{2}.$$

c. Ta có:

$$C = \frac{1}{3ab}\sqrt{27a^2b^5c^3} = \frac{1}{3ab}\sqrt{9.3.a^2b^5c^3} = \frac{3.a.b^2c}{3ab}\sqrt{3bc} = bc\sqrt{3bc}.$$

Ví dụ 2. Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn

a. $\sqrt{\dfrac{7}{250}}$.

b. $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

c. $\sqrt{\dfrac{5}{12}}$.

d. $\sqrt{\dfrac{6}{15}}$.

Giải

a. Ta có:

$$\sqrt{\frac{7}{250}} = \sqrt{\frac{7.10}{25.100}} = \frac{1}{50}\sqrt{70}.$$

b. Ta có:

$$\sqrt{\frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{7.3}{3.3}} = \frac{1}{3}\sqrt{21}.$$

c. Ta có:

$$\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5.3}{4.3.3}} = \frac{1}{6}\sqrt{15}.$$

d. Ta có:

$$\sqrt{\frac{6}{15}} = \sqrt{\frac{6.15}{15.15}} = \sqrt{\frac{90}{15.15}} = \sqrt{\frac{9.10}{15.15}} = \frac{1}{5}\sqrt{10}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}.$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} + \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} + \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{7}+\sqrt{5}.$$

Chú ý: Nếu thực hiện theo phương pháp " *quy đồng mẫu số* ", ta được:

$$A = \frac{4(\sqrt{5}+\sqrt{3})+2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{5}+2\sqrt{3}+2\sqrt{7}}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}.$$

bài toán sẽ dừng lại ở đây.

Ví dụ 4. Với giá trị nào của x thì ta có:

a. $\sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$.   b. $\sqrt{a(1-3x)^2} = (3x-1)\sqrt{a}$.

Giải

a. Ta biến đổi tương đương:

$$\sqrt{3x^2} = x\sqrt{3} \Leftrightarrow |x|\sqrt{3} = x\sqrt{3} \Leftrightarrow |x| = x \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Vậy, với $x \geq 0$ ta có được đẳng thức đã cho.

b. Ta biến đổi tương đương:

$$\sqrt{a(1-3x)^2} = (3x-1)\sqrt{a} \Leftrightarrow |1-3x|\sqrt{a} = (3x-1)\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow |1-3x| = 3x-1 \Leftrightarrow 1-3x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}.$$

Vậy, với $x \geq \frac{1}{3}$ ta có được đẳng thức đã cho.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng:

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2,\ \text{với } a, b > 0.$$

Giải

Nhận xét rằng:

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b).$$

Từ đó, suy ra:

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}$$

$$=a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab}=a-2\sqrt{ab}+b$$

$$=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2,\ \text{đpcm.}$$

Nhận xét: Trong lời giải trên, chúng ta dựa trên hằng đẳng thức để phân tích tử số ra thừa số chung từ đó rút gọn được căn thức ở mẫu. Tất nhiên, chúng ta có thể lựa chọn phép nhân liên hợp xong cách giải này phức tạp hơn.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2009}}=\sqrt{2009}-1.$$

Giải

Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

...

$$\frac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2009}}=\sqrt{2009}-\sqrt{2008}$$

Thực hiện phép cộng theo vế và rút gọn, ta được :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2008}+\sqrt{2009}}=\sqrt{2009}-1,\ \text{đpcm}$$

Nhân xét: Trong lời giải trên, để chứng minh đẳng thức chúng ta lựa chọn phép nhân liên hợp để khử căn thức ở mẫu cho từng phân số. Như vậy, ở đây chúng ta sử dụng phép biến đổi cục bộ.

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{3}{2}\sqrt{4x-8} - 9\sqrt{\frac{x-2}{81}} = 6.$

b. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} + 2 = 0.$

c. $2x - 5a\sqrt{x-a} + 2a^2 - 2a = 0$, với $a > 0$.

Giải

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{3}{2}\sqrt{4(x-2)} - 9\sqrt{\frac{x-2}{9^2}} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}.2\sqrt{x-2} - 9.\frac{1}{9}\sqrt{x-2} = 6$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} - \sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 3$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 9 \Leftrightarrow x = 11.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 11$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-x-(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{x^2+1-x^2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, ph ương trình có nghiệm $x = 1$.

c. Đặt $t = \sqrt{x-a}$, điều kiện $t \geq 0$. Suy ra:

$$t^2 = x - a \Leftrightarrow x = t^2 + a.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2(t^2 + a) - 5at + 2a^2 - 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 5at + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow (t - 2a)(2t - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 2a = 0 \\ 2t - a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2a \\ t = \dfrac{a}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x - a} = 2a \\ \sqrt{x - a} = \dfrac{a}{2} \end{array}\right. \overset{a>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x - a = 4a^2 \\ x - a = \dfrac{a^2}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4a^2 + a \\ x = \dfrac{a^2 + 4a}{4} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 4a^2 + a$ và $x = \dfrac{a^2 + 4a}{4}$.

Nhận xét: Như vậy:

1. Với phương trình trong câu a), chúng ta sử dụng quy tắc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn để biến đổi nó về dạng $\sqrt{f} = g$. Tất nhiên, chúng ta cũng có thể sử dụng quy tắc đưa một thừa số vào trong dấu căn để giải, cụ thể:

$$\frac{3}{2}\sqrt{4x - 8} = 3\sqrt{\frac{1}{4}(4x - 8)} = 3\sqrt{x - 2}.$$

$$9\sqrt{\frac{x - 2}{81}} = \sqrt{\frac{81(x - 2)}{81}} = \sqrt{x - 2}.$$

Xong cách biến đổi kiểu này rất thụ động.

2. Với phương trình trong câu b), chúng ta sử dụng phép quy đồng cục bộ vì nhận thấy mẫu số của phân số thứ nhất là liên hợp của mẫu số của phân số thứ hai.

3. Với phương trình trong câu c), chúng ta sử dụng phép đặt ẩn phụ để nhận được một phương trình bậc hai, từ đó sử dụng kiến thức về phân tích đa thức thành nhân tử để biến đổi nó về dạng tích và nhận được hai nghiệm $t = 2a$ và $t = \dfrac{a}{2}$ (lưu ý rằng cả hai nghiệm này đều thoả mãn $t \geq 0$ do giả thiết $a > 0$).

Ví dụ 8. Cho biểu thức:

$$A = \left(\sqrt{1-x} + \frac{3}{\sqrt{1+x}}\right) : \left(1 + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

a. Tìm điều kiện để A có nghĩa.

b. Rút gọn A.

c. Tính giá trị của A khi $x = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

d. Tìm x để $\sqrt{A} > A$.

Giải

a. Điều kiện để A có nghĩa:

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 + x > 0 \\ 1 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x > -1 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1. \qquad (*)$$

Vậy, điều kiện tồn tại của A là $-1 < x < 1$.

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \frac{\sqrt{(1-x)(1+x)} + 3}{\sqrt{1+x}} : \frac{\sqrt{1-x^2} + 3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + 3}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} + 3} = \sqrt{1-x}.$$

c. Trước tiên, ta viết lại x dưới dạng:

$$x = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4 - 3} = 2\sqrt{3} - 3.$$

Khi đó, ta suy ra:

$$A = \sqrt{1 - (2\sqrt{3} - 3)} = \sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$

$$= |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1.$$

d. Để $\sqrt{A} > A$, điều kiện là:

$$A < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} < 1 \Leftrightarrow 1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Kết hợp với (*), ta được $0 < x < 1$.

Vậy, với $0 < x < 1$ thì $\sqrt{A} > A$

Ví dụ 9. Cho biểu thức:

$$A = (x - 3)\sqrt{\frac{x}{9 - x^2}}.$$

a. Tìm điều kiện để A có nghĩa.

b. Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức A khi x = 1.

Giải

a. Điều kiện để A có nghĩa:

$$\begin{cases} \frac{x}{9 - x^2} \geq 0 \\ 9 - x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{(3 - x)(3 + x)} \geq 0 \\ (3 - x)(3 + x) \neq 0 \end{cases}.$$

Lập bảng xét dấu từ đó thu được $x < -3$ hoặc $0 \leq x < 3$.

Vậy, điều kiện tồn tại của A là $x < -3$ hoặc $0 \leq x < 3$.

b. Từ kết quả câu a), suy ra $x - 3 < 0$, do đó:

$$A = (x - 3)\sqrt{\frac{x}{9 - x^2}} = -|x - 3|\sqrt{\frac{x}{9 - x^2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{x(x - 3)^2}{(3 - x)(3 + x)}} = -\sqrt{\frac{x(3 - x)}{3 + x}}.$$

Thay x = 1 vào A, ta được:

$$A = -\sqrt{\frac{1(3 - 1)}{3 + 1}} = -\sqrt{\frac{2}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Chú ý: Bài toán sẽ có một kết quả sai nếu các em học sinh không đánh giá điều kiện $0 \leq x < 3$, dẫn đến sai lầm trong quá trình biến đổi.

$$A = (x - 3)\sqrt{\frac{x}{9 - x^2}} = \sqrt{\frac{x(x - 3)^2}{(3 - x)(3 + x)}} = \sqrt{\frac{x(3 - x)}{3 + x}}.$$

Với biến đổi như vậy thì kết quả câu b) sẽ là:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu quy tắc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn.

Câu hỏi 2: Nêu quy tắc đưa một thừa số vào trong dấu căn.

Câu hỏi 3: Nêu quy tắc khử mẫu của biểu thức lấy căn.

Câu hỏi 4: Nêu quy tắc trục căn thức ở mẫu.

Câu hỏi 5: Viết bảng tóm tắt một số phép tính và phép biến đổi căn.

IV. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1. So sánh các cặp số sau:

a. $4\sqrt{7}$ và $3\sqrt{13}$.

b. $5\sqrt{11}$ và $3\sqrt{21}$.

c. $\frac{3}{4}\sqrt{5}$ và $\frac{4}{9}\sqrt{7}$.

d. $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ và $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$.

Bài tập 2. So sánh cặp số sau:

$$A = \frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} \text{ và } B = \frac{12}{3-\sqrt{6}} + \sqrt{6}.$$

Bài tập 3. Trục căn thức ở mẫu:

a. $A = \frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$.

b. $B = \frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{8}-2\sqrt{2}}$.

c. $C = \frac{\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3}}$.

d. $D = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Bài tập 4. Rút gọn biểu thức:

a. $A = \frac{1}{\sqrt{7}-2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}$.

b. $B = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}}$.

Bài tập 5. Với giá trị nào của x thì ta có:

a. $\sqrt{7x^2} = -x\sqrt{7}$.

b. $\sqrt{a(x-2)^2} = (2-x)\sqrt{a}$.

Bài tập 6. Chứng minh rằng:

a. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a+b}{a-b}$, với $a, b \geq 0$ và $a \neq b$.

b. $\frac{(a\sqrt{b}+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}\sqrt{\frac{ab+b^2-2\sqrt{ab^3}}{a(a+2\sqrt{b})+b}} = b$, với $a > b > 0$.

Bài tập 7. Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{4x-16}+\sqrt{x-4}-\frac{1}{3}\sqrt{9x-36}=4$.

b. $\sqrt{9x-9}-\sqrt{4x-4}+\sqrt{16x-16}-3\sqrt{x-1}=16$.

Bài tập 8. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}+2=0$.

b. $\frac{2x}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{2x}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{5}+1$.

Bài tập 9. Giải các phương trình sau:

a. $2x-7\sqrt{x}+5=0$.

b. $x-6\sqrt{x-3}-10=0$.

Bài tập 10. Cho biểu thức:

$$A=\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+1.$$

a. Tìm điều kiện để A có nghĩa.

b. Rút gọn A.

c. Hãy so sánh $|A|$ với A, biết $x>1$.

d. Tìm x để $A=2$.

e. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. Ta có:

$$4\sqrt{7}=\sqrt{4^2.7}=\sqrt{112},$$

$$3\sqrt{13}=\sqrt{3^2.13}=\sqrt{117}.$$

Vậy, ta được $4\sqrt{7}<3\sqrt{13}$.

b. Ta có:

$$5\sqrt{11}=\sqrt{5^2.11}=\sqrt{275};$$

$$3\sqrt{21}=\sqrt{3^2.21}=\sqrt{189}.$$

Vậy, ta được $5\sqrt{11}>3\sqrt{21}$.

c. Ta có:

$$\frac{3}{4}\sqrt{5} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2.5} = \sqrt{\frac{45}{16}}$$

$$\frac{4}{9}\sqrt{7} = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2.7} = \sqrt{\frac{112}{81}}.$$

Vậy, ta được $\frac{3}{4}\sqrt{5} > \frac{4}{9}\sqrt{7}$.

d. Ta có:

$$\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \sqrt{7}+\sqrt{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{6-3} = \sqrt{6}+\sqrt{3}.$$

Vậy, ta được $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} > \frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$.

Bài tập 2: Ta có:

$$A = \frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} = \frac{15(\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)} + \frac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}$$

$$= \frac{15(\sqrt{6}-1)}{6-1} + \frac{4(\sqrt{6}+2)}{6-4} = 3(\sqrt{6}-1)+2(\sqrt{6}+2) = \sqrt{6}+1.$$

$$B = \frac{12}{3-\sqrt{6}} + \sqrt{6} = \frac{12(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})} = \frac{12(3+\sqrt{6})}{9-6}$$

$$= 4(3+\sqrt{6}).$$

Vậy, ta được A < B.

Bài tập 3:

a. Ta có:

$$A = \frac{1-\sqrt{a^3}}{1-\sqrt{a}} = \frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{1-\sqrt{a}} = 1+\sqrt{a}+a.$$

b. Ta có:

$$B = \frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{2^2.2}} = \frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{18}}{18}.$$

c. Ta có:

$$C=\frac{(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})}{(\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3})(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})}$$

$$=\frac{(\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3})^2}{(a+3)-(a-3)}=\frac{a+3+2\sqrt{a+3}\sqrt{a-3}+a-3}{a+3-a+3}$$

$$=\frac{2a+2\sqrt{a^2-9}}{a+3-a+3}=\frac{2a+2\sqrt{a^2-9}}{6}.$$

d. Ta có:

$$D=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+2\sqrt{2}+2)-3}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{3.2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}.$$

Bài tập 4:

a. Ta có:

$$A=\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{3}+\sqrt{7}-2\sqrt{3}}{(\sqrt{7}-2\sqrt{3})(\sqrt{7}+2\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{7}}{7-4.3}=-\frac{2\sqrt{7}}{5}.$$

b. Ta có:

$$B=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1}=\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{2.2+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-1}{2-1}=3+\sqrt{2}.$$

Bài tập 5:

a. Ta biến đổi tương đương:

$$\sqrt{7x^2}=-x\sqrt{7}\Leftrightarrow |x|\sqrt{7}=-x\sqrt{7}\Leftrightarrow |x|=-x\Leftrightarrow x\le 0.$$

Vậy, với $x \le 0$ ta có được đẳng thức đã cho.

b. Ta biến đổi tương đương:

$$\sqrt{a(x-2)^2}=(2-x)\sqrt{a}\Leftrightarrow |x-2|\sqrt{a}=(2-x)\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow |x-2|=2-x\Leftrightarrow 2-x\le 0\Leftrightarrow x\ge 2.$$

Vậy, với $x \ge 2$ ta có được đẳng thức đã cho.

Bài tập 6:

a. Thực hiện phép quy đồng mẫu số cho vế trái (VT), ta được:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{a+b}{a-b}.$$

b. Nhận xét rằng:

$$\frac{(a\sqrt{b}+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}=\frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

$$\sqrt{\frac{ab+b^2-2\sqrt{ab^3}}{a(a+2\sqrt{b})+b}}=\sqrt{\frac{b[(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2]}{a^2+2a\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(a+\sqrt{b})^2}}=\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a+\sqrt{b}}.$$

Do đó:

$$VT=\frac{\sqrt{b}(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a+\sqrt{b}}$$

$$=\frac{b(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}=b\text{, đpcm.}$$

Bài tập 7:

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sqrt{x-4}+\sqrt{x-4}-\sqrt{x-4}=4\Leftrightarrow 2\sqrt{x-4}=4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-4}=2\Leftrightarrow x-4=4\Leftrightarrow x=8.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 8$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-1}+4\sqrt{x-1}-3\sqrt{x-1}=16$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=16\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=8\Leftrightarrow x-1=64\Leftrightarrow x=65.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 65$.

Bài tập 8:

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1-(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}+2=0\Leftrightarrow\frac{-2}{x+1-1}+2=0\Leftrightarrow\frac{2}{x}=2$$

$$\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

b. Nhận xét rằng:

$$\frac{2x}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2x(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{2x(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = x(\sqrt{5}+\sqrt{3}).$$

$$\frac{2x}{\sqrt{3}+1} = \frac{2x(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2x(\sqrt{3}-1)}{3-1} = x(\sqrt{3}-1).$$

Do đó, phương trình được chuyển về dạng:

$$x(\sqrt{5}+\sqrt{3}) - x(\sqrt{3}-1) = \sqrt{5}+1$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1) = \sqrt{5}+1 \Leftrightarrow x(\sqrt{5}+1) = \sqrt{5}+1$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Bài tập 9:

a. Đặt $t = \sqrt{x}$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2t^2 - 7t + 5 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ 2t-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=\frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{25}{4} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{25}{4}$.

b. Đặt $t = \sqrt{x-3}$, điều kiện $t \geq 0$. Suy ra:

$$t^2 = x - 3 \Leftrightarrow x = t^2 + 3.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 + 3 - 6t - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1=0 \text{ vô nghiệm} \\ t-7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 7$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 7 \Leftrightarrow x - 3 = 49 \Leftrightarrow x = 52.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 52$.

Bài tập 10:

a. Điều kiện để A có nghĩa:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - \sqrt{x} + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Vậy, với $x > 0$ thì A có nghĩa.

b. Nhận xét rằng:

$$x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x}(x\sqrt{x} + 1) = \sqrt{x}[(\sqrt{x})^3 + 1]$$
$$= \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1).$$

$$2x + \sqrt{x} = \sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1).$$

Do đó, biểu thức A được biến đổi về dạng:

$$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + 1$$
$$= \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - (2\sqrt{x} + 1) + 1 = x - \sqrt{x}.$$

c. Nhận xét rằng, với $x > 1$, ta có ngay:

$$x > \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow A > 0 \Rightarrow |A| = A.$$

d. Để $A = 2$, điều kiện là:

$$x - \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x}$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t + 1 = 0 \text{ vô nghiệm} \\ t - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, điều kiện là $x = 4$.

e. Ta có:

$$A = x - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}.$$

Do đó $A_{Min} = -\dfrac{1}{4}$, đạt được khi:

$$\sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

CHỦ ĐỀ 6 THỰC HIỆN PHÉP TÍNH, RÚT GỌN BIỂU THỨC CÓ CHỨA CĂN BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để rút gọn biểu thức có chứa căn bậc hai ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thực hiện các phép biến đổi đơn giản:

1. Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn.
2. Đưa một thừa số vào trong dấu căn.
3. Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn.
4. Trục căn thức ở mẫu.

Bước 2: Thực hiện phép tính.

Ta có kết quả:

$$a\sqrt{A} - b\sqrt{A} + c\sqrt{A} + d = (a - b + c)\sqrt{A} + d$$

với $A \geq 0$ và $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Bây giờ, chúng ta sẽ xem xét các dạng toán liên quan thông qua các thí dụ sau.

Thí dụ 1: Thực hiện phép tính:

a. $3\sqrt{8} - \sqrt{18} - 5\sqrt{\dfrac{1}{2}} + \sqrt{50}$.

b. $\dfrac{2}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{3} - 1}$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$3\sqrt{8} - \sqrt{18} - 5\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{50} = 3\sqrt{4.2} - \sqrt{9.2} - 5\sqrt{\frac{2}{2^2}} + \sqrt{25.2}$$

$$= 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - \frac{5}{2}\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$$

$$= (6 - 3 - \frac{5}{2} + 5)\sqrt{2} = \frac{11\sqrt{2}}{2}.$$

b. Ta biến đổi từng thành phần trong biểu thức:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$, ở đây ta sử dụng phép phân tích tử số.

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$, ở đây ta sử dụng phép nhân liên hợp

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{3-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1.$$

Như vậy:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{2} - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \sqrt{3} + 1 = 1.$$

Nhận xét: Như vậy, với yêu cầu " *Thực hiện phép tính* " của các biểu thức chứa căn bậc hai chúng ta cần linh hoạt sử dụng bốn quy tắc biến đổi đã biết, cụ thể:

1. Ở câu a), chúng ta đã sử dụng quy tắc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn cho $3\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$. Còn đối với $5\sqrt{\frac{1}{2}}$ ta biến đổi nó về dạng có mẫu số bình phương là $5\sqrt{\frac{2}{2^2}}$, tất nhiên cũng có thể biến đổi:

$$5\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

2. Ở câu b), mỗi thành phần đều có nhiều cách biến đổi, cụ thể ngoài cách đã trình bày trong lời giải trên chúng ta còn có thể thực hiện như sau:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3} + 1.$$

Thí dụ 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a. $A = 2\sqrt{3x} + \sqrt{27x} - \sqrt{8x} + \sqrt{50x} + \sqrt{x}$.

b. $B = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{xy} + \frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}$, với $x.y > 0$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$A = 2\sqrt{3x} + 3\sqrt{3x} - 2\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x} + \sqrt{x}$$
$$= (2+3)\sqrt{3x} + (-2+5)\sqrt{2x} + \sqrt{x}$$
$$= 5\sqrt{3x} + 3\sqrt{2x} + \sqrt{x}$$
$$= (5\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 1)\sqrt{x}.$$

b. Ta biến đổi:

$$B = \sqrt{\frac{xy}{y^2}} + \sqrt{xy} + \frac{x}{y}\sqrt{\frac{xy}{x^2}}$$
$$= \frac{1}{|y|}\sqrt{xy} + \sqrt{xy} + \frac{x}{|x|y}\sqrt{xy}$$
$$= \left(\frac{1}{|y|} + 1 + \frac{x}{|x|y}\right)\sqrt{xy}$$
$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{y}\right)\sqrt{xy} & \text{nếu } x, y > 0 \\ \left(-\frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y}\right)\sqrt{xy} & \text{nếu } x, y < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{(y+2)\sqrt{xy}}{y} & \text{nếu } x, y > 0 \\ \frac{(y-2)\sqrt{xy}}{y} & \text{nếu } x, y < 0 \end{cases}.$$

Nhận xét: Như vậy, với yêu cầu " *Rút gọn* " các biểu thức chứa căn bậc hai chúng ta vẫn linh hoạt sử dụng bốn quy tắc biến đổi đã biết. Tuy nhiên, trong câu b) chúng ta lưu ý tới $\sqrt{a^2} = |a|$, từ đó thực hiện thêm việc phá dấu trị tuyệt đối.

Thí dụ 3: Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2=4\sqrt{6}.$$

Giải

Nhận xét rằng:

$$5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}.\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6}.$$

$$5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}.\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}.$$

Do đó:

$$VT=5+2\sqrt{6}-(5-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}\text{, đpcm.}$$

Nhận xét: Đối với biểu thức đã cho, nếu không khéo léo đánh giá được $5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ và $5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ mà thực hiện phép nhân liên hợp để khử mẫu thì sẽ nhận được kết quả rất phức tạp.

Thí dụ 4: Giải phương trình:

a. $3\sqrt{2x}-\sqrt{18x^3}+4\sqrt{\dfrac{x}{2}}-\dfrac{1}{4}\sqrt{128x}=0.$

b. $\dfrac{2\sqrt{x}-7}{3}+\sqrt{x}-\dfrac{3\sqrt{x}-5}{2}=1.$

Giải

a. Điều kiện $x \ge 0$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sqrt{2x}-3x\sqrt{2x}+2\sqrt{2x}-2\sqrt{2x}=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{2x}(1-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x}=0\\1-x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\text{, thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, phương trình có các nghiệm $x=0$ và $x=1$.

b. Điều kiện $x \geq 0$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{7}{3} + \sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{5}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} + 1 - \frac{3}{2}\right)\sqrt{x} = 1 + \frac{7}{3} - \frac{5}{2}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\sqrt{x} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 25$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính:

a. $A = \sqrt{72} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$.

b. $B = 15\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

c. $C = \frac{8}{2+\sqrt{3}} - \frac{5}{2-\sqrt{3}} + 3\sqrt{3}$.

d. $D = \sqrt{\frac{7-\sqrt{6}}{7+\sqrt{6}}} - \sqrt{\frac{7+\sqrt{6}}{7-\sqrt{6}}}$.

Giải

a. Ta có:

$$A = \sqrt{72} + \sqrt{45} - \sqrt{96} = \sqrt{36.2} + \sqrt{25.2} + \sqrt{49.2}$$
$$= 6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

b. Ta có:

$$B = 15\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 15\left(\frac{1}{5}\sqrt{15} + \frac{1}{3}\sqrt{15}\right) = 15.\frac{8}{15}\sqrt{15} = 8\sqrt{15}.$$

c. Ta có:

$$C = \frac{8}{2+\sqrt{3}} - \frac{5}{2-\sqrt{3}} + 3\sqrt{3}$$
$$= \frac{8(2-\sqrt{3}) - 5(2+\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$
$$= \frac{16 - 8\sqrt{3} - 10 - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}(4-3)}{4-3} = 6 - 10\sqrt{3}.$$

d. Ta có thể làm theo 2 cách:

Cách 1: Sử dụng phương pháp quy đồng mẫu số, ta có:

$$D = \sqrt{\frac{7-\sqrt{6}}{7+\sqrt{6}}} - \sqrt{\frac{7+\sqrt{6}}{7-\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{7-\sqrt{6}}}{\sqrt{7+\sqrt{6}}} - \frac{\sqrt{7+\sqrt{6}}}{\sqrt{7-\sqrt{6}}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{7-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\sqrt{7+\sqrt{6}}\right)^2}{\sqrt{7+\sqrt{6}}.\sqrt{7-\sqrt{6}}} = \frac{7-\sqrt{6}-7-\sqrt{6}}{\sqrt{(7+\sqrt{6})(7-\sqrt{6})}}.$$

$$= -2\sqrt{6}.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp trục căn thức ở mẫu, ta có:

$$D = \sqrt{\frac{7-\sqrt{6}}{7+\sqrt{6}}} - \sqrt{\frac{7+\sqrt{6}}{7-\sqrt{6}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(7-\sqrt{6})^2}{(7+\sqrt{6})(7-\sqrt{6})}} - \sqrt{\frac{(7+\sqrt{6})^2}{(7+\sqrt{6})(7-\sqrt{6})}}$$

$$= \sqrt{\frac{(7-\sqrt{6})^2}{7-6}} - \sqrt{\frac{(7+\sqrt{6})^2}{7-6}} = 7-\sqrt{6}-7-\sqrt{6} = -2\sqrt{6}.$$

Chú ý: Các em học sinh cần phải linh hoạt trong việc lựa chọn cách biến đổi. Trong nhiều bài toán việc trục căn thức ở mẫu sẽ làm cho các bước quy đồng đơn giản hơn nhiều.

Ví dụ 2. Cho biểu thức:

$$A = 1 : \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right).$$

a. Tìm tập xác định của A.

b. Rút gọn biểu thức A.

c. So sánh A với 3.

Giải

a. Điều kiện để biểu thức A có nghĩa:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x\sqrt{x}-1 \ne 0 \\ x+1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases}.$$

b. Ta có:

$$A = 1:\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right)$$

$$= 1:\left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right]$$

$$= 1:\left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right]$$

$$= 1:\left[\frac{x+2+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right]$$

$$= 1:\left[\frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right]$$

$$=1:\left[\frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right]$$

$$= 1:\left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right] = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

c. Xét hiệu:

$$A-3 = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-3 = \frac{x+\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}.$$

Nhận thấy:

$$\begin{cases}(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0\\ \sqrt{x} \geq 0\\ 0 < x \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\sqrt{x}-1)^2 > 0\\ \sqrt{x} > 0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \geq 0$$

$\Leftrightarrow A-3 \geq 0.$

Vậy $A \geq 3$.

Nhận xét: Ta có thể thực hiện rút gọn biểu thức A với cách khác như sau:

Đặt: $\sqrt{x} = a$, $0 < a \neq 1$.

Ta được:

$$A = 1:\left(\frac{a^2+2}{a^3-1} + \frac{a+1}{a^2+a+1} - \frac{a+1}{a^2-1}\right)$$

$$= 1:\left[\frac{a^2+2}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{a+1}{a^2+a+1} - \frac{1}{a-1}\right]$$

$$= 1:\left[\frac{a^2-a}{(a-1)(a^2+a+1)}\right] = \frac{a^2+a+1}{a}.$$

Thay $a = \sqrt{x}$ vào biểu thức A vừa rút gọn, ta được:

$$A = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$$

Ví dụ 3. Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right).\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right).$$

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tìm a để $P < 7 - 4\sqrt{3}$.

Giải

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ 1-\sqrt{a} \neq 0 \\ 1+\sqrt{a} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a}(\sqrt{a}-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq a \neq 1.$$

Ta có:

$$P = \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right).\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$$

$$= \left(\frac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right).\left(\frac{(1+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}+a)}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$$

$$= (1+\sqrt{a}+a+\sqrt{a})(1-\sqrt{a}+a-\sqrt{a})$$

$$= (1+2\sqrt{a}+a)(1-2\sqrt{a}+a) = (1+\sqrt{a})^2(1-\sqrt{a})^2 = (1-a)^2.$$

b. Ta có:

$$P < 7 - 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (1-a)^2 < 7 - 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (1-a)^2 < 4 - 2.2\sqrt{3} + 3$$

$$\Leftrightarrow (1-a)^2 < (2-\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow |1-a| < 2 - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} - 2 < a - 1 < 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} - 1 < a < 3 - \sqrt{3}.$$

Vậy, với $\sqrt{3} - 1 < a < 3 - \sqrt{3}$ thì $P < 7 - 4\sqrt{3}$.

Chú ý: Ta cần chú ý tính chất:

$$|A| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < A < \alpha$$

Ví dụ 4. Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9}\right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1\right).$$

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tìm x để $P < -\dfrac{1}{2}$.

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B.

Giải

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \neq 9.$$

Ta có:

$$P = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 3x - 3}{x-9} : \frac{2\sqrt{x} - 2 - \sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} - 3x - 3}{x-9} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{-3\sqrt{x}-3}{x-9} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{-3(\sqrt{x}+1)}{x-9}.\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{-3}{\sqrt{x}+3}.$$

b. Ta có:

$$P < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+3} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+3} + \frac{1}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6 + \sqrt{x} + 3}{2(\sqrt{x}+3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+3)} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \le x < 9.$$

Vậy, với $0 \le x < 9$ thì $P < -\dfrac{1}{2}$.

c. Ta có:

$$P = \frac{-3}{\sqrt{x}+3}.$$

Nhận xét:

$$x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1.(-3)}{\sqrt{x}+3} \geq \frac{1.(-3)}{3} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x}+3} \geq -1 \Leftrightarrow P \geq -1$$

Vậy, suy ra $P_{min} = -1$ đạt được khi $x = 0$.

Chú ý: Bất đẳng thức đổi chiều khi đổi ngược phân số hoặc nhân cả hai vế với một số âm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Thực hiện phép tính:

a. $A = \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

b. $B = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

c. $C = 12\left(\sqrt{\frac{2}{6}} + \sqrt{\frac{6}{2}}\right)$.

d. $D = \sqrt{72} + 4{,}5\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}} + 2\sqrt{27}$.

Bài tập 2. Rút gọn biểu thức:

a. $A = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} + 1$.

b. $B = \sqrt{x} - 2 + \frac{10-x}{\sqrt{x}+2}$.

c. $C = \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}}{9-x}$.

d. $D = \sqrt{xy} - \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{1}{xy}} + 2\sqrt{\frac{y}{x}}$

Bài tập 3. Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} - 1\right) : \left(\frac{9 - x}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3}\right).$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm x để $A < -1$.

Bài tập 4. Cho biểu thức:

$$A = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}.$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm x để $A = \frac{1}{2}$.

c. Chứng minh rằng $A \le \frac{2}{3}$.

Bài tập 5. Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}\right).$$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm a để $A < 0$.

c. Tìm a để $A = -2$.

Bài tập 6. Chứng minh rằng biểu thức sau là hằng số với mọi giá trị x và y

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} - y} + \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy} - x}\right) . \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}.$$

Bài tập 7. Giải phương trình:

a. $(\sqrt{x} - 3)(4 - \sqrt{x}) = 9 - x$.

b. $\dfrac{3}{x + \sqrt{2x^3 + 1}} + \dfrac{3}{x - \sqrt{2x^3 + 1}} = 0$.

c. $\dfrac{\sqrt{4 + x}}{\sqrt{x + 5}} = \dfrac{\sqrt{x + 3}}{\sqrt{x - 2}}$.

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. Ta có:

$$A = \sqrt{1+2\sqrt{5}+5} - \sqrt{1-2\sqrt{5}+5} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$$

$$= 1 + \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1) = 2$$

b. Ta có:

$$B = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4+2.2\sqrt{3}+3} - \sqrt{4-2.2\sqrt{3}+3}$$

$$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3} - (2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

c. Ta có:

$$C = 12\left(\sqrt{\frac{2}{6}} + \sqrt{\frac{6}{2}}\right) = 12\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 16\sqrt{3}.$$

Bài tập 2:

a. Ta có:

$$A = \frac{(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{2+x-1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}.$$

b. Ta có:

$$B = \frac{10-x+(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2} = \frac{10-x+x-4}{\sqrt{x}+2} = \frac{6}{\sqrt{x}+2}.$$

c. Ta có:

$$C = \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{2(3-\sqrt{x})+(3+\sqrt{x})+\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} = \frac{6-2\sqrt{x}+3+\sqrt{x}+\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{9}{9-x}.$$

Bài tập 3:

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 9 \neq 0 \\ \sqrt{x} - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \\ x \neq 4 \end{cases}.$$

Ta có:

$$A = \frac{x - 3\sqrt{x} - (x - 9)}{x - 9} : \frac{9 - x + (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3) - (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{-3\sqrt{x} + 9}{x - 9} : \frac{9 - x + (x - 9) - (x - 4)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{-3\sqrt{x} + 9}{x - 9} : \frac{4 - x}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{x} + 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2} = \frac{-3}{\sqrt{x} + 2}.$$

b. Để $A < -1$, ta có:

$$\frac{3(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2)} < -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{x} + 3) + (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{x} + 3) + x - \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 2\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2)} < 0.$$

Nhận thấy:

$$x + 2\sqrt{x} + 3 > 0 \text{ và } \sqrt{x} + 2 > 0$$

Do đó,

$$\frac{x + 2\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2)} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x < 9.$$

Vậy, với $0 \leq x < 9$, $A < -1$.

Bài tập 4:

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-\sqrt{x} \neq 0 \\ \sqrt{x}+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Ta có:

$$A = \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \frac{15\sqrt{x}-11-(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)-(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{15\sqrt{x}-11-3x-7\sqrt{x}+6-2x-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(-5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}.$$

b. Để $A = \frac{1}{2}$, ta có:

$$\frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(-5\sqrt{x}+2) = \sqrt{x}+3$$

$$\Leftrightarrow -10\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-3 = 0 \Leftrightarrow 11\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{121}.$$

Vậy, với $x = \frac{1}{121}$, ta được $A = \frac{1}{2}$.

c. Xét hiệu:

$$\frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} - \frac{2}{3} = \frac{-15\sqrt{x}+6-2\sqrt{x}-6}{3(\sqrt{x}+3)} = \frac{-17\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}+3)}.$$

Nhận thấy:

$$3(\sqrt{x}+3) > 0.$$

Do đó:

$$\frac{-17\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}+3)} \leq 0 \Rightarrow A \leq \frac{2}{3}.$$

Bài tập 5:

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \sqrt{a} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}.$$

Ta có:

$$A = \left(\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\right)^2 . \left(\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-1) - (\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}\right)$$

$$= \frac{(a-1)^2}{4a} . \left(\frac{a - 2\sqrt{a} + 1 - a - 2\sqrt{a} - 1}{a-1}\right)$$

$$= \frac{(a-1)^2}{4a} . \frac{-4\sqrt{a}}{a-1} = \frac{a-1}{\sqrt{a}}.$$

b. Để $A < 0$, ta có:

$$\frac{a-1}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < 1.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được: $0 < a < 1$.

c. Để $A = -2$, ta có:

$$\frac{a-1}{\sqrt{a}} = -2 \Leftrightarrow a - 1 + 2\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow a + 2\sqrt{a} + 1 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + 1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} + 1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{a} + 1 = \sqrt{2} \\ \sqrt{a} + 1 = -\sqrt{2} (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow a = (\sqrt{2} - 1)^2.$$

Vậy, với $a = (\sqrt{2} - 1)^2$ thì $A = -2$.

Bài tập 6: Ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} + \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x})}\right) . \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}.$$

$$= \frac{\sqrt{x}.\sqrt{x} + (2\sqrt{x} + \sqrt{y})\sqrt{y}}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} . \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}$$

$$= \frac{x + 2\sqrt{xy} + y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = 1 \text{ – đpcm.}$$

Bài tập 7:

a. Điều kiện: $x \geq 0$.

Ta có:

$$-x + 7\sqrt{x} - 12 = 9 - x \Leftrightarrow 7\sqrt{x} = 21 \Leftrightarrow x = 9$$

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x^3 + 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x^3 + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \\ (1 - x)(2x^2 + x + 1) \neq 0 \end{cases}.$$

Ta có:

$$\frac{3}{x + \sqrt{2x^3 + 1}} + \frac{3}{x - \sqrt{2x^3 + 1}} = 0.$$

c. Ta có:

$$\frac{\sqrt{4 + x}}{\sqrt{x} + 5} = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

CHỦ ĐỀ 7 CĂN BẬC BA - CĂN BẬC N

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. CĂN BẬC BA

Để xây dựng khái niệm căn bậc ba của một số, chúng ta sẽ bắt đầu với bài toán sau:

Bài toán: Tìm cạnh của hình lập phương có thể tích bằng 8.

Giải

Gọi cạnh của hình lập phương là x, điều kiện $x > 0$.

Từ giả thiết, ta có:

$$x^3 = 8 = 2.2.2 \Rightarrow x = 2.$$

Vậy, cạnh hình lập phương bằng 2.

Nhận xét: Khi làm quen với khái niệm căn bậc hai, chúng ta nhớ rằng:

$$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}\text{, với } a \geq 0.$$

Vậy, đối với phương trình $x^3 = 8$, ta cũng có kí hiệu:

$$x = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2.$$

Từ đó, ta có định nghĩa căn bậc ba:

Định nghĩa: **Căn bậc ba của một số a, kí hiệu $\sqrt[3]{a}$, là một số mà luỹ thừa bậc ba của nó bằng a**

$$x = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow x^3 = a \text{ (suy ra } (\sqrt[3]{a})^3 = a\text{)}.$$

Thí dụ 1: Ta có:

$\sqrt[3]{8} = 2$ vì $2^3 = 8$.

$\sqrt[3]{0,027} = 0,3$ vì $(0,3)^3 = 0,027$.

$\sqrt[3]{-125} = -5$ vì $(-5)^3 = -125$.

$\sqrt[3]{\dfrac{64}{343}} = \dfrac{4}{7}$ vì $\left(\dfrac{4}{7}\right)^3 = \dfrac{4^3}{7^3} = \dfrac{64}{343}$.

Tóm lại, với mọi $a \in \mathbf{R}$ luôn tồn tại $\sqrt[3]{a}$.

- Nếu $a > 0$ thì $\sqrt[3]{a} > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì $\sqrt[3]{a} < 0$.
- Nếu $a = 0$ thì $\sqrt[3]{a} = 0$.

Chú ý: Chúng ta đều biết rằng:

$$a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$$

do đo, ta ghi nhận được hai kết quả:

$$\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}.$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \text{ với } b \neq 0.$$

Thí dụ 2: Thực hiện phép tính:

a. $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{-3}$.

b. $(\sqrt[3]{-2} + 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}.18.(-3)} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

b. Ta biến đổi:

$$(\sqrt[3]{-2} + 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) = (\sqrt[3]{-2} + 1)[(\sqrt[3]{-2})^2 - \sqrt[3]{-2} + 1]$$
$$= (\sqrt[3]{-2})^3 + 1 = -2 + 1 = -1.$$

Nhận xét: Như vậy:

1. Trong lời giải của câu a), chúng ta đã sử dụng kết quả:
$$\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{abc}.$$
2. Trong lời giải của câu b), chúng ta đã sử dụng hằng đẳng thức:
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Nhớ rằng, ngoài ra ta còn có:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Thí dụ 3: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt[3]{2x+1} = 3$. b. $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^2-1}$.

Giải

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$(\sqrt[3]{2x+1})^3 = 3^3 \Leftrightarrow 2x + 1 = 27 \Leftrightarrow 2x = 26 \Leftrightarrow x = 13.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 13.

b. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$(\sqrt[3]{x+1})^3 = (\sqrt[3]{x^2-1})^3 \Leftrightarrow x + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x + 1 = (x-1)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = −1 và x = 2.

2. CĂN BẬC N

Căn bậc n ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$) của một số a là một dãy mà luỹ thừa n bằng a.

Tổng quát:

- ***Đối với căn bậc lẻ (n = 2k+1):*** Mọi số đều có một căn bậc lẻ duy nhất. Căn bậc lẻ của số dương là dương, của số 0 là 0, của số âm là âm.

  Kí hiệu: $\sqrt[2k+1]{a}$ là giá trị của căn bậc lẻ

- ***Đối với căn bậc chẵn (n = 2k):*** Số âm không có căn bậc chẵn. Số 0 có căn bậc chẵn là 0. Số dương có hai căn bậc chẵn là hai số đối nhau.

  Kí hiệu: $\sqrt[2k]{a}$ và - $\sqrt[2k]{a}$ (trong đó $\sqrt[2k]{a} \geq 0$) là giá trị của các căn bậc chẵn của một số a không âm.

Thí dụ 4: Thực hiện các phép tính:

a. $A = \sqrt[4]{81} - \sqrt[3]{27}$.

b. $B = \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Giải

a. Ta có:

$$A = \sqrt[4]{81} - \sqrt[3]{27} = \sqrt[4]{3.3.3.3} - \sqrt[3]{3.3.3} = 0.$$

b. Ta có:

$$B = \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt[4]{4-2.2\sqrt{3}+3} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính:

a. $A = \sqrt[3]{-64} + \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8}$.

b. $B = \sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-128}$.

c. $C = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)(4 - 2\sqrt{3})}$.

Giải

a. Ta có:

$$A = \sqrt[3]{-64} + \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} = -4 + 3 - 2 = -3.$$

b. Ta có:

$$B = \sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-128} = 5 - \sqrt[3]{27.2} - \sqrt[3]{-64.2} = 5 - 7\sqrt[3]{2}$$

c. Ta có:

$$C = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)(4 - 2\sqrt{3})} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)(3 - 2\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)^3} = \sqrt{3} - 1.$$

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để thực hiện các phép tính chúng ta mới chỉ sử dụng tới định nghĩa của căn bậc ba. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng các hằng đẳng thức bậc ba, bao gồm:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b).$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b).$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính:

a. $A = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$.

b. $B = (\sqrt[3]{5} - 1)(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5} + 1)$.

c. $C = (1 - \sqrt[3]{3})^3 + (1 + \sqrt[3]{3})^3$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$A = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})[(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2] = (\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{2})^3$$

$$= 3 + 2 = 5.$$

b. Ta biến đổi:

$$B = (\sqrt[3]{5} - 1)[(\sqrt[3]{5})^2 - \sqrt[3]{5} + 1] = (\sqrt[3]{5})^3 - 1 = 5 - 1 = 4.$$

c. Ta biến đổi:

$$C = (1 - \sqrt[3]{3} + 1 + \sqrt[3]{3})^3 - 3(1 - \sqrt[3]{3})(1 + \sqrt[3]{3})(1 - \sqrt[3]{3} + 1 + \sqrt[3]{3})$$

$$= 2^3 - 3[1 - (\sqrt[3]{3})^2].2 = 8 - 6 + 6\sqrt[3]{9} = 2 + 6\sqrt[3]{9}.$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}.$$

Giải

Ta có:

$$\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^3 = \frac{5\sqrt{5} - 15 + 3\sqrt{5} - 1}{8} = \frac{8\sqrt{5} - 16}{8} = \sqrt{5} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 4. Biết rằng nếu $a = b$ thì $a^3 = b^3$ và ngược lại $a^3 = b^3$ thì $a = b$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \text{ với } b \neq 0.$$

Giải

Ta có:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \frac{(\sqrt[3]{a})^3}{(\sqrt[3]{b})^3} = \frac{a}{b}.$$

Vậy:

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \text{ (đpcm).}$$

Chú ý: Chúng ta đều biết tới phương pháp nhân liên hợp để khử căn bậc hai ở mẫu, và câu hỏi được đặt ra là " *Với căn bậc ba thì sao ?* ", câu trả lời là " *Cũng nhân liên hợp* ", tuy nhiên ở đây:

$a + b$ có liên hợp là $a^2 - ab + b^2$ và ngược lại.

$a - b$ có liên hợp là $a^2 + ab + b^2$ và ngược lại.

Ví dụ 5. Khử căn thức ở mẫu:

a. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$.   b. $\dfrac{6}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}$.

Giải

a. Thực hiện phép nhân liên hợp, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2}$$
$$=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}.$$

b. Thực hiện phép nhân liên hợp, ta được:

$$\frac{6}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}=\frac{6(\sqrt[3]{5}+1)}{(\sqrt[3]{5}+1)(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1)}=\frac{6(\sqrt[3]{5}+1)}{5+1}=\sqrt[3]{5}+1.$$

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để thực hiện khử căn thức ở mẫu chúng ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp. Tuy nhiên, ta còn có thể trình bày theo phương pháp tách, cụ thể:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{3-2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$$
$$=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}.$$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau:

a. $x^6-5x^3-24=0$.

b. $3-\sqrt[3]{3x+6}=0$.

c. $\sqrt[3]{2x+1}-1=2x$.

Giải

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^6+3x^3-8x^3-24=0\Leftrightarrow x^3(x^3+3)-8(x^3+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^3+3)(x^3-8)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3=-3\\x^3=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt[3]{-3}\\x=2\end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x=\sqrt[3]{-3}$ và $x=2$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt[3]{3x+6} = 3 \Leftrightarrow 3x + 6 = 3^3 \Leftrightarrow 3x = 21 \Leftrightarrow x = 7.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 7$.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt[3]{2x+1} = 2x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x+1})^3 = (2x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = (2x+1)^3 \Leftrightarrow (2x+1)[(2x+1)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ (2x+1)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ 2x+1=1 \\ 2x+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1/2 \\ x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = 0$ và $x = -1$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Hãy xây dựng khái niệm căn bậc ba của một số.

Câu hỏi 2: Phát biểu định nghĩa căn bậc ba của một số.

Câu hỏi 3: Nêu kết quả tổng quát trên **R**.

Câu hỏi 4: Phát biểu định nghĩa căn bậc n của một số (nêu các trường hợp căn bậc lẻ và căn bậc chẵn).

IV. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1. Thực hiện phép tính:

a. $A = \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{8}$.

b. $B = \sqrt[3]{-125} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{2}$.

c. $C = \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{27} - 3\sqrt[3]{3}$.

Bài tập 2. Thực hiện phép tính:

a. $A = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}$.

b. $B = (\sqrt[3]{3} - 1)^3 + (\sqrt[3]{3} + 1)^3$.

c. $C = (\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1)$.

d. $D = (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$.

Bài tập 3. Rút gọn các biểu thức:

a. $A = (\sqrt[3]{a} + 1)^3 - (\sqrt[3]{a} - 1)^3$.

b. $B = \dfrac{1 + a}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1}$.

c. $C = \sqrt[3]{1 - x^3 + 3x(x - 1)}$.

Bài tập 4. Giải các phương trình:

a. $2 + \sqrt[3]{x + 5} = 0$.

b. $3 - \sqrt[3]{2x - 7} = 0$.

c. $\sqrt[3]{x^6 + 6x^4} = x^2 + 2$.

d. $\sqrt[3]{x - 1} + 1 = x$.

e. $\sqrt[3]{x + 5} - \sqrt[3]{x - 5} = 1$.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta có:

$$A = \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{8} = 4 - 10 - 2 = -8.$$

b. Ta có:

$$B = \sqrt[3]{-125} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{2} = -5 + 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} - 5.$$

c. Ta có:

$$C = \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{27} - 3\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} - 3 - \sqrt[3]{3} = -3.$$

Bài tập 2.

a. Ta có:

$$A = \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)(3 + 2\sqrt{2})} = \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)(2 + 2\sqrt{2} + 1)}$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)^3} = \sqrt{2} + 1.$$

b. Ta có:

$$B = (\sqrt[3]{3} - 1 + \sqrt[3]{3} + 1)^3 - 3(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{3} - 1 + \sqrt[3]{3} + 1)$$

$$= (2\sqrt[3]{3})^3 - 6\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{9} - 1) = 24 - 18 + 6\sqrt[3]{3} = 6 + 6\sqrt[3]{3}.$$

c. Ta có:

$$C = (\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 - 1 = 3 - 1 = 2.$$

d. Ta có:

$$D = (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = (\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = 3 - 2 = 1.$$

Bài tập 3.

a. Ta có:

$$A = [(\sqrt[3]{a} + 1) - (\sqrt[3]{a} - 1)]^3 + 3(\sqrt[3]{a} + 1)(\sqrt[3]{a} - 1)[(\sqrt[3]{a} + 1) - (\sqrt[3]{a} - 1)]$$

$$= (2)^3 + 6(\sqrt[3]{a^2} - 1) = 2 + 6\sqrt[3]{a^2}.$$

b. Ta có:

$$B = \frac{1 + a}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1} = \frac{(1 + \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1)}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1} = 1 + \sqrt[3]{a}.$$

c. Ta có:

$$C = \sqrt[3]{1 - x^3 + 3x(x - 1)} = \sqrt[3]{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$$

$$= \sqrt[3]{(1 - x)^3} = 1 - x.$$

Bài tập 4.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt[3]{x + 5} = -2 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x + 5})^3 = (-2)^3$$

$$\Leftrightarrow x + 5 = -8 \Leftrightarrow x = -13.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -13$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt[3]{2x - 7} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x - 7})^3 = 3^3 \Leftrightarrow 2x - 7 = 27 \Leftrightarrow x = 17.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 17$.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt[3]{x^6 + 6x^4} = x^2 + 2 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^6 + 6x^4})^3 = (x^2 + 2)^3$$

$$\Leftrightarrow x^6 + 6x^4 = x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$$

$\Leftrightarrow 12x^2 + 8 = 0$, vô nghiệm.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

d. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt[3]{x-1} = x - 1 \Leftrightarrow x - 1 = (x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[(x-1)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ (x-1)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 1 = 1 \\ x - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm $x = 1$, $x = 2$ và $x = 0$.

Nhóm Cự Môn chúng tôi đã và đang theo đuổi mục tiêu viết ra được một bộ giáo trình Toán phổ thông (PTCS và PTTH) với nội dung bao gồm:

1. *Đầy đủ các kiến thức theo quy chuẩn của BGD và ĐT.*
2. *Kiến thức được trình bày theo kiểu đặt vấn đề và các yêu cầu hành động để thay đổi kiểu dạy học theo lối thụ động.*
3. *Sau mỗi chủ đề kiến thức đều có phần hướng dẫn sử dụng máy tính Casio Fx570 Ms hoặc các phần mềm máy vi tính để trợ giúp cho việc giải toán (giảm thiểu các bài toán tính toán phức tạp).*
4. *Những chủ đề kiến thức cần thiết sẽ được chia nhỏ thành phần lý thuyết và các dạng toán để giúp cho việc dạy và học nâng cao.*
5. *Có đĩa CD kèm theo để:*
   - *Giáo viên có thể thực hiện bài giảng bằng máy chiếu.*
   - *Học sinh có thể học ngay trên máy tính.*

Do vậy, chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp có tính xây dựng của tất cả các Thày giáo, Cô giáo, Nhà nghiên cứu, Phụ huynh và Học sinh trên toàn quốc.

CHỦ ĐỀ NÂNG CAO

SƠ LƯỢC VỀ PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN BẬC HAI

I. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Chúng ta hẳn đã được làm quen với việc giải phương trình chứa căn bậc hai và thấy rằng có hai phương pháp thường được sử dụng, bao gồm:

1. Phương pháp biến đổi tương đương.
2. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Để giúp các em học sinh muốn nâng cao kiến thức của bản thân, ở phần này sẽ trình bày cụ thể hai phương pháp trên.

1. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Ta sử dụng các phép biến đổi cơ bản sau:

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \geq 0$ với điều kiện f(x), g(x) có nghĩa.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \text{ co nghia } \& \ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases},$$

không cần đặt điều kiện $f(x) \geq 0$.

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x), g(x), h(x) \text{ có nghĩa} \\ f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} = h(x) \end{cases}.$$

Trước tiên, chúng ta xem xét các phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+6}$. b. $\sqrt{4x+2} = \sqrt{x^2+4x+1}$.

Giải

a. Biến đổi tương đương phương trình:

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+6} \Leftrightarrow 2x+1 = x+6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 2x+1 = x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 5.

b. Biến đổi tương đương phương trình:

$$\sqrt{4x+2} = \sqrt{x^2+4x+1} \Leftrightarrow 4x+2 = x^2+4x+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2 \geq 0 \\ 4x+2 = x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Nhận xét: Trong lời giải của ví dụ trên:

1. Ở câu a), chúng ta lựa chọn điều kiện là $x + 6 \geq 0$ hoặc $2x + 1 \geq 0$ là như nhau về độ phức tạp.
2. Ở câu b), dễ thấy rằng để giảm độ phức tạp chúng ta lựa chọn điều kiện là $4x + 2 \geq 0$.

Nhận xét trên sẽ rất có ích với các phương trình chứa tham số. Ví dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

Ví dụ 2. Cho phương trình:

$$\sqrt{m-2x} = \sqrt{x-1}. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m=5.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

Phương trình tương đương với:

$$m - 2x = x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ m-2x = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \dfrac{m+1}{3} \end{cases}. \qquad (I)$$

a. Với m=5, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, với $m = 5$ phương trình có nghiệm $x = 2$.

b. Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow (I) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \frac{m+1}{3} \geq 1 \Leftrightarrow m+1 \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Vậy, với $m \geq 2$ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 3. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{2m+x-x^2}.$$

Giải

Phương trình được biến đổi tương đương về dạng:

$$-x^2+3x-2=2m+x-x^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-x^2+3x-2\ge 0\\ x=m+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1\le x\le 2\\ x=m+1\end{cases}.$$

Do đó để phương trình có nghiệm, điều kiện là:

$$1\le m+1\le 2 \Leftrightarrow 0\le m\le 1.$$

Vậy, với $0\le m\le 1$, phương trình có nghiệm.

Nhận xét: Trong trường hợp, việc lựa chọn hai biểu thức điều kiện là $f(x)\ge 0$ hoặc $g(x)\ge 0$ có độ phức tạp như nhau và đều khó giải, khi đó chúng ta sẽ không đi giải bất phương trình điều kiện mà sử dụng phép thử lại.

Ví dụ 4. Giải phương trình:

$$\sqrt{2x^3-x^2-x+1}=\sqrt{x^3+x^2-1}.$$

Giải

Phương trình được biến đổi tương đương về dạng:

$$2x^3-x^2-x+1=x^3+x^2-1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x^2-1\ge 0\\ 2x^3-x^2-x+1=x^3+x^2-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x^2-1\ge 0\\ x^3-2x^2-x+2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x^2-1\ge 0\\ (x^2-1)(x-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3+x^2-1\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=2$.

Chú ý: Như vậy, phương pháp giải các phương trình vô tỉ dạng $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ đã được miêu tả khá chi tiết. Tiếp theo, chúng ta quan tâm tới các phương trình dạng $\sqrt{f(x)}=g(x)$.

Ví dụ 5. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 + x + 2} = 3 - x.$$

Giải

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 3 - x \ge 0 \\ x^2 + x + 2 = (3 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ 7x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1.

Nhận xét: Trong lời giải của ví dụ trên, việc sử dụng phép bình phương để khử căn chúng ta thu nhận được một phương trình bậc nhất (đã được học cách giải). Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp chúng ta sẽ nhận được một phương trình bậc cao và khi đó cần vận dụng tốt phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để đưa phương trình về dạng tích.

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau:

a. $x - \sqrt{2x + 3} = 0.$ b. $x^2 + \sqrt{x + 1} = 1.$

Giải

a. Phương trình tương đương với:

$$\sqrt{2x + 3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 2x + 3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 1 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ (x + 1)(x - 1 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 3.

b. Phương trình tương đương với:

$$\sqrt{x + 1} = 1 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ x + 1 = (1 - x^2)^2 \quad (*) \end{cases}$$

Giải phương trình (*):

$$(x + 1) = (x + 1)^2(x - 1)^2 \Leftrightarrow (x + 1)[(x + 1)(x - 1)^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^3 - x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4} \\ x = -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = -1 \end{array} \right.$$

Kiểm tra các nghiệm tìm được cho điều kiện $1 - x^2 \geq 0$, ta thu được các nghiệm $x = 0$, $x = -1$, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$, $x = -1$, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Nhân xét: Trong lời giải của ví dụ trên:

1. Ở câu a), để giải phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$ chúng ta đã sử dụng phương pháp tách để phân tích đa thức VT về dạng tích, tuy nhiên cách làm hay nhất vẫn là biến đổi về dạng bình phương, cụ thể:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 2 \\ x - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right..$$

2. Ở câu b), để giải phương trình (*) chúng ta đã lần lượt sử dụng phép nhóm nhân tử chung, tiếp tới là khai triển đa thức để nhận được nhân tử chung x, và cuối cùng là sử dụng phép biến đổi về dạng bình phương.

Ví dụ 7. Giải phương trình:

$$(x + 3)\sqrt{10 - x^2} = x^2 - x - 12.$$

Giải

Điều kiện:

$$10 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{10}. \qquad (*)$$

Nhận xét rằng:

$$x^2 - x - 12 = x^2 - 9 - x - 3 = (x + 3)(x - 4)$$

do đó, phương trình được viết lại:

$$(x + 3)\sqrt{10 - x^2} = (x + 3)(x - 4)$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)[\sqrt{10 - x^2} - (x - 4)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + 3 = 0 & (1) \\ \sqrt{10 - x^2} - (x - 4) = 0 & (2) \end{array}\right..$$

- Giải (1), ta được nghiệm $x = -3$, thoả mãn điều kiện (*).

- Giải (2), bằng phép biến đổi tương đương:

$$\Leftrightarrow \sqrt{10-x^2} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 10-x^2 = (x-4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ (x-1)(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}, \text{vô nghiệm}$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -3$.

Nhận xét: Như vậy, ví dụ trên là một dạng mở rộng, chính vì vậy chúng ta cần thiết lập điều kiện có nghĩa cho phương trình trước khi đi biến đổi nó.

Tiếp theo, chúng ta quan tâm tới các phương trình dạng:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$$

và để tránh phải biến đổi một hệ phức tạp, trong nhiều trường hợp chúng ta đi thiết lập điều kiện có nghĩa cho phương trình trước.

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$. b. $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

Giải

a. **Điều kiện:**

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2. \quad (*)$$

Phương trình tương đương với:

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1})^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x-2+2\sqrt{(x-2)(x+1)} + x+1 = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)(x+1)} = 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ (x-2)(x+1) = (5-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ 9x-27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3, \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 3$.

b. Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0 \\ 1-2x \ge 0 \\ 1-x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)} = x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \le \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ 2x+1 \ge 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 0.

Chú ý: Nếu các em học sinh thấy cách thực hiện như vậy hơi gò bó thì có thể trình bày như sau:

Điều kiện:

$$\begin{cases} x+4 \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \\ 1-2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x < \frac{1}{2}.$$

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{7}{2} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 0.

2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Phương pháp dùng ẩn phụ là việc sử dụng ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình đa thức với một ẩn phụ.

Ta có các dạng đặt ẩn phụ thường gặp sau:

1. Nếu bài toán chứa $\sqrt{f(x)}$ và f(x) ta đặt $t=\sqrt{f(x)}$, điều kiện tối thiểu $t \ge 0$, khi đó $f(x) = t^2$.
2. Nếu bài toán chứa $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt{g(x)}$ và $\sqrt{f(x)}.\sqrt{g(x)} = k$ không đổi, ta đặt $t=\sqrt{f(x)}$, điều kiện tối thiểu $t \ge 0$, khi đó $\sqrt{g(x)} = \frac{k}{t}$.
3. Nếu bài toán chứa $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$, $\sqrt{f(x).g(x)}$ và $f(x) + g(x) = k$ không đổi, ta đặt $t=\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$, khi đó $\sqrt{f(x).g(x)} = \frac{t^2-k}{2}$.

Chú ý: Với các phương trình căn thức chứa tham số sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, nhất thiết ta phải đi tìm *điều kiện đúng* cho ẩn phụ.

Để tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ đối với các phương trình vô tỉ, ta có thể lựa chọn một trong các phương pháp sau:

- Sử dụng tam thức bậc hai, thí dụ:
$$t=\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{(x-1)^2+4} \ge 2.$$
- Sử dụng các bất đẳng thức, thí dụ:
$$t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}$$

Khi đó:

$$t^2=(\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x})^2 \le (3+x+6-x)(1+1) = 18$$
$$\Rightarrow t \le 3\sqrt{2}.$$
$$t^2=(\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x})^2=3+x+6-x+2\sqrt{(3+x)(6-x)} \ge 9$$
$$\Rightarrow t \ge 3$$

Vậy, điều kiện cho ẩn phụ t là $3 \le t \le 3\sqrt{2}$.

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

a. $4x + \sqrt{2x-1} = 5$.

b. $2(x^2-2x) + \sqrt{x^2-2x-3} - 9 = 0$.

Giải

a. Đặt $t = \sqrt{2x-1}$, $t \ge 0$.

Khi đó, phương trình được viết lại:

$$2(2x-1)+\sqrt{2x-1}-3=0 \Leftrightarrow 2t^2+t-3=0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2-2+t-1=0 \Leftrightarrow (t-1)[2(t+1)+1]=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{3}{2} \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=1$$

$$\Leftrightarrow 2x-1=1 \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

b. Đặt $t=\sqrt{x^2-2x-3}$, $t \geq 0$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$2(x^2-2x-3)+\sqrt{x^2-2x-3}-3=0 \Leftrightarrow 2t^2+t-3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{3}{2} \text{ (l)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3}=1 \Leftrightarrow x^2-2x-4=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \pm \sqrt{5}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

Nhận xét: Chúng ta cũng có thể lựa chọn cách trình bày:

1. Ở câu a), khi đặt $t=\sqrt{2x-1}$, suy ra:

$$t^2=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(t^2+1).$$

2. Ở câu b), khi đặt $t=\sqrt{x^2-2x-3}$, suy ra:

$$t^2=x^2-2x-3 \Leftrightarrow x^2-2x=t^2+3.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình:

$$(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=-3.$$

Giải

Điều kiện:

$$\frac{x+1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x \leq -1 \end{array}\right.. \qquad (*)$$

Đặt $t = (x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$, suy ra $(x-3)(x+1) = t^2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = -1 \end{array}\right..$$

- Với $t = -3$, ta được:

$$(x\text{-}3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ (x-3)(x+1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x^2-2x-12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x = 1 \pm \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{13}\text{, thoả mãn điều kiện (*).}$$

- Với $t = -1$, ta được:

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ (x-3)(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x^2-2x-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{5}\text{, thoả mãn điều kiện (*).}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1-\sqrt{13}$ và $x = 1-\sqrt{5}$.

Chú ý: Nhiều em học sinh khi thực hiện bài toán trên mắc phải sai lầm từ phép biến đổi:

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = \sqrt{(x-3)(x+1)},$$

đó đương nhiên không phải là phép biến đổi tương đương.

Cần nhớ rằng:

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = \begin{cases} \sqrt{(x-3)(x+1)} & \text{nếu } x-3>0 \\ -\sqrt{(x-3)(x+1)} & \text{nếu } x-3<0 \end{cases}.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình:

$$\sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}} + \sqrt{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = 4.$$

Giải

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét rằng:

$$\sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}\,.\sqrt{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \sqrt{(\sqrt{x+9})^2-(\sqrt{x})^2}$$

$$= \sqrt{x+9-x} = \sqrt{9} = 3$$

do đó, nếu đặt $t = \sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}$, $t \ge 3$, suy ra:

$$\sqrt{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}} = \frac{3}{t}.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t + \frac{3}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 3t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ loại} \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+9}+\sqrt{x} = 9$$

$$\Leftrightarrow x + 9 + x + 2\sqrt{x(x+9)} = 81$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+9)} = 72 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 72 - 2x \ge 0 \\ 4x(x+9) = (72-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 36 \\ x = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 16.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 16$.

Nhận xét: Như vậy, chúng ta đã trình bày ví dụ minh hoạ cho phương pháp đặt ẩn phụ dạng 2. Tiếp theo, chúng ta sẽ minh hoạ ví dụ sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ dạng 3.

Ví dụ 4. Giải phương trình:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} + 8\sqrt{(x+3)(1-x)} = 2.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x + 3 \ge 0 \\ 1 - x \ge 0 \\ (x+3)(1-x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le 1. \qquad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{1-x}$, $t \geq 0$, suy ra:

$$t^2 = x + 3 + 1 - x + 2\sqrt{(x+3)(1-x)} \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(1-x)} = \frac{1}{2}(t^2 - 4).$$

Khi đó phương trình có dạng:

$$t + 8.\frac{1}{2}(t^2 - 4) = 2 \Leftrightarrow 4t^2 + t - 18 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 16 + t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(4t+9) = 0 \overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(1-x)} = \frac{1}{2}(2^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ 1 - x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right., \text{ thoả mãn điều kiện } (*).$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = -3$.

Ví dụ 5. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3.$$

Giải

Đặt $t = x^2 - 3x + 3$, ta có:

$$t = (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

do đó điều kiện cho ẩn phụ t là $t \geq \frac{3}{4}$

Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+3} = 3 \Leftrightarrow t + t + 3 + 2\sqrt{t(t+3)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{t(t+3)} = 3 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t(t+3) = (3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^2\text{-}3x\text{+}3\text{=}1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = 2$.

Ví dụ 6. Giải phương trình:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1. \qquad (*)$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1} = [(3x-2)+2\sqrt{3x^2-5x+2}+(x-1)]-6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1} = (\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1})^2-6.$$

Đặt $t=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}$, $t \geq 1$.

Khi đó:

$$t^2-t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-2 \text{ (l)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$$

$$\Leftrightarrow 3x-2+x-1+2\sqrt{(3x-2)(x-1)}=9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x-2)(x-1)}=6-2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-2x \geq 0 \\ (3x-2)(x-1)=(6-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2-19x+34=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2$, thoả mãn điều kiện (*).

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$.

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Chúng ta hẳn đã được làm quen với việc giải bất phương trình chứa căn bậc hai dạng đơn giản và thấy rằng có hai phương pháp thường được sử dụng, bao gồm:

1. Phương pháp biến đổi tương đương.
2. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Để giúp các em học sinh muốn nâng cao kiến thức của bản thân, ở phần này sẽ trình bày cụ thể hai phương pháp trên.

1. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Ta sử dụng các phép biến đổi cơ bản sau:

Dạng 1: Với dạng:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ 0 \leq f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

Dạng 2: Với dạng:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình:

a. $\sqrt{x-7} > 3$. b. $\sqrt{2x-1} < 1$.

Giải

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$x - 7 > 9 \Leftrightarrow x > 16.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 16$.

b. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $\dfrac{1}{2} \leq x < 1$.

Nhận xét: Như vậy, ví dụ trên chỉ mang tính minh hoạ khởi đầu để chúng ta dần tiếp cận với các bất phương trình vô tỉ phức tạp hơn, vì ở đó bao gồm nhiều bất phương trình bậc cao.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{2(x^2 - 1)} \leq x + 1.$$

Giải

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 0 \leq 2(x^2 - 1) \leq (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ 2(x^2 - 1) \leq (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ |x| \geq 1 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ |x| \geq 1 \\ (x + 1)(x - 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ |x| \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là tập $\{-1\} \cup [1, 3]$.

Nhận xét: Trong lời giải của ví dụ trên, để nhận được các nghiệm của một bất phương trình bậc hai chúng ta sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử rồi lập bảng xét dấu.

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình:

a. $\sqrt{x^2 - 3} > x - 1$.

b. $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} > 2x - 5$.

Giải

a. Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x^2 - 3 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3 > (x-1)^2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < 1 \\ |x| \geq \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\sqrt{3} \\ x > 2 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (2, +\infty)$.

b. Bất phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ -x^2 + 4x - 3 > (2x-5)^2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < 5/2 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 5/2 \\ 5x^2 - 24x + 28 < 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \leq x < \dfrac{5}{2} \\ \begin{cases} x \geq \dfrac{5}{2} \\ 2 < x < \dfrac{14}{5} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{14}{5}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $1 \leq x < \frac{14}{5}$.

Nhận xét: Như vậy, với bất phương trình dạng $\sqrt{f(x)} > g(x)$ chúng ta thường phải giải một hệ gồm nhiều bất phương trình. Để tránh việc sai sót khi kết hợp nghiệm, chúng ta có thể trình bày theo kiểu chia trường hợp, cụ thể với câu a), ta xét:

Trường hợp 1: Nếu $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Khi đó, ta chỉ cần:

$$x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{3}.$$

Kết hợp với trường hợp đang xét, ta được $x \leq -\sqrt{3}$.

Trường hợp 2. Nếu $x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Khi đó, ta bình phương hai vế:

$$x^2 - 3 > (x - 1)^2 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2, \text{ thoả mãn trường hợp.}$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \le -\sqrt{3}$ hoặc $x > 2$.

<u>Ví dụ 4.</u> Giải bất phương trình:

$$\sqrt{\left|\frac{1}{4} - x\right|} \ge x + \frac{1}{2}.$$

Giải

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{2} \le 0 \\ \left\{\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{2} > 0 \\ \left|\dfrac{1}{4} - x\right| \ge \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\dfrac{1}{2} \\ \left\{\begin{array}{l} x > -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x < \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} - x \ge \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge \dfrac{1}{4} \\ x - \dfrac{1}{4} \ge \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\dfrac{1}{2} \\ \left\{\begin{array}{l} x > -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x < \dfrac{1}{4} \\ x^2 + 2x \le 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge \dfrac{1}{4} \\ x^2 + \dfrac{1}{2} \le 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x \le 0$.

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x \le 0$.

<u>Yêu cầu</u>: Các em học sinh hãy trình bày lại ví dụ trên theo kiểu chia trường hợp.

<u>Ví dụ 5.</u> Giải các bất phương trình:

a. $\sqrt{x + 3} \ge \sqrt{2x - 8} + \sqrt{7 - x}$. b. $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{4x - 1} \le 3\sqrt{x}$.

Giải

a. Điều kiện:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3 \ge 0 \\ 2x - 8 \ge 0 \\ 7 - x \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 4 \le x \le 7. \qquad (*)$$

Bất phương trình tương đương với:

$$(2x - 8) + (7 - x) + 2\sqrt{(2x-8)(7-x)} \le x + 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-8)(7-x)} \le 2 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 30 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 6 \\ x \le 5 \end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được

$$\left[\begin{array}{l} 4 \le x \le 5 \\ 6 \le x \le 7 \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $[4, 5] \cup [6, 7]$.

b. **Điều kiện:**

$$\begin{cases} 5x + 1 \ge 0 \\ 4x - 1 \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{4}. \qquad (*)$$

Bất phương trình tương đương với:

$$3\sqrt{x} + \sqrt{4x-1} \ge \sqrt{5x+1}$$

$$\Leftrightarrow 9x + (4x - 1) + 6\sqrt{x(4x-1)} \ge 5x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x(4x-1)} \ge 1 - 4x \text{ luôn đúng bởi (*)}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \ge \frac{1}{4}$.

<u>Ví dụ 6.</u> Giải các bất phương trình:

a. $\dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} < 3.$ b. $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+1} - 1} > 2x + 2.$

Giải

a. **Điều kiện:**

$$\begin{cases} 1 - 4x^2 \ge 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ 0 < x \le \frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Cách 1: Thực hiện phép nhân liên hợp:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(1 - \sqrt{1-4x^2})(1 + \sqrt{1-4x^2})}{x} < 3(1 + \sqrt{1-4x^2})$$

$$\Leftrightarrow 4x < 3 + 3\sqrt{1-4x^2} \Leftrightarrow 3\sqrt{1-4x^2} > 4x - 3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x-3<0 \\ 1-4x^2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x-3 \ge 0 \\ 9(1-4x^2) > (4x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \dfrac{3}{4} \\ |x| < \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{4} \\ 9(1-4x^2) > (4x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\xleftrightarrow{x \neq 0} \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \le x < 0 \\ 0 < x \le \dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Cách 2: Xét hai trường hợp dựa trên điều kiện.

- Với $-\dfrac{1}{2} \le x < 0$, bất phương trình tương đương:

$$\sqrt{1-4x^2} < 1-3x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x > 0 \\ 1-4x^2 < (1-3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{3} \\ 13x^2 - 6x > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x < 0.$

Kết hợp với điều kiện đang xét được nghiệm là $-\dfrac{1}{2} \le x < 0$.

- Với $0 < x \le \dfrac{1}{2}$, bất phương trình tương đương:

$$\sqrt{1-4x^2} > 1-3x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-3x<0 \\ 1-4x^2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-3x \ge 0 \\ 1-4x^2 > (1-3x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \le \dfrac{1}{3} \\ 13x^2 - 6x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{3} < x \le \dfrac{1}{2} \\ 0 < x \le \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 0 < x \le \dfrac{1}{2}.$

Kết hợp với điều kiện đang xét được nghiệm là $0 < x \le \dfrac{1}{2}$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x+1} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq 2x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \neq 0. \qquad (*)$$

Trục căn thức, ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{2x+1} + 1 > 2x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} > 2x + 1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 4x^2 + 2x < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{2} < x < 0$.

Chú ý: 1. Trong cách giải 2 trong câu a) ta đã dựa vào điều kiện của ẩn số để biến đổi tương đương bất phương trình.

2. Ví dụ tiếp theo minh hoạ việc sử dụng hằng đẳng thức để khử dấu căn.

Ví dụ 7. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} > \frac{3}{2}.$$

Giải

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1} > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} > \frac{3}{2}.$$

Điều kiện:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1. \qquad (*)$$

Khi đó, bất phương trình trở thành:

$$\sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1| > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 \geq 0 \\ 2\sqrt{x-1} > \frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 < 0 \\ 2 > \frac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \forall x.$$

Kết hợp với điều kiện (*) được $x \geq 1$ là nghiệm của bất phương trình.

Nhân xét: Trong ví dụ trên bằng việc thêm bớt 1 vào các biểu thức trong căn, chúng ta đã nhận ra được rằng các biểu thức đó có dạng A^2 để rồi $\sqrt{A^2} = |A|$, tuy nhiên sẽ có những biểu thức như vậy nhưng dưới dạng có ẩn hơn, ví dụ:

$$x + \sqrt{2ax - a^2}$$

các em học sinh hãy thực hiện việc biến nó về dạng A^2.

Ví dụ 8. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq 1 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: Với $x \geq 4$ thì bất phương trình được biến đổi:

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} \geq 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \geq 2\sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} - \sqrt{x-4} \geq \sqrt{x-4} - \sqrt{x-3},$$

luôn đúng vì với $x \geq 4$ ta được VT > 0 và VP < 0.

Vậy, $x \geq 4$, là nghiệm bất phương trình.

Trường hợp 2: Với $x \leq 1$ thì bất phương trình được biến đổi:

$$\sqrt{(1-x)(2-x)} + \sqrt{(1-x)(3-x)} \geq 2\sqrt{(1-x)(4-x)}$$

Với $x = 1$, bất phương trình nghiệm đúng.

Với $x < 1$, bất phương trình có dạng

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} \geq 2\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} - \sqrt{4-x} \geq \sqrt{4-x} - \sqrt{3-x}$$

Nhận xét rằng với $x < 1$ thì VT < 0 và VP > 0, bất phương trình vô nghiệm.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x = 1$ hoặc $x \geq 4$.

Chú ý: 1. Không được nhầm lẫn $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\,.\sqrt{y}$.

Nên nhớ rằng, điều trên chỉ đúng khi x, y ≥ 0, còn với x, y < 0 thì $\sqrt{xy} = \sqrt{-x}\,.\sqrt{-y}$.

2. Phép nhân liên hợp trong nhiều trường hợp tỏ ra rất hiệu quả.

2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Ví dụ 1. Giải bất phương trình:

$$(x-1)\sqrt{2x-1} \le 3(x-1).$$

Giải

Điều kiện:

$$2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{2x-1}$, $t \ge 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^2+1)$.

Khi đó bất phương trình có dạng:

$$[\frac{1}{2}(t^2+1) - 1]t \le 3[\frac{1}{2}(t^2+1) - 1]$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - t + 3 \le 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-1)(t-3) \le 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \le t \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{2x-1} \le 3$$

$\Leftrightarrow 1 \le x \le 5$ thoả mãn điều kiện (*).

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $1 \le x \le 5$.

Chú ý: 1. Ta không thể bình phương hai vế của bất phương trình ban đầu vì chưa khẳng định được dấu của hai vế.

2. Hoàn toàn có thể sử dụng phép biến đổi tương đương để thực hiện ví dụ trên, cụ thể:

$$(x-1)(\sqrt{2x-1} - 3) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ \sqrt{2x-1} - 3 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0 \\ \sqrt{2x-1} - 3 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{2x-1} \leq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ \sqrt{2x-1} \geq 3 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 1 \\ 0 \leq 2x-1 \leq 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ 2x-1 \geq 9 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $1 \leq x \leq 5$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình:

$$(x+1)(x+3) \leq -\sqrt{x^2+4x+5}.$$

Giải

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$(x^2+4x+3) + \sqrt{x^2+4x+5} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+5) + \sqrt{x^2+4x+5} - 2 \leq 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+4x+5}$, $t \geq 1$.

Khi đó bất phương trình có dạng:

$$t^2 + t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+5} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4 \leq 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x = -2$.

Ví dụ 3. Cho bất phương trình:

$$5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} + 4. \quad (1)$$

Điều kiện $x > 0$. (*)

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$5\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) < 2\left(x + \frac{1}{4x}\right) + 4. \quad (2)$$

Đặt :

$$t = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 2\sqrt{\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \sqrt{2},$$

vậy điều kiện là $t \geq \sqrt{2}$. (**)

Ta suy ra:

$$t^2 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{1}{4x} + 1 \Rightarrow x + \frac{1}{4x} = t^2 - 1.$$

Khi đó bất phương trình có dạng:

$$5t < 2(t^2 - 1) + 4 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 2 \\ t < 1/2 \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} t > 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 2.$$

Đặt $X=\sqrt{x}$, $X>0$, khi đó:

$$X + \frac{1}{2X} > 2 \Leftrightarrow 2X^2 - 4X + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X > \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ X < \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} > \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{x} < \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{3}{2} + \sqrt{2} \\ 0 < x < \dfrac{3}{2} - \sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $(0, \frac{3}{2} - \sqrt{2}) \cup (\frac{3}{2} + \sqrt{2}, +\infty)$.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình:

$$x + \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} > 3\sqrt{5}. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện:

$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow |x| > 2. \qquad (*)$$

Trường hợp 1 : Với $x < -2$, bất phương trình vô nghiệm (do vế trái âm).

Trường hợp 2 : Với $x > 2$, bình phương 2 vế phương trình (1) ta được :

$$x^2 + \frac{4x^2}{x^2-4} + \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 45$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-4} + 4.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 45. \qquad (2)$$

Đặt $t = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, $t>0$.

Khi đó bất phương trình (2) có dạng:

$$t^2 + 4t - 45 > 0 \Leftrightarrow t > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} > 5 \Leftrightarrow x^4 - 25x^2 + 100 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 > 25 \\ x^2 < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| > 5 \\ |x| < \sqrt{5} \end{array}\right..$$

Kết hợp với trường hợp đang xét, ta được nghiệm của bất phương trình là:

$(2, \sqrt{5})\cup(5, +\infty)$.

Ví dụ 5. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x} > 1 + \sqrt[3]{x-1}. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện $x \geq 0$. (*)

Ta có:

$$(1) \xleftrightarrow{x>0 \to 1+\sqrt[3]{x-1}>0} x > (1 + \sqrt[3]{x-1})^2$$

$$\Leftrightarrow x > 1 + 2\sqrt[3]{x-1} + (\sqrt[3]{x-1})^2$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - (\sqrt[3]{x-1})^2 - 2\sqrt[3]{x-1} > 0. \qquad (2)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{x>0} t > -1$.

Khi đó bất phương trình (2) có dạng:

$$t^3 - t^2 - 2t > 0 \Leftrightarrow t(t^2 - t - 2) > 0 \Leftrightarrow t(t + 1)(t - 2) > 0$$

$$\xleftrightarrow{t+1>0} t(t-2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 2 \\ t < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x-1} > 2 \\ \sqrt[3]{x-1} < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 > 8 \\ x-1 < 0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{x>0} \left[\begin{array}{l} x > 9 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 9$ hoặc $0 < x < 1$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. CÁC HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Ôn tập các kiến thức trong chương theo các câu hỏi sau:

Câu hỏi 1: Nêu định nghĩa và cho ví dụ về số vô tỉ. Nêu ý nghĩa của các số vô tỉ.

Câu hỏi 2: Nêu định nghĩa và cho ví dụ về số thực. Phát biểu tính chất thứ tự trên **R**. Nêu các phép toán trên R và tính chất của chúng.

Câu hỏi 3: Nêu định nghĩa và cho ví dụ về tập số $\mathbf{R}_+$ và $\mathbf{R}_-$. Chứng minh rằng $\mathbf{R}_+ \cup \mathbf{R}_- = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Câu hỏi 4:

a. Hãy giải thích tại sao ta luôn có:

$$0,(\overline{a_1a_2...a_n}) = \frac{a_1a_2...a_n}{\underbrace{99...9}_{n\text{ số }9}}.$$

b. Nêu phương pháp chung để đổi một số thập phân vô hạn tuần hoàn sau thành phân số.

Câu hỏi 5: Nhắc lại một số tính chất của luỹ thừa bậc hai và chứng minh các tính chất đó.

Câu hỏi 6: Hãy xây dựng khái niệm căn bậc hai của một số. Phát biểu định nghĩa căn bậc hai số học của một số. Nêu kết quả tổng quát trên **R**.

Câu hỏi 7: Hãy xây dựng khái niệm căn bậc ba của một số. Phát biểu định nghĩa căn bậc ba của một số. Nêu kết quả tổng quát trên **R**.

Câu hỏi 8: Phát biểu định nghĩa căn bậc n của một số (nêu các trường hợp căn bậc lẻ và căn bậc chẵn).

Câu hỏi 9: Nêu định nghĩa giác trị tuyệt đối của a. Áp dụng để tính $|2x - 5|$.

Câu hỏi 10:

a. Viết điều kiện của A để $\sqrt{A}$ có nghĩa.

b. Viết hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$. Áp dụng để tính $\sqrt{(2x-1)^2}$

c. Chứng minh rằng $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ với A, B không âm.

Câu hỏi 11: Phát biểu quy tắc khai phương một tích. Lấy ví dụ minh hoạ.

Câu hỏi 12: Phát biểu quy tắc nhân các căn thức bậc hai. Lấy ví dụ minh hoạ.

Câu hỏi 13: Chứng minh rằng với $A \geq 0$, $B > 0$ luôn có:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

Câu hỏi 14: Phát biểu quy tắc khai phương một thương. Lấy ví dụ minh hoạ.

Câu hỏi 15: Phát biểu quy tắc chia hai căn thức bậc hai. Lấy ví dụ minh hoạ.

Câu hỏi 16: Nêu quy tắc đưa một thừa số ra ngoài dấu căn.

Câu hỏi 17: Nêu quy tắc đưa một thừa số vào trong dấu căn.

Câu hỏi 18: Nêu quy tắc khử mẫu của biểu thức lấy căn.

Câu hỏi 19: Nêu quy tắc trục căn thức ở mẫu.

Câu hỏi 20: Viết bảng tóm tắt một số phép tính và phép biến đổi căn bậc hai.

II. BÀI TẬP ÔN TẬP

Bài tập 1. Thực hiện phép tính:

a. $\left(5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{5}\right) : 2\sqrt{5}$.

b. $\left(\sqrt{6} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{8}\right)2\sqrt{6} - 5\sqrt{3}$.

c. $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{3} + 1)^2$.

d. $(3 - \sqrt{3})(-2\sqrt{3}) + (3\sqrt{3} + 1)^2$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{7}{3}\sqrt{5x} - \sqrt{5x} + 8 = \frac{2}{3}\sqrt{5x}$.

b. $\frac{3\sqrt{x} + 1}{7\sqrt{x} - 5} = \frac{8}{15}$.

c. $\sqrt{(2x - 1)^2} = 3$.

Bài tập 3. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\left(\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}-\dfrac{\sqrt{216}}{3}\right)\dfrac{1}{\sqrt{6}}=-1,5.$

b. $\left(\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right):\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=-2.$

c. $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}:\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a-b\ (a,\ b>0,\ a\neq b).$

d. $\left(1+\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)=1-a\ (a>0,\ a\neq 1).$

Bài tập 4. Phân tích thành thừa số:

a. $x-5\sqrt{x}+4;$

b. $4x-\sqrt{x}-3;$

c. $-8x+3\sqrt{x}+5;$

d. $-6\sqrt{x}+8x-14;$

e. $6y^2-5y\sqrt{x}-x;$

f. $x-2\sqrt{x-1}-a^2;$

g. $6\sqrt{xy}-4x\sqrt{x}-9y\sqrt{y}+6xy.$

Bài tập 5. Thực hiện phép tính:

a. $\dfrac{5}{4-\sqrt{11}}+\dfrac{7}{3+\sqrt{7}}-\dfrac{6}{\sqrt{7}-2}-\dfrac{\sqrt{7}-5}{2};$

b. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1};$

c. $\left(\dfrac{9-2\sqrt{14}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{9+2\sqrt{14}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}\right)^2;$

d. $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{|40\sqrt{2}+57|};$

e. $\sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{|12\sqrt{5}+29|}.$

Bài tập 6. Chứng minh các đẳng thức:

a. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right).\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}=\dfrac{2}{a-1}$, với $a>0$; $a\neq 1$.

b. $\dfrac{2}{\sqrt{ab}}:\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)^2-\dfrac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=-1$, với $a>0$, $b>0$; $a\neq b$.

c. $\dfrac{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{\sqrt{ab}+2\sqrt{a}-3\sqrt{b}-6}-\dfrac{6-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+2\sqrt{a}+3\sqrt{b}+6}=\dfrac{a+9}{a-9}$.

Bài tập 7. Giải các phương trình:

a. $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-7}$.

b. $x-\sqrt{4x-20}=20$.

c. $\sqrt{x-2}-3\sqrt{x^2-4}=0$.

d. $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{2x-1}}=2$.

e. $2\sqrt[3]{\dfrac{2x-3}{1-x}}+\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{2x-3}}=3$.

Bài tập 8. Giải phương trình:

$$x+\frac{1}{x}-4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+6=0.$$

Bài tập 9. Xét biểu thức:

$$Q=\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x}\right):\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

a. Rút gọn Q.

b. Chứng minh $Q\geq 0$.

c. So sánh Q với $\sqrt{Q}$.

Bài tập 10. Xét biểu thức:

$$A=\left(1+\frac{\sqrt{a}}{a+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{a}-1}-\frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}-a-1}\right).$$

a. Rút gọn A.

b. Tìm các giá trị của a sao cho $A>1$.

c. Tính các giá trị của A nếu $a=1995-2\sqrt{1994}$.

Bài tập 11. Xét biểu thức:

$$M=\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$$

a. Tìm x để M có nghĩa.

b. Rút gọn M.

c. Tìm các giá trị của $x \in \mathbf{Z}$ sao cho $M \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 12. Xét biểu thức:

$$P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}.$$

a. Tìm x để P có nghĩa.

b. Rút gọn P.

c. Tìm các giá trị của x sao cho $P = \frac{1}{2}$;

d. So sánh P với $\frac{2}{3}$.

Bài tập 13. Xét biểu thức:

$$Q = \left(\frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} - 1\right) : \left(\frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3}\right).$$

a. Rút gọn Q.

b. Tìm các giá trị của x để $Q < 1$.

Bài tập 14. Tìm GTLN (nếu có) và GTNN (nếu có) của các biểu thức sau:

a. $8 + 2x^2$; $2x^2 - 5x + 3$; $2x^2 + x$; $-2x^2 + 5x + 1$.

b. $2x - \sqrt{x}$; $3\sqrt{x} - 3x$; $x - 3\sqrt{x} + 2$.

c. $1 + \sqrt{x + 9}$; $\sqrt{2x - 3} - 5$; $1 - 2\sqrt{1 - 3x}$.

d. $\sqrt{4 - x^2}$; $\sqrt{2x^2 - 8x + 6}$; $1 - \sqrt{-x^2 + 2x + 5}$

e. $\frac{1}{2x - 3\sqrt{x} + 1}$; $\frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$; $\frac{1}{3 - \sqrt{1 - x^2}}$; $\frac{1}{x + \sqrt{x} + 1}$

Bài tập 15. Chứng minh các bất đẳng thức:

a. $\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2$ với mọi a.

b. $\sqrt{a - 1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$ với $a \geq 1$.

c. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{2(a + b)\sqrt{ab}}$ với $a \geq 0$; $b \geq 0$.

CHƯƠNG II - HÀM SỐ BẬC NHẤT

Chương này, bao gồm:

1. **Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số**
2. **Hàm số bậc nhất**
3. **Đồ thị của hàm số bậc nhất**
4. **Hệ số góc của đường thẳng. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau**

CHỦ ĐỀ 1 NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHÁI NIỆM HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Chúng ta đã được làm quen với khái niệm hàm số ở lớp 7, cụ thể:

> *Một hàm số f từ tập hợp số X đến tập hợp số Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi giá trị $x \in X$ với một và chỉ một giá trị $y \in Y$.* **Kí hiệu là f(x), x là biến số, y = f(x) là giá trị của hàm số f tại x.**

Thí dụ 1: Chúng ta đã được làm quen với các hàm số:

$y = kx$, *x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau.*

$y = \frac{k}{x}$, *x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau.*

Thí dụ 2: Với hàm số y = 2x, ta nhận thấy:

a. Nó là một quy tắc cho tương ứng với mỗi $x \in \mathbf{R}$ một số duy nhất $y = 2x \in \mathbf{R}$. Vậy y = 2x là một hàm số từ tập hợp **R** đến tập hợp **R**.

b. Bảng một số cặp giá trị tương ứng của chúng là:

x	- 4	- 2	0	1	3	5	7
y	- 8	- 4	0	2	6	10	14

Trên mặt phẳng toạ độ, mỗi cặp số trên (thí dụ (1, 2)) được biểu diễn bởi một điểm, tập hợp tất cả các điểm (x, y = 2x) với $x \in \mathbf{R}$ gọi là *đồ thị* của hàm số y = 2x.

Chú ý: Qua hai thí dụ trên chúng ta đã thấy lại được rằng " *Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức* ". Và một câu hỏi thường được đặt ra là " *Mối quan hệ f cho trước có phải là hàm số không ?* ", khi đó, chúng ta thường dựa vào định nghĩa để trả lời câu hỏi này.

Thí dụ 3: Cho f là một quan hệ từ tập **R** đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu:

a. Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	- 4	- 2	0	1	3	5	7
f(x)	- 9	- 5	- 1	1	5	9	13

b. Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	- 6	- 2	- 1	0	1	1	3
f(x)	8	4	2	- 1	1	6	8

c. Có công thức $y^2 = 4x$.

Giải

a. Có là hàm số, bởi với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng.

b. Không là hàm số, vì với x = 1 ta xác định được hai giá trị khác nhau của f(x) là 1 và 6.

c. Không là hàm số, vì với x = 4 ta được:

$$y^2 = 4.4 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$$

tức là, với x = 4 ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 4 và - 4.

2. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Chúng ta sẽ bắt đầu với các hàm số:

1. Với hàm số y = 8x, ta nhận thấy với $\forall x \in \mathbf{R}$ luôn tìm được giá trị tương ứng của y. Khi đó, ta nói hàm số y = 8x có tập xác định là **R**.

2. Với hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$, ta nhận thấy:

   - Với x = 1 thì $y = \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0}$ không xác định.
   - Với $\forall x \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$ luôn tìm được giá trị tương ứng của y.

   Khi đó, ta nói hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$ có tập xác định là $\mathbf{R}\backslash\{1\}$.

3. Với hàm số $y = \sqrt{2-x}$, ta nhận thấy nó chỉ có nghĩa khi

$$2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

   Khi đó, ta nói hàm số $y = \sqrt{2-x}$ có tập xác định là các số thực $x \leq 2$.

Từ đó, ta thấy:

> ***Tập xác định*** *của hàm số là tập hợp các giá trị của x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.*

Và xuất phát từ định nghĩa trên ta có quy tắc:

Muốn tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$ ta phải đi tìm tất cả các giá trị của x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Thí dụ 4: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = 6x^2$. b. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ c. $y = \sqrt{2x - 3}$.

Giải

a. Ta có ngay, hàm số $y = 6x^2$ có tập xác định là **R**.

b. Điều kiện:

$$x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2.$$

Vậy, hàm số có tập xác định là $\mathbf{R}\backslash\{-2\}$.

c. Điều kiện:

$$2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}.$$

Vậy, hàm số có tập xác định là các số thực $x \geq \dfrac{3}{2}$.

Chú ý: Chúng ta sẽ có riêng một bài toán tìm tập xác định của hàm số.

3. HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN

Chúng ta sẽ bắt đầu với hàm số:

$y = x^2$, có tập xác định là **R**.

1. Trong khoảng (0, 4) cho x các giá trị tăng dần tuỳ ý, chẳng hạn $x = 0, 1, \dfrac{3}{2}, 2,$, khi đó ta có bảng:

x	0	1	3/2	2	
y	0	1	9/4	4	

và nhận thấy rằng các giá trị y của hàm số cũng tăng.

Khi đó, ta nói rằng hàm số $y = x^2$ *đồng biến* trong khoảng (0, 4).

2. Trong khoảng (–6, –2) cho x các giá trị tăng dần tuỳ ý, chẳng hạn $x = -5, -4, -\dfrac{3}{2}, -1,$, khi đó ta có bảng:

x	–5	–4	–3/2	–1	
y	25	16	9/4	1	

và nhận thấy rằng các giá trị y của hàm số giảm.

Khi đó, ta nói rằng hàm số $y = x^2$ *nghịch biến* trong khoảng (–6, –2).

Từ đó, ta có định nghĩa:

1. ***Hàm số đồng biến**: Hàm số $y = f(x)$ là đồng biến trong khoảng $(a ; b)$ nếu với mọi x_1, x_2 thuộc khoảng $(a ; b)$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.*
2. ***Hàm số nghịch biến**: Hàm số $y = f(x)$ là nghịch biến trong khoảng $(a ; b)$ nếu với mọi x_1, x_2 thuộc khoảng $(a ; b)$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.*

Thí dụ 5: Xét tính chất biến thiên của hàm số $y = 2x + 1$.

Giải

Hàm số xác định trong **R**.

Cho x các giá trị thực bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 + 1) - (2x_2 + 1) = 2(x_1 - x_2) < 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

Chú ý:
1. Trong định nghĩa trên, nếu (a; b) là tập xác định của hàm số, ta nói rằng hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trong tập xác định của nó.
2. Chúng ta sẽ có riêng một bài toán xét tính đồng biến, nghịch biến (gọi chung là sự biến thiên) của hàm số.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Các dạng toán liên quan tới kiến thức của chủ đề này, bao gồm:

Dạng 1: Sự xác định một hàm số.

Dạng 2: Tìm tập xác định của hàm số

Dạng 3: Xét sự biến thiên của hàm số.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu khái niệm hàm số. Thế nào là hàm hằng ?

Câu hỏi 2: Hàm số có thể được cho bằng những cách gì ? Cho ví dụ.

Câu hỏi 3: Phát biểu định nghĩa đồ thị hàm số.

Câu hỏi 4: Nêu định nghĩa tập xác định của hàm số và quy tắc để tìm tập xác định của hàm số.

Câu hỏi 5: Phát biểu định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến và cho ví dụ.

Câu hỏi 6: Phát biểu định nghĩa hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trong tập xác định của nó khi nào ?

Bài toán 1

SỰ XÁC ĐỊNH MỘT HÀM SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Muốn xét xem mối quan hệ f từ tập X vào tập Y có phải là hàm số không, chúng ta thường sử dụng định nghĩa hàm số để đưa ra lời kết luận.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho X = {−2, 0, 1, 3, 6}, f là một quan hệ từ tập X đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu:

a. Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	−2	0	1	3	6
f(x)	3	9	4	8	9

b. Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	−2	0	1	−2	6
f(x)	8	2	6	4	0

Giải

a. Có là hàm số, bởi với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng f(x).

b. Không là hàm số, vì với x = −2 ta xác định được hai giá trị khác nhau của f(x) là 8 và 4.

Ví dụ 2: Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = \frac{12}{x}$.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

x	6	−4	2	3	
y = f(x)					1

b. Xác định f(−12), f(24).

Giải

a. Ta có được kết quả:

x	−6	−4	2	3	12
$y = \frac{12}{x}$	−2	−3	6	4	1

b. Ta có:

$$f(-12) = \frac{12}{-12} = -1,$$

$$f(24) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = |2x - 3|$.

a. Tính f(−2), f(8).

b. Tính các giá trị của x ứng với y = −1, y = 3.

Giải

a. Ta lần lượt có:

$$f(-2) = |2(-2) - 3| = |-4 - 3| = |-7| = 7,$$

$$f(8) = |2x - 3| = |2.8 - 3| = |16 - 3| = 13.$$

b. Ta lần lượt có:

- Với y = −1 thì:

$$|2x - 3| = -1, \text{ vô nghiệm bởi } |2x - 3| \geq 0.$$

- Với y = 3 thì:

$$|x - 3| = 3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 3 \\ 2x - 3 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 0 \end{array}\right..$$

Ví dụ 4: Cho hàm số y = 3x − 1. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị âm.

b. y nhận giá trị lớn hơn 5.

Giải

a. Để y nhận giá trị âm điều kiện là:

$$3x - 1 < 0 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}.$$

Vậy, với $x < \frac{1}{3}$ thì y nhận giá trị âm.

b. Để y nhận giá trị lớn hơn 5 điều kiện là:

$$3x - 1 > 5 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy, với x > 2 thì y nhận giá lớn hơn 5.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho X = {−3, −2, −1, 0, 3}, f là một quan hệ từ tập X đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	- 3	- 2	- 1	0	3
f(x)	- 6	- 4	- 2	0	6

Bài tập 2. Cho X = {−4, 3, 5, 7}, f là một quan hệ từ tập X đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	- 4	3	5	7
y	8	8	8	8

Bài tập 3. Cho X = {−4, −2, 0}, f là một quan hệ từ tập X đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	- 4	- 4	- 2	0
y	4	12	6	1

Bài tập 4. Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = \frac{36}{x}$.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

x	- 9	- 6	3	12	
y = f(x)					1

b. Xác định f(- 12), f(72).

Bài tập 5. Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức f(x) = 2x + 9.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

x	- 3	- 1	2	6	
y = f(x)					27

b. Xác định f(- 8), f(7).

Bài tập 6. Cho hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = x^2 - 9$.

a. Tính f(−4), f(−2), f(0), f(1), f(5).

b. Tính các giá trị của x ứng với y = −8, y = −5, y = 0, y = −10.

Bài tập 7. Cho hàm số y = 2x − 6. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị dương.

b. y nhận giá trị nhỏ hơn 3.

Bài tập 8. Cho hàm số y = 6 − 5x. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị âm.

b. y nhận giá trị lớn hơn 1.

Bài tập 9. Cho các hàm số:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \text{ và } g(x) = x^2 - 1.$$

a. Tính $f(-1)$ và $g(\frac{1}{2})$.

b. Tìm số a để $f(a) = g(a)$

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Có là hàm số.

Bài tập 2. Có là hàm số và đây là hàm hằng $y = 8$.

Bài tập 3. Không là hàm số, vì với $x = -4$ ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 4 và 12.

Bài tập 4.

a. Ta có được kết quả:

x	-9	-6	3	12	36
$y = \frac{36}{x}$	-4	-6	12	3	1

b. Ta có $f(-12) = -3$, $f(72) = \frac{1}{2}$.

Bài tập 5. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 6.

a. Ta lần lượt có:

$f(-4) = (-4)^2 - 9 = 16 - 9 = 7$,

$f(-2) = (-2)^2 - 9 = 4 - 9 = -5$,

$f(0) = 0 - 9 = -9$, $f(1) = 1^2 - 9 = 1 - 9 = -8$,

$f(5) = 5^2 - 9 = 25 - 9 = 16$.

b. Ta lần lượt có:

- Với $y = -8$ thì:

$$x^2 - 9 = -8 \Leftrightarrow x^2 = -8 + 9 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

- Với $y = -5$ thì:

$$x^2 - 9 = -5 \Leftrightarrow x^2 = -5 + 9 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

- Với $y = 0$ thì:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

- Với $y = -10$ thì:

$$x^2 - 9 = -10 \Leftrightarrow x^2 = -1, \text{ không tồn tại x.}$$

Bài tập 7.

a. Để y nhận giá trị dương điều kiện là:

$$2x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy, với $x > 3$ thì y nhận giá trị dương.

b. Để y nhận giá trị nhỏ hơn 3 điều kiện là:

$$2x - 6 < 3 \Leftrightarrow 2x < 9 \Leftrightarrow x < \frac{9}{2}.$$

Vậy, với $x < \frac{9}{2}$ thì y nhận giá nhỏ hơn 3.

Bài tập 8.

a. Để y nhận giá trị âm điều kiện là:

$$6 - 5x < 0 \Leftrightarrow 5x > 6 \Leftrightarrow x > \frac{6}{5}.$$

Vậy, với $x > \frac{6}{5}$ thì y nhận giá trị âm.

b. Để y nhận giá trị lớn hơn 1 điều kiện là:

$$6 - 5x > 1 \Leftrightarrow 5x < 5 \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy, với $x < 1$ thì y nhận giá trị lớn hơn 1.

Bài tập 9.

a. Ta có:

$$f(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 6.$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}.$$

b. Ta có:

$$f(a) = 2a^2 - 3a + 1$$

$$g(a) = a^2 - 1.$$

Suy ra:

$$f(a) = g(a) \Leftrightarrow 2a^2 - 3a + 1 = a^2 - 1 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - a + 2 = 0 \Leftrightarrow a(a - 2) - (a - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2)(a - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, với $a = 2$ hoặc $a = 1$ thì $f(a) = g(a)$.

Bài toán 2 — TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Để tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$, ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1. Tìm tập D của x để f(x) có nghĩa, tức là tìm:

$$D = \{x \in R \mid f(x) \in R\}.$$

Phương pháp 2. Tìm tập E của x để f(x) không có nghĩa, khi đó tập xác định của hàm số là $D = R \setminus E$.

Chú ý: Thông thường f(x) cho bởi biểu thức đại số thì:

1. Với $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ điều kiện là

$$\begin{cases} f_1(x), f_2(x) \text{ co nghia} \\ f_2(x) \neq 0 \end{cases}.$$

2. Với $f(x) = \sqrt[2k]{f_1(x)}$ $(k \in Z)$ điều kiện là

$$\begin{cases} f_1(x) \text{ co nghia} \\ f_1(x) \geq 0 \end{cases}.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.   b. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.   c. $y = \dfrac{x}{x^2 - 2x}$.

Giải

a. Hàm số xác định khi:

$x^2 + 1 \neq 0$ luôn đúng.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}$.

b. Hàm số xác định khi:

$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

c. Hàm số xác định khi:

$$x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$.

Nhận xét:

1. Các hàm số trong câu a), b), c) đều có tử số luôn có nghĩa, do đó chỉ cần thiết lập điều kiện cho MS $\neq 0$.
2. Trong câu c), nếu các em học sinh biến đổi hàm số về dạng:

$$y = \frac{1}{x-2}.$$

rồi khẳng định hàm số xác định khi :

$$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

và do đó tập $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$. Đây là lời giải sai vì phép biến đổi hàm số không phải là phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{2-x}$.

b. $y = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$.

Giải

a. Hàm số xác định khi:

$$2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, 2]$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} 3 + x \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-3, 6]$.

Nhận xét: Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ việc tìm tập xác định của hàm số có chứa căn bậc hai dạng đơn giản (gồm việc giải các bất phương trình bậc nhất). Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ cho các biểu thức phức tạp hơn, và ở đây chúng ta cần sử dụng:

- Tính chất :

  $A.B \geq 0 \Leftrightarrow$ A, B cùng dấu.

  $A.B \leq 0 \Leftrightarrow$ A, B trái dấu.

- Hoặc lập bảng xét dấu.

Ví dụ 3: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$. b. $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Giải

a. Hàm số xác định khi:

$$-x^2 + 4x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-3 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \le 0 \\ x-3 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \le x \le 3.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [1, 3]$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x^2 - 3x + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ (x-1)(x-2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \le 0 \\ x-2 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 1 \\ x \le 2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ -1 \le x \le 1 \end{array}\right..$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-1, 1] \cup [2, +\infty)$.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên, để giải các bất phương trình bậc hai chúng ta sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử và vận dụng các điều kiện để $A.B \ge 0$, $A.B \le 0$.

Các em học sinh hãy kiểm tra lại kết quả đó bằng việc lập bảng xét dấu.

Ví dụ 4: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{|x| - 4}$. b. $y = \sqrt{x + 3 + 2\sqrt{x+2}} + \sqrt{2 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}}$.

Giải

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ |x| - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 4.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [0, +\infty)\backslash\{4\}$.

b. Biến đổi tương đương hàm số về dạng:

$$y = \sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+2} + 1} + \sqrt{1 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2} + 1}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x+2} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{1 - x^2} + 1)^2}$$

$$= |\sqrt{x+2} + 1| + |\sqrt{1 - x^2} + 1| = \sqrt{x+2} + \sqrt{1 - x^2} + 2.$$

Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (1 - x)(1 + x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 + x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - x \leq 0 \\ 1 + x \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-1, 1]$.

Nhận xét: Như vậy:

1. Trong lời giải của câu a), ngoài điều kiện để MS $\neq 0$ chúng ta còn cần tới điều kiện để $\sqrt{x}$ có nghĩa. Và trong hệ bất phương trình điều kiện, sở dĩ ta có biến đổi $|x| - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x - 4 \neq 0$ là do điều kiện ở trên ta có $x \geq 0$.
2. Trong lời giải của câu a), với các em học sinh chưa có kinh nghiệm sẽ thiết lập ngay điều kiện có nghĩa là:

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \\ x + 3 + 2\sqrt{x+2} \geq 0 \\ 2 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \geq 0 \end{cases}$$

Ví dụ 5: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$. b. $y = \dfrac{\sqrt{4-x}}{(x-3)\sqrt{x-1}}$.

Giải

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x^2-9>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ (x-3)(x+3)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, 3)$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} 4-x \ge 0 \\ x-3 \ne 0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4 \\ x \ne 3 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \le 4 \\ x \ne 3 \end{cases}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (1, 4] \setminus \{3\}$.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên, đối với các biểu thức $x^2 - 9$ và $x - 1$ ngoài điều kiện để nó có nghĩa trong căn bậc hai chúng ta còn ghép thêm điều kiện để nó có nghĩa khi là mẫu của một hàm phân thức, do đó phải thiết lập $x^2 - 9 > 0$ và $x - 1 > 0$.

Ví dụ 6: Cho hàm số:

$$y = \frac{x+1}{x-m+2}.$$

Tìm m để hàm số xác định trên $[-1, 1)$.

Giải

Hàm số xác định khi:

$$x - m + 2 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne m - 2.$$

Do đó tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}\setminus\{m-2\}$.

Để hàm số xác định trên $[-1, 1)$ điều kiện là:

$$m - 2 \notin [-1, 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2 < -1 \\ m-2 \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$$

Vậy, với $m < 1$ hoặc $m \ge 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 7: Cho hàm số:

$$y=\frac{x+1}{x^2-2(m-1)x+m^2-2m}.$$

Tìm m để hàm số xác định trên (0, 1).

Giải

Hàm số xác định khi:

$$x^2-2(m-1)x+m^2-2m\neq 0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2+2x-2m\neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)(x-m+2)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-m\neq 0\\ x-m+2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq m\\ x\neq m-2\end{cases}.$$

Do đó tập xác định của hàm số là $D = R\backslash\{m-2, m\}$.

Để hàm số xác định trên (0, 1) điều kiện là:

$$m-2, m\notin (0,1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\leq 0\\ m-2\geq 1\\ m-2\leq 0<1\leq m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\leq 0\\ m\geq 3\\ 1\leq m\leq 2\end{array}\right..$$

Vậy, với $m\leq 0$ hoặc $1\leq m\leq 2$ hoặc $m\geq 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên, để $m-2, m\notin (0, 1)$ ta xác định được ba trường hợp là do đánh giá được $m-2<m$ với mọi m, từ đó thiết lập:

- Hai điểm $m-2$ và m nằm bên trái (0, 1) và trong trường hợp này chỉ cần $m<0$.
- Hai điểm $m-2$ và m nằm bên phải (0, 1) và trong trường hợp này chỉ cần $m-2>0$.
- Điểm $m-2$ nằm bên trái (0, 1) và điểm m nằm bên phải (0, 1) vì khoảng cách giữa hai điểm $m-2$ và m bằng 2 đơn vị.

Ví dụ 8: Cho hàm số:

$$y=\sqrt{-x+2m-1}-\frac{1}{\sqrt{x-m+2}}.$$

Tìm m để hàm số xác định trên (0, 1].

Giải

Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases}-x+2m-1\geq 0\\ x-m+2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 2m-1\\ x>m-2\end{cases} \Leftrightarrow m-2<x\leq 2m-1.$$

Do đó tập xác định của hàm số là $D = (m-2, 2m-1]$.

Để hàm số xác định trên (0, 1] điều kiện là:

$$(0, 1] \subseteq (m - 2, 2m - 1] \Leftrightarrow m - 2 \leq 0 < 1 \leq 2m - 1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

Vậy, với $1 \leq m \leq 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.   b. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - x + 3}$.

Bài tập 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x - 1}{2x - 6}$.   b. $y = \dfrac{2x + 1}{2x^2 - x - 1}$.

Bài tập 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x + 2}$.   b. $y = \sqrt{2 - x} + \sqrt{7 + x}$.

Bài tập 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$.   b. $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Bài tập 5. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{1 - x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$.   b. $y = \dfrac{\sqrt{5 - 2x}}{(x - 2)\sqrt{x - 1}}$.

Bài tập 6. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x|x| - 1}}$.   b. $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt[3]{x + 1}}$.

Bài tập 7. Cho hàm số:

$$y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

a. Tìm tập xác định của hàm số.

b. Tính $f(4 + 2\sqrt{3})$, $f(a^2)$ với $a < -2$.

c. Tìm x để $f(x) = \sqrt{3}$.

d. Tìm x để $f(x) = f(x^2)$.

Bài tập 8. Tìm m để hàm số sau xác định trên [0, 1):

$$y = \frac{x+1}{x-2m+1}.$$

Bài tập 9. Tìm m để hàm số sau xác định trên (1, 3):

$$y = \sqrt{-x+2m-1} - \frac{1}{\sqrt{2x-m}}.$$

IV. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Hàm số xác định khi:

$x^2 + 1 \neq 0$, luôn đúng.

Vậy, tập xác định của hàm số là D = **R**.

b. Hàm số xác định khi:

$$x^2 - x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \neq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, tập xác định của hàm số là D = **R**.

Bài tập 2.

a. Hàm số xác định khi:

$2x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Vậy, tập xác định của hàm số là D = **R**\{3}.

b. Hàm số xác định khi:

$$2x^2 - x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ 2x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là D = **R**\{1, $-\frac{1}{2}$}.

Bài tập 3.

a. Hàm số xác định khi:

$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$

Vậy, tập xác định của hàm số là D = [−2, + ∞).

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 7 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 2.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là D = [−7, 2].

Bài tập 4.

a. Hàm số xác định khi:

$$-x^2+5x-6\ge 0 \Leftrightarrow x^2-5x+6\le 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2)\le 0$$

$$\Leftrightarrow 2\le x\le 3.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là D = [2, 3].

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x^2-x+1\ge 0 \\ x+\sqrt{x^2-x+1}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}\ge -x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x<0 \\ \begin{cases} -x\ge 0 \\ x^2-x+1\ge x^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x\le 0 \end{array}\right., \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, tập xác định của hàm số là **R**.

Bài tập 5.

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} 1-x\ge 0 \\ x^2-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ (x-2)(x+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow x<-2.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là D = $(-\infty, -2)$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} 5-2x\ge 0 \\ x-2\ne 0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5/2 \\ x\ne 2 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x\le \dfrac{5}{2} \\ x\ne 2 \end{cases}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là D = $(1, \frac{5}{2}]\setminus\{2\}$.

Bài tập 6.

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x|x|-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x.x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ (x-1)(x+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x-1>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x>1.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là D = $(1, +\infty)$.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} 4-x^2\ge 0 \\ x+1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2)\le 0 \\ x\ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x\le 2 \\ x\ne -1 \end{cases}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là D = $[-2, 2]\setminus\{-1\}$.

Bài tập 7.

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \ne 1.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

b. Ta có:

$$f(4 + 2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + 1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - 1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} + 1}{\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1 + 1}{\sqrt{3} + 1 - 1} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}}.$$

$$f(a^2) = \frac{\sqrt{a^2} + 1}{\sqrt{a^2} - 1} = \frac{|a| + 1}{|a| - 1} \overset{a<-2}{=} \frac{-a + 1}{-a - 1} = \frac{a - 1}{a + 1}.$$

c. Để $f(x) = \sqrt{3}$, điều kiện là:

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \sqrt{3}.\sqrt{x} - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} = \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \Leftrightarrow x = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}}.$$

d. Để $f(x) = f(x^2)$, điều kiện là:

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{x - 1}{x + 1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bài tập 8. Hàm số có nghĩa khi:

$x - 2m + 1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 2m - 1.$

Để hàm số xác định trên $[0, 1)$ điều kiện là:

$$2m-1 \notin [0, 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m - 1 < 0 \\ 2m - 1 \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \frac{1}{2} \\ m \ge 1 \end{array}\right..$$

Bài tập 9. Hàm số có nghĩa khi:

$$\begin{cases} -x + 2m - 1 \ge 0 \\ 2x - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2m - 1 \\ x > \frac{m}{2} \end{cases}.$$

Để hàm số xác định trên $(1, 3)$ điều kiện là:

$$\frac{m}{2} \le 1 < 3 \le 2m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 \\ m \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Bài toán 3

XÉT TÍNH CHẤT BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Để xét tính chất biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trong (a, b), ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa.

Phương pháp 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy $x_1, x_2 \in (a, b)$ với $x_1 \neq x_2$ ta thiết lập tỉ số:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $A > 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$ và $x_1 \neq x_2$ thì hàm số đồng biến trong (a, b).
- Nếu $A < 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$ và $x_1 \neq x_2$ thì hàm số nghịch biến trong (a, b).

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Xét sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = x - 2.$$

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Hàm số xác định trong **R**.

Cho x các giá trị thực bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - 2) - (x_2 - 2) = x_1 - x_2 < 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

Cách 2: Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - 2) - (x_2 - 2)}{x_1 - x_2} = 1 > 0.$$

Vậy, hàm số đồng biến trên **R**.

Tổng quát: Xét sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = ax + b, \text{ với } a \neq 0.$$

Giải

Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = a.$$

Khi đó:

- Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên **R**.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên **R**.

Ví dụ 2: Xét sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = x^2.$$

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Hàm số xác định trong **R**.

Cho x các giá trị thực bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Khi đó:

- Nếu $x_1, x_2 > 0$ (tức là $x \in (0, +\infty)$) thì:

$$x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong $(0, +\infty)$.

- Nếu $x_1, x_2 < 0$ (tức là $x \in (-\infty, 0)$) thì:

$$x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\Leftrightarrow$ hàm số nghịch biến trong $(-\infty, 0)$.

Cách 2: Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2.$$

Khi đó:

- Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.
- Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.

Tổng quát: Xét sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = ax^2, \text{ với } a \neq 0.$$

Giải

Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1^2 - ax_2^2}{x_1 - x_2} = a(x_1 + x_2).$$

Khi đó:

1. Với $a > 0$
   - Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.
   - Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.
2. Với $a < 0$
   - Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(0, +\infty)$.
   - Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty, 0)$.

Ví dụ 3: Xét sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = -x^3.$$

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Hàm số xác định trong **R**.

Cho x các giá trị thực bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = (-x_1^3) - (-x_2^3)$$

$$= x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) > 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số nghịch biến trong tập xác định của nó.

Cách 2: Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-x_1^3) - (-x_2^3)}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 - x_2}$$

$$= -\frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{x_1 - x_2} = -(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) < 0.$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên **R**.

Tổng quát: Xét sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = ax^3, \text{ với } a \neq 0.$$

Giải

Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1^3 - ax_2^3}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$= a(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2).$$

Khi đó:

- Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên **R**.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên **R**.

Ví dụ 4: Xét sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ trong } (0, +\infty).$$

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Cho x các giá trị thực bất kì $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1})(\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1})}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}}$$

$$= \frac{(x_1^2 + 1) - (x_2^2 + 1)}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} < 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

Cách 2: Với $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1^2 + 1) - (x_2^2 + 1)}{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1})} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} > 0$$

Vậy, hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.

Chú ý: Trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng điều kiện $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ để nhận được kết quả $x_1 + x_2 > 0$.

Ví dụ 5: Xét sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = \frac{x}{x - 1} \text{ trong } (1, +\infty).$$

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Cho x các giá trị thực bất kì $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1 - 1} - \frac{x_2}{x_2 - 1} = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} > 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số nghịch biến trong $(1, +\infty)$.

Cách 2: Với $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1}{x_1 - 1} - \frac{x_2}{x_2 - 1}}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0.$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(1, +\infty)$.

Chú ý: Trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng điều kiện $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ để nhận được kết quả $x_1 - 1 > 0$, $x_2 - 1 > 0$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = 2x + 3$.

b. $y = f(x) = 1 - 3x$.

c. $y = f(x) = (m^2 + 1)x - 2$.

d. $y = f(x) = mx + 4$, với $m \neq 0$.

Bài tập 2. Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = 2x^2$ trong $(0, +\infty)$.

b. $y = f(x) = -6x^2$ trong $(0, +\infty)$.

c. $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$.

d. $y = f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

Bài tập 3. Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ trong $(1, +\infty)$.

b. $y = f(x) = \dfrac{x}{2x+3}$ trong $(-\infty, -2)$.

Bài tập 4. Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = \sqrt{x-1}$.

b. $y = f(x) = \sqrt{2-x}$.

Bài tập 5. Xét sự biến thiên của các hàm số:

c. $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ trong $(0, +\infty)$.

d. $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ trong $(-\infty, -2)$.

Bài tập 6. Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = 3x^3$.

b. $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$.

c. $y = f(x) = x^3 + x + 1$.

d. $y = f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.

IV. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Hàm số đồng biến trên **R**.

b. Hàm số nghịch biến trên **R**.

c. Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{[(m^2+1)x_1 - 2] - [(m^2+1)x_2 - 2]}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(m^2+1)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = m^2 + 1 > 0.$$

Vậy, hàm số đồng biến trên **R**.

d. Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(mx_1 + 4) - (mx_2 + 4)}{x_1 - x_2} = m.$$

Khi đó:

- Nếu $m > 0$ thì hàm số đồng biến trên **R**.
- Nếu $m < 0$ thì hàm số nghịch biến trên **R**.

Bài tập 2.

a. Hàm số đồng biến trong $(0, +\infty)$.

b. Hàm số nghịch biến trong $(0, +\infty)$.

c. Hàm số đồng biến trên $(-1, +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty, -1)$.

d. Hàm số đồng biến trên $(-\infty, 2)$ và nghịch biến trên $(2, +\infty)$.

Bài tập 3.

a. Hàm số nghịch biến trên trong $(1, +\infty)$.

b. Hàm số đồng biến trên trong $(-\infty, -2)$.

Bài tập 4.

a. Hàm số có nghĩa khi:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [1, +\infty)$.

Cho x các giá trị thực bất kì $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{x_2 - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{x_2 - 1})(\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1})}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}}$$

$$= \frac{(x_1 - 1) - (x_2 - 1)}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}} < 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

b. Hàm số có nghĩa khi:

$$2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, 2]$.

Với $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{2 - x_1} - \sqrt{2 - x_2}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2 - x_1} - \sqrt{2 - x_2})(\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2})}{(x_1 - x_2)((\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2}))}$$

$$= \frac{(2 - x_1) - (2 - x_2)}{(x_1 - x_2)(\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2})} = -\frac{1}{\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2}} < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trong tập xác định của nó.

Bài tập 5.

a. Hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.

b. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty, -2)$.

Bài tập 6.

a. Hàm số đồng biến trên **R**.

b. Hàm số đồng biến trên **R**.

c. Hàm số đồng biến trên **R**.

d. Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^3 - 3x_1^2 + 6x_1 + 1) - (x_2^3 - 3x_2^2 + 6x_2 + 1)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1^3 - x_2^3) - 3(x_1^2 - x_2^2) + 6(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3(x_1 + x_2) + 6$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - 3(x_1 + x_2) + 6$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 - 6(x_1 + x_2) + 9] + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 3)^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{2} > 0.$$

Vậy hàm số đồng biến trên R.

CHỦ ĐỀ 2 HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Để xây dựng định nghĩa hàm số, chúng ta sẽ bắt đầu với bài toán sau:

Bài toán: Một ôtô từ Hải Phòng đi Hà Nội với vận tốc 60km/h. Ôtô khởi hành ở một địa điểm cách Hải Phòng 8km về phía Hà Nội. Hỏi sau x giờ, ôtô cách Hải Phòng bao nhiêu kilômet ?

Giải

Gọi y là khoảng cách từ ôtô tới Hải Phòng sau x giờ.

Ta có:

$$y = 60x + 8.$$

Như vậy, ta được một tương quan hàm số $y = 60x + 8$, trong đó x là biến số, y là hàm số. Và biểu thức mô tả hàm số này là bậc nhất đối với biến x nên ta gọi đó là *hàm số bậc nhất*.

Từ đó, ta có định nghĩa:

> *Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức:*
>
> $$y = ax + b, \text{ với } a \neq 0,$$
>
> *trong đó a và b là các số thực xác định.*

Thí dụ 1: Với các hàm số:

- $y = 3x - 2$ là một hàm số bậc nhất.
- $y = -6x$ là một hàm số bậc nhất.
- $y = (m - 1)x - 5$ là một hàm số bậc nhất khi $m \neq 1$.
- $y = x^2 + x + 1$ không phải là một hàm số bậc nhất.

Chú ý: Nếu $b = 0$, hàm số có dạng $y = ax$ là hàm số biểu thị sự tương quan tỉ lệ thuận.

2. TÍNH CHẤT

- Hàm số $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị $x \in \mathbf{R}$.
- Trong tập xác định **R**, hàm số $y = ax + b$
  - Đồng biến nếu $a > 0$.
  - Nghịch biến nếu $a < 0$.

Thí dụ 2: Cho hàm số:

$$y = mx - m^2 - x + 1.$$

a. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Tìm m để hàm số nghịch biến trên **R**.

c. Tìm m để đồ thị hàm số đi qua gốc toạ độ.

Giải

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = (m - 1)x - m^2 + 1.$$

a. Hàm số trên là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Vậy, với $m \neq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Hàm số trên nghịch biến trên **R** khi và chỉ khi:

$$m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy, với $m < 1$ hàm số nghịch biến trên **R**.

c. Ta biết gốc toạ độ $O(0, 0)$, do đó đồ thị hàm số đi qua gốc toạ độ khi

$$0 = (m - 1).0 - m^2 + 1 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy, với $m = \pm 1$ đồ thị hàm số đi qua gốc toạ độ.

Chú ý: Trong lời giải câu c), khi $m = 1$ hàm số không còn là hàm số bậc nhất.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hàm số:

$$y = 3x - 2.$$

a. Tìm tập xác định của hàm số.

b. Xét tính biến thiên của hàm số trong tập xác định của nó.

Giải

a. Hàm số xác định trong **R**.

b. Vì $a = 3 > 0$ nên hàm số đồng biến trong **R**.

Ví dụ 2: Cho hàm số:

$$y = mx - \sqrt{1 - m}.$$

a. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Tìm m để hàm số đồng biến trên **R**.

Giải

a. Hàm số trên là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m \leq 1. \qquad (*)$$

Vậy, với $0 \neq m \leq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Hàm số trên đồng biến trên **R** khi:

$m > 0$.

Kết hợp với điều kiện (*), ta được $0 < m \leq 1$.

Vậy, với $0 < m \leq 1$ hàm số đồng biến trên **R**.

Nhận xét: Trong lời giải trên:

- Ở câu a), nhiều em học sinh mắc sai lầm khi chỉ thiết lập điều kiện $m \neq 0$.
- Ở câu b), nhiều em học sinh mắc sai lầm khi thiết lập điều kiện $m > 0$ nhưng lại không kết hợp với (*).

Ví dụ 3: Cho hàm số:

$$y = f(x) = ax, \text{ với } a \neq 0.$$

a. Chứng minh rằng $f(kx_1) = kf(x_1)$ và $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

b. Các hệ thức trong câu a) còn đúng với hàm số:

$$y = g(x) = ax + b, \text{ với } b \neq 0 \text{ hay không ?}.$$

Giải

a. Ta có:

$f(kx_1) = a(kx_1) = akx_1 = k(ax_1) = kf(x_1)$, đpcm.

$f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$, đpcm.

b. Ta lần lượt xét:

- Với hệ thức:

$$g(kx_1) = kg(x_1) \Leftrightarrow a(kx_1) + b = k(ax_1 + b)$$

$$\Leftrightarrow akx_1 + b = akx_1 + bk \Leftrightarrow b(k - 1) = 0 \overset{b \neq 0}{\Leftrightarrow} k = 1.$$

Vậy, hệ thức $g(kx_1) = kg(x_1)$ chỉ đúng với $k = 0$.

- Với hệ thức:

$$g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$$
$$\Leftrightarrow a(x_1 + x_2) + b = (ax_1 + b) + (ax_2 + b)$$
$$\Leftrightarrow ax_1 + ax_2 + b = ax_1 + ax_2 + 2b \Leftrightarrow b = 0, \text{ loại.}$$

Vậy, hệ thức $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$ không đúng.

Ví dụ 4: Cho hai hàm số:

$$f(x) = (m^2 + 1)x - 4 \text{ và } g(x) = mx + 2, \text{ với } m \neq 0.$$

Chứng minh rằng:

a. Các hàm số f(x), f(x) + g(x), f(x) − g(x) là các hàm đồng biến.

b. Hàm số g(x) − f(x) là hàm nghịch biến.

Giải

a. Ta lần lượt xét:

- Hàm số f(x) có hệ số $a = m^2 + 1 > 0$ do đó nó là hàm đồng biến.
- Hàm số:

$$f(x) + g(x) = (m^2 + 1)x - 4 + mx + 2 = (m^2 + m + 1)x - 2.$$

có hệ số:

$$a = m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

do đó nó là hàm đồng biến.

- Hàm số:

$$f(x) - g(x) = (m^2 + 1)x - 4 - (mx + 2) = (m^2 - m + 1)x - 6.$$

có hệ số:

$$a = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

do đó nó là hàm đồng biến.

b. Hàm số:

$$g(x) - f(x) = mx + 2 - [(m^2 + 1)x - 4] = -(m^2 - m + 1)x + 6.$$

có hệ số:

$$a = -(m^2 - m + 1) = -\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] < 0$$

do đó nó là hàm nghịch biến.

Ví dụ 5: Cho hàm số:

$$y = f(x) = ax + b, \text{ với } a \neq 0.$$

a. Chứng minh rằng với một giá trị x_0 tuỳ ý cho trước, bao giờ cũng tìm được hai số m và n sao cho $f(m) < f(x_0) < f(n)$.

b. Chứng minh rằng hàm số bậc nhất không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Giải

a. Ta biết rằng với mỗi x_0 tuỳ ý cho trước, bao giờ cũng có:

$$x_0 - 1 < x_0 < x_0 + 1.$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với a > 0, khi đó hàm số đồng biến, do đó:

$$f(x_0 - 1) < f(x_0) < f(x_0 + 1)$$

từ đó, ta chọn $m = x_0 - 1$ và $n = x_0 + 1$.

Trường hợp 2: Với a < 0, khi đó hàm số nghịch biến, do đó:

$$f(x_0 - 1) > f(x_0) > f(x_0 + 1)$$

từ đó, ta chọn $m = x_0 + 1$ và $n = x_0 - 1$.

b. Giả sử trái lại hàm số có:

- Giá trị lớn nhất $f(x_1)$ ứng với x_1.
- Giá trị nhỏ nhất $f(x_2)$ ứng với x_2.

Theo kết quả câu a), luôn tìm được hai số m và n sao cho:

$f(x_1) < f(n) \Rightarrow f(x_1)$ không phải là giá trị lớn nhất.

$f(x_2) > f(m) \Rightarrow f(x_2)$ không phải là giá trị nhỏ nhất.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu định nghĩa hàm số bậc nhất và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Nêu các tính chất của hàm số bậc nhất. Cho ví dụ về một hàm số bậc nhất đồng biến và một hàm số bậc nhất nghịch biến.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng trong tập xác định **R**, hàm số y = ax + b đồng biến nếu a > 0 và nghịch biến nếu a < 0.

Câu hỏi 4: Chứng minh rằng hàm số y = ax + b (a ≠ 0) không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Một ôtô vận tốc 50km/h khởi hành từ bến xe phía Nam cách Hà Nội 5km và đi về phía Nghệ An (bến xe nằm trên đường Hà Nội - Nghệ An). Hỏi sau khi khởi hành x giờ, xe cách Hà Nội bao nhiêu ?

Bài tập 2. Cho các hàm số:

a. $y = 5x + \sqrt{3}$.

b. $y = 2 - \sqrt[3]{5}x$.

c. $y = -\frac{1}{2}x + 6$.

d. $y = 3(x - 2) + x$.

e. $y = -\frac{1}{x} + 3$.

f. $y = 2\sqrt{x} + 8$.

Trong các hàm số trên hàm số nào là hàm số bậc nhất ? Xét sự biến thiên của các hàm số bậc nhất đó.

Bài tập 3. Cho hàm số:

$$y = (m - 1)x + \sqrt{m}.$$

a. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Tìm m để hàm số nghịch biến trên **R**.

Bài tập 4. Tìm m để các hàm số sau là hàm số bậc nhất:

a. $y = mx + 6$.

b. $y = m^2x + \sqrt{3} - x$.

c. $y = mx + \sqrt{m+2}$.

d. $y = (m^2 - m)x^2 + mx + 8$.

Bài tập 5. Cho hai hàm số:

$$f(x) = (m^2 + 5)x - 3 \text{ và } g(x) = 2mx + 1, \text{ với } m \neq 0.$$

Chứng minh rằng:

a. Các hàm số f(x), f(x) + g(x), f(x) – g(x) là các hàm đồng biến.

b. Hàm số g(x) – f(x) là hàm nghịch biến.

Bài tập 6. Cho hàm số

$$y = (m - 1)x + 2m - 3.$$

a. Tìm m để hàm số là đồng biến, nghịch biến, không đổi.

b. Chứng tỏ rằng khi m thay đổi đồ thị hàm số luôn đi qua 1 điểm cố định.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Gọi y là khoảng cách từ ôtô tới Hà Nội sau x giờ. Ta có:

$y = 50x + 5$.

Bài tập 2.

a. Hàm số $y = 5x + \sqrt{3}$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = 5 > 0$ nên nó là hàm số đồng biến.

b. Hàm số $y = 2 - \sqrt[3]{5}x$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = -\sqrt[3]{5} < 0$ nên nó là hàm số nghịch biến.

c. Hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 6$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = -\frac{1}{2} < 0$ nên nó là hàm số nghịch biến.

d. Hàm số $y = 3(x - 2) + x = 4x - 6$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = 4 > 0$ nên nó là hàm số đồng biến.

e. Không là hàm số bậc nhất.

f. Không là hàm số bậc nhất.

Bài tập 3.

a. Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \neq 1. \qquad (*)$$

Vậy, với $0 \leq m \neq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Hàm số đã cho nghịch biến trên **R** khi:

$$m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được $0 \leq m < 1$.

Vậy, với $0 \leq m < 1$ hàm số nghịch biến trên **R**.

Bài tập 4.

a. $m \neq 0$.

b. $m \neq \pm 1$.

c. $-2 \leq m \neq 0$.

d. Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m - 1) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right. \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

Bài tập 5. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 6.

a. Ta có:

- Hàm số là đồng biến khi và chỉ khi:

$$m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

- Hàm số là nghịch biến khi và chỉ khi:

$$m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

- Hàm số là hàm hằng khi và chỉ khi:

$$m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

b. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua, khi đó:

$$y_0 = (m - 1)x_0 + 2m - 3, \text{ với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 2)m - x_0 - y_0 - 3 = 0, \text{ với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ x_0 + y_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -1 \end{cases}.$$

Vậy, đồ thị hàm số luôn đi qua điểm cố định M(-2, -1).

CHỦ ĐỀ 3 ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax, a \neq 0$

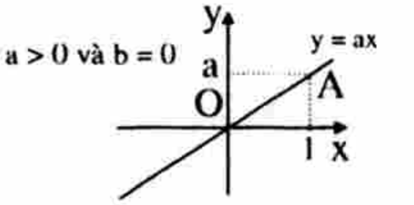
Ở lớp 7, chúng ta đã biết đến kết quả:

> *Đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng đi qua gốc độ và điểm A(1, a).*

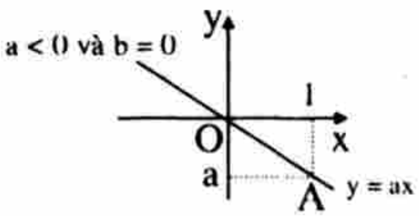
Như vậy, để vẽ đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$), ta thực hiện:

- Xác định vị trí điểm A(1, a).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số $y = ax$.

Ta có minh hoạ:



Đường thẳng $y = ax$ nằm trong góc phần tư (I) và phần tư (III)



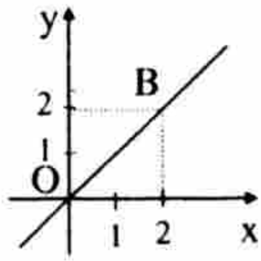
Đường thẳng $y = ax$ nằm trong góc phần tư (II) và phần tư (IV)

Thí dụ 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x$.

Giải

Để vẽ đồ thị hàm số $y = x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(1, 1) (hoặc có thể B(2, 2)).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số $y = x$.



Nhận xét:
1. Đồ thị hàm số $y = x$ chính là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III.
2. Đồ thị hàm số $y = -x$ chính là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax + b, a \neq 0$

Chúng ta sẽ bắt đầu với thí dụ sau:

Thí dụ 2: Cho các hàm số:

$$y = f(x) = 2x,\ \ y = g(x) = 2x - 1,\ y = h(x) = 2x + 2.$$

a. Với $x = -2; 0; 1; 2; 3$ hãy tính các giá trị tương ứng $f(x), g(x), h(x)$.

b. Có nhận xét gì về giá trị của các hàm số $f(x), g(x), h(x)$ ứng với cùng một giá trị của biến số x, từ đó đưa ra kết luận về đồ thị các hàm số $y = g(x)$ và $y = h(x)$.

Giải

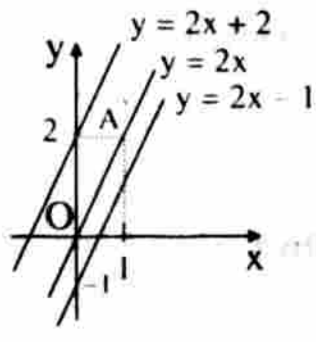
a. Ta lập bảng:

x	−2	0	1	2	3
f(x)	−4	0	2	4	6
g(x)	−5	−1	1	3	5
h(x)	−2	2	4	6	8

b. Từ bảng, ta nhận thấy với bất kì hoành độ nào thì

- Tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ cũng nhỏ hơn tung độ tương ứng của điểm trên đường thẳng $y = 2x$ là 1 đơn vị.
- Tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = 2x + 2$ cũng lớn hơn tung độ tương ứng của điểm trên đường thẳng $y = 2x$ là 2 đơn vị.

Vậy, ta thấy:



- Đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ là một đường thẳng song song với đường thẳng $y = 2x$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng −1.
- Đồ thị hàm số $y = 2x + 2$ là một đường thẳng song song với đường thẳng $y = 2x$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Vậy, ta có kết quả:

> *Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b. Đường thẳng này*
>
> – *Song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$.*
>
> – *Trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.*

Từ kết quả trên ta thấy "*Nếu đã có đồ thị hàm số $y = ax$*" thì đồ thị hàm số $y = ax + b$ $(b \neq 0)$ được suy ra bằng cách:

- Xác định vị trí điểm $M(0, b)$.
- Đường thẳng qua M song song với đường thẳng $y = ax$ chính là đồ thị hàm số $y = ax + b$.

3. CÁCH VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC NHẤT

Vì đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng nên muốn vẽ ta chỉ cần xác định hai điểm phân biệt bất kì trên đường thẳng đó.

Thí dụ 3: Cho hàm số:

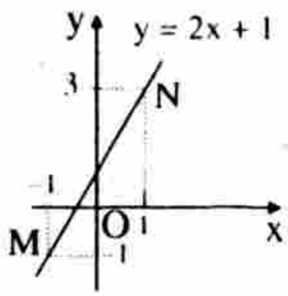
$$y = 2x + 1.$$

a. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Tìm tung độ giao điểm của trục Oy với đồ thị hàm số.

c. Tìm hoành độ giao điểm của trục Ox với đồ thị hàm số.

Giải



a. Ta lấy hai điểm thuộc đồ thị hàm số là $M(-1, -1)$ và $N(1, 3)$. Khi đó đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua M và N (hình vẽ).

b. Đồ thị cắt trục Oy tại A có:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2.0 + 1 = 1 \Rightarrow A(0, 1).$$

c. Đồ thị cắt trục Ox tại B có:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow B(-\frac{1}{2}, 0).$$

Chú ý: Khi vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$, $a \neq 0$

1. Ta nên chọn hai điểm có toạ độ chẵn.
2. Thông thường, ta chọn hai điểm $A(0 ; b)$ và $B(-\frac{b}{a} ; 0)$ theo thứ tự là giao điểm của đồ thị với trục Oy và Ox nếu hai điểm đó không nằm quá xa gốc toạ độ (thí dụ $y = x + 2005$) hoặc toạ độ của chúng không quá phức tạp trong tính toán (thí dụ $y = \sqrt[3]{2}x + \sqrt{89}$).

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

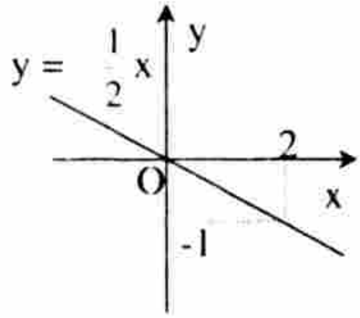
<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho hàm số:

$$y = -\frac{1}{2}x.$$

a. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Xác định toạ độ điểm B thuộc đồ thị hàm số sao cho $x_B = 4y_B + 2$.

Giải



a. Ta lấy thêm điểm A có:

$$x = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}.2 = -1.$$

b. B thuộc đồ thị hàm số, suy ra:

$$y_B = -\frac{1}{2}x_B. \quad (1)$$

Thay $x_B = 4y_B + 2$vào (1), ta được:

$$y_B = -\frac{1}{2}(4y_B + 2) \Leftrightarrow y_B = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_B = 4(-\frac{1}{3}) + 2 = -\frac{1}{3}.$$

Vậy, điểm $B(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ là điểm cần tìm.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy đồ thị của các hàm số:

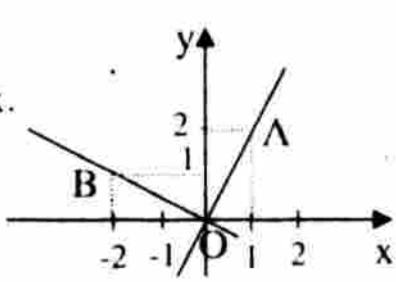
$$y = 2x \text{ và } y = -\frac{1}{2}x.$$

Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này ?

Giải

Để vẽ đồ thị hàm số y = 2x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(1, 2).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số y = 2x.



Để vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm B(–2; 1).
- Nối O với B ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$.

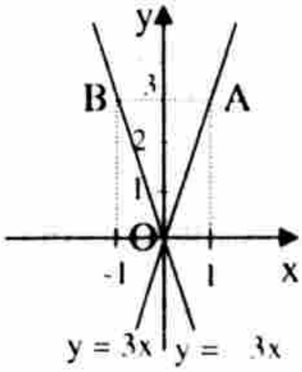
Nhận xét rằng, đồ thị của hai hàm số này vuông góc với nhau.

Ví dụ 2: Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy đồ thị của các hàm số:

$y = 3x$ và $y = -3x$.

Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này ?

Giải



Để vẽ đồ thị hàm số $y = 3x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(1, 3).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số $y = 3x$.

Để vẽ đồ thị hàm số $y = -3x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm B(–1, 3).
- Nối O với B ta được đồ thị hàm số $y = -3x$.

Nhận xét rằng, đồ thị của hai hàm số này đối xứng với nhau qua Oy.

Nhận xét: 1. Ta biết rằng:

$$|3x| = \begin{cases} 3x & \text{khi } x \geq 0 \\ -3x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Do đó, nếu lấy hai phần đồ thị là:

- Phần đồ thị của hàm số $y = 3x$ trong góc phần tư thứ I.
- Phần đồ thị của hàm số $y = -3x$ trong góc phần tư thứ II.

ta nhận được đồ thị của hàm số $y = |3x|$.

2. Từ đó, để vẽ đồ thị hàm số $y = |ax|$ ta thực hiện như sau:

- Vẽ tia OA, với $A(x_A, ax_A)$, $x_A > 0$.
- Vẽ tia OB, với $B(-x_A, ax_A)$.

hoặc chỉ cần vẽ tia OA sau đó lấy đối xứng OA qua Oy.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = ax$. Hãy xác định hệ số a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(3, 2).

b. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

Giải

a. Vì điểm A(3, 2) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$2 = a.3 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}.$$

Vậy hàm số có dạng $y = \frac{2}{3}x$.

b. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV, ta có ngay $a = -1$.

Ví dụ 4: Đồ thị của hàm số y = ax nằm ở những góc phần tư nào của mặt phẳng toạ độ Oxy, nếu:

a. $a > 0$. b. $a < 0$.

Giải

a. Với $a > 0$, ta có nhận xét rằng với điểm $A(x_A, y_A)$ thuộc đồ thị thì:

$y_A = ax_A \Rightarrow x_A$ và y_A cùng dấu

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ I, III.

b. Với $a < 0$, ta có nhận xét rằng với điểm $A(x_A, y_A)$ thuộc đồ thị thì:

$y_A = ax_A \Rightarrow x_A$ và y_A trái dấu

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ II, IV.

Ví dụ 5: Cho hàm số:

$$y = -x + 3.$$

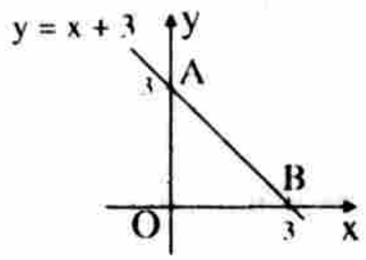
a. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung và trục hoành. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Gọi A và B theo thứ tự là hai giao điểm nói trên. Tính diện tích ΔOAB (O là gốc toạ độ).

c. Gọi α là góc nhọn tạo bởi đồ thị hàm số với trục Ox. Tính $tg\alpha$, suy ra số đo góc α.

d. Bằng đồ thị tìm x để $y > 0$, $y \le 0$.

Giải



a. Đồ thị cắt trục Oy tại A có:

$x = 0 \Rightarrow y = -0 + 3 = 3 \Rightarrow A(0, 3)$.

Đồ thị cắt trục Ox tại B có:

$y = 0 \Rightarrow 0 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow B(3, 0)$.

b. Ta có:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA.OB = \frac{1}{2}.3.3 = \frac{9}{2} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

c. Trong ΔOAB, ta có $\widehat{ABO} = \alpha$, suy ra:

$$tg\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0.$$

d. Từ đồ thị suy ra:

- $y > 0 \Leftrightarrow x < 3$, ứng với phhần đồ thị phía trên trục Ox.
- $y \le 0 \Leftrightarrow x \ge 3$, ứng với phhần đồ thị phía dưới trục Ox.

Ví dụ 6: Cho các hàm số:

$$y = 2x - 1,\ \ y = 2 - x,\ \ y = 3 - 2x.$$

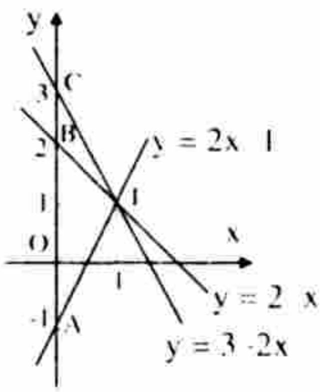
a. Vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục toạ độ.

b. Có nhận xét gì về đồ thị của các hàm số này ?

Giải

a. Ta lần lượt vẽ:

- Với đồ thị $y = 2x - 1$ lấy hai điểm $A(0, -1)$ và $A_0(\frac{1}{2}, 0)$. Nối A và A_0 được đồ thị cần dựng.
- Với đồ thị $y = 2 - x$ lấy hai điểm $B(0, 2)$ và $B_0(2, 0)$. Nối B và B_0 được đồ thị cần dựng.
- Với đồ thị $y = 3 - 2x$ lấy hai điểm $C(0, 3)$ và $C_0(\frac{3}{2}, 0)$. Nối C và C_0 được đồ thị cần dựng.



b. Đồ thị của các hàm số này đồng quy tại điểm I(1, 1).

Ví dụ 7: Cho hàm số:

$$y = ax - 3a.$$

a. Xác định giá trị của a để đồ thị hàm số đi qua điểm A(0, 4). Vẽ đồ thị hàm số với a vừa tìm được.

b. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng tìm được trong a).

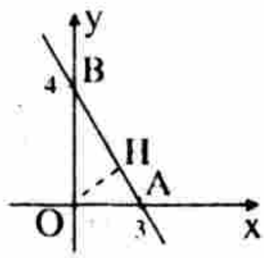
Giải

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(0, 4) khi và chỉ khi:

$$4 = a.0 - 3a \Leftrightarrow 3a = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}.$$

Vậy, hàm số có dạng $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

Để vẽ đồ thị hàm số ta lấy thêm điểm B(3, 0).



b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng.

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{4.3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}.$$

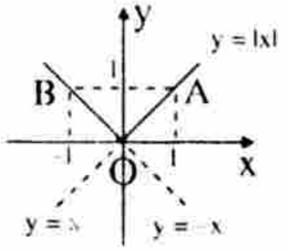
Vậy, khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng bằng $\frac{12}{5}$.

Ví dụ 8: Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a. $y = |x|$. b. $y = |x - 2|$. c. $y = |x - 1| + 2$.

Giải

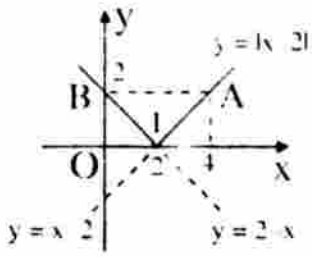
a. Ta biến đổi:



$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x \leq 0 \end{cases}.$$

Do đó, đồ thị hàm số là hai tia OA (với A(1, 1)) và OB (với B(−1, 1)).

b. Ta biến đổi:

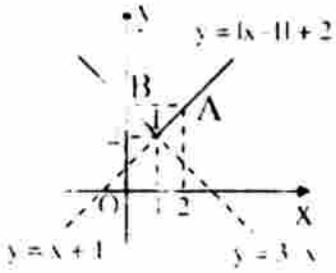


$$y = |x - 2|$$

$$= \begin{cases} x - 2 & \text{nếu } x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 & \text{nếu } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}$$

Do đó, đồ thị hàm số là hai tia IA (với I(2, 0) và A(4, 2)) và IB (với B(0, 2)).

c. Ta biến đổi:



$$y = |x - 1| + 2 = \begin{cases} x - 1 + 2 & \text{nếu } x \geq 1 \\ -(x - 1) + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 3 - x & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$$

Do đó, đồ thị hàm số là hai tia IA (với I(1, 2) và A(2, 3)) và IB (với B(0, 3)).

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) được vẽ như thế nào ?

Câu hỏi 2: Đồ thị của hàm số $y = ax$ nằm ở những góc phần tư nào của mặt phẳng toạ độ Oxy, nếu:

a. $a > 0$.

b. $a < 0$.

Câu hỏi 3: Nêu vị trí tương đối của đồ thị hàm số $y = ax + b$ với đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) ?

Câu hỏi 4: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số bậc nhất.

Câu hỏi 5: Nêu cách vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = |x|$. b. $y = |x - a|$. c. $y = |x| + b$.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = 4x$.

b. $y = x + 3$.

c. $y = -x + 6$.

d. $y = -3x-3$.

e. $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = ax$. Hãy xác định hệ số a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1, 8)$.

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(\frac{3}{4}, -3)$.

c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = (2a - 3)x$. Hãy xác định a, để:

a. Hàm số luôn đồng biến ? Nghịch biến ?

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2, 3)$.

c. Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2})$.

d. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp b), c), d).

Bài tập 4. Cho hàm số:

$$y = 2ax - 3a.$$

a. Xác định a biết rằng đồ thị hàm số trên đi qua điểm $M(2 ; 3)$.

b. Vẽ đồ thị hàm số tìm được trong a).

c. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng tìm được trong a).

Bài tập 5. Cho hàm số:

$$y = ax + b.$$

a. Xác định a và b biết rằng đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

b. Vẽ đồ thị hàm số tìm được trong a).

c. Tính diện tích tam giác được tạo bởi đồ thị hàm số trong a) và các trục toạ độ.

Bài tập 6. Cho hàm số $y = |a - 1|x$. Hãy xác định a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1, 3).

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm $B(-\frac{1}{2}, 8)$.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

Bài tập 7. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = |x|$.

b. $y = |2x - 1|$.

c. $y = |x| + 2$.

d. $y = \left|\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right|$.

e. $y = \left|-\frac{x}{2} + 2\right|$.

Bài tập 8. Tìm tập hợp các điểm M(x, y) sao cho:

a. $y < x + 2$.

b. $y \le -x + 1$.

c. $y \ge -2x + 2$.

d. $\begin{cases} y \le x \\ y \le -2x + 4 \\ y \ge -x + 1 \end{cases}$.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2. *(Học sinh tự vẽ hình)*

a. Vì điểm A(1, 8) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$8 = a.1 \Leftrightarrow a = 8.$$

Vậy hàm số có dạng $y = 8x$.

b. Vì điểm $B(\frac{3}{4}, -3)$ thuộc đồ thị hàm số nên:

$$-3 = a.\frac{3}{4} \Leftrightarrow a = -4.$$

Vậy hàm số có dạng $y = -4x$.

c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III, ta có ngay $a = 1$.

Bài tập 3. *(Học sinh tự vẽ hình)*

a. Hàm số luôn đồng biến khi và chỉ khi:

$$2a - 3 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}.$$

Hàm số luôn nghịch biến khi và chỉ khi:

$$2a - 3 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{3}{2}.$$

b. Vì điểm A(2, 3) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$3 = (2a - 3)2 \Leftrightarrow 4a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}.$$

Vậy hàm số có dạng $y = \frac{3}{2}x$.

c. Vì điểm $B(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2})$ thuộc đồ thị hàm số nên:

$$-\frac{1}{2} = (2a - 3).\frac{5}{4} \Leftrightarrow 10a = 13 \Leftrightarrow a = \frac{13}{10}.$$

Vậy hàm số có dạng $y = -\frac{2}{5}x$.

d. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV, ta có:

$$2a - 3 = -1 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy hàm số có dạng $y = -x$.

Bài tập 4.

a. Vì điểm M(2 ; 3) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$3 = 2a.2 - 3a \Leftrightarrow a = 3.$$

Do đó, hàm số có dạng $y = 6x - 9$.

b. Ta lấy hai điểm A(0, –9) và $B(\frac{3}{2}, 0)$ – *Học sinh tự vẽ hình.*

c. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng.

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{9.\frac{3}{2}}{\sqrt{9^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{27}{\sqrt{333}} = \frac{9}{\sqrt{37}}.$$

Vậy, khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng bằng $\dfrac{9}{\sqrt{37}}$.

Bài tập 5. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 6. *(Học sinh tự vẽ hình)*

a. Vì điểm A(1, 3) thuộc đồ thị hàm số nên:

$$3 = |a - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 = 3 \\ a - 1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -2 \end{array}\right..$$

Vậy hàm số có dạng y = 3x.

b. Vì điểm $B(-\frac{1}{2}, 8)$ thuộc đồ thị hàm số nên:

$$8 = |a - 1|.(-\frac{1}{2}) \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại a.

Bài tập 7. Tham khảo ví dụ 8.

Bài tập 8. *(Học sinh tự vẽ hình)*

a. Thực hiện vẽ đồ thị hàm số $y = x + 2$.

Khi đó, tập hợp các điểm M(x, y) thoả mãn $y < x + 2$ nằm phía dưới đồ thị hàm số.

b. Thực hiện vẽ đồ thị hàm số $y = -x + 1$.

Khi đó, tập hợp các điểm M(x, y) thoả mãn $y \leq -x + 1$ nằm phía dưới đồ thị hàm số kể cả đồ thị hàm số.

c. Thực hiện vẽ đồ thị hàm số $y = -2x + 2$.

Khi đó, tập hợp các điểm M(x, y) thoả mãn $y \geq -2x + 2$ nằm phía trên đồ thị hàm số kể cả đồ thị hàm số.

d. Thực hiện vẽ đồ thị các hàm số $y = x$, $y = -2x + 4$, $y = -x + 1$.

Khi đó, tập hợp các điểm M(x, y) thoả mãn hệ thuộc phần mặt phẳng giới hạn bởi ba đồ thị trên.

b. Để vẽ đồ thị hàm số ta lấy hai điểm A(0, 2) và B(2, 0). Nối A và B ta được đồ thị cần vẽ.

Khi đó:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB = \frac{1}{2}.2.2 = 2.$$

Chú ý: Ta có, các kết quả:

1. Với điểm $A(0, y_A)$ thì $OA = |y_A|$.
2. Với điểm $A(x_A, 0)$ thì $OA = |x_A|$.
3. Với điểm $A(x_A, y_A)$ thì $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$.

3. ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

Dựa trên kết quả đã biết:

> *Hai đường thẳng $y = ax$ và $y = a'x$ với $a \neq a'$ luôn cắt nhau tại gốc toạ độ O.*

Chúng ta, thu được kết quả sau:

> *Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b$ cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$.*
>
> *Đặc biệt nếu $a \neq a'$ và $b = b'$, chúng cắt nhau tại một điểm trên Oy.*

Thí dụ 4: Cho hai đường thẳng:

$$(d_1): y = 2x + 1 \text{ và } (d_2): y = x + 1.$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng và vẽ hai đường thẳng này trên cùng một hệ trục toạ độ.

b. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua I và có hệ số góc bằng –4.

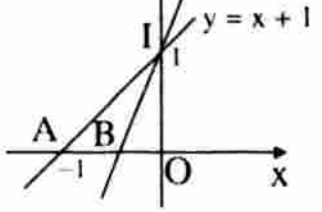
c. Lập phương trình đường thẳng (d') đi qua I và song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 9$.

Giải

a. Nhận xét rằng:

- Đường thẳng (d_1) có $a_1 = 2$ và $b_1 = 1$.
- Đường thẳng (d_2) có $a_2 = 1$ và $b_2 = 1$.

Suy ra:



$a_1 \neq a_2$ và $b_1 = b_2$

$\Rightarrow (d_1)$ và (d_2) cắt nhau tại điểm I trên Oy.

Giả sử giao điểm của hai đường thẳng có toạ độ $I(0, y_0)$, vì I thuộc (d_1) (hoặc (d_2)) nên:

$$y_0 = 2.0 + 1 \Leftrightarrow y_0 = 1 \Rightarrow I(0, 1).$$

b. Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng –4, có phương trình:

$$(d): y = -4x + b.$$

Vì I thuộc đường thẳng (d) nên:

$$1 = -4.0 + b \Leftrightarrow b = 1.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d): $y = -4x + 1$.

c. Đường thẳng (d') song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 9$, có phương trình:

$$(d'): y = \frac{1}{2}x + b, \text{ với } b \neq 9.$$

Vì I thuộc đường thẳng (d') nên:

$$1 = \frac{1}{2}.0 + b \Leftrightarrow b = 1.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d'): $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Nhận xét: Trong lời giải của thí dụ trên:

1. Ở câu a), dựa trên nhận xét (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm I trên Oy nên ta mới giả sử $I(0, y_0)$.

   Trong trường hợp tổng quát, với hai đường thẳng:

   $$(d_1): y = a_1x + b_1 \text{ và } (d_2): y = a_2x + b_2 \ (a_1 \neq a_2)$$

   ta giả sử toạ độ giao điểm $I(x_0, y_0)$, rồi nhận xét:

   $$I \in (d_1) \Rightarrow y_0 = a_1x_0 + b_1. \quad (1)$$

   $$I \in (d_2) \Rightarrow y_0 = a_2x_0 + b_2. \quad (2)$$

   Từ (1) và (2), suy ra:

   $$a_1x_0 + b_1 = a_2x_0 + b_2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

   Thay x_0 và (1) (hoặc (2)) ta nhận được giá trị của y_0, từ đó suy ra toạ độ điểm I.

Nhận xét: Lời giải của ví dụ trên, minh hoạ phương pháp tìm số đo của góc tạo bởi một đường thẳng với tia Ox trong các trường hợp $a > 0$ và $a < 0$.

Ví dụ 3: Lập phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\frac{4}{3}$ và:

a. Đi qua điểm $M(-1, -1)$.

b. Chắn trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 24.

c. Khoảng cách từ O đến (d) bằng $\frac{12}{5}$.

Giải

Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\frac{4}{3}$ có phương trình:

$$(d): y = \frac{4}{3}x + b.$$

a. Vì $M(-1, -1)$ thuộc (d) nên:

$$-1 = \frac{4}{3}.(-1) + b \Leftrightarrow b = 1.$$

Vậy, ta được (d): $y = \frac{4}{3}x + 1$.

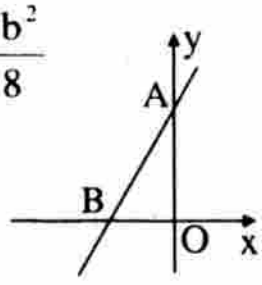
b. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}.0 + b = b$, do đó $A(0, b)$.
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{4}{3}.x + b \Leftrightarrow x = -\frac{3b}{4}$, do đó $B(-\frac{3b}{4}, 0)$.

Diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2}.|b|.\left|-\frac{3b}{4}\right| = \frac{3b^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 64 \Leftrightarrow b = \pm 8.$$



Khi đó:

- Với $b = 8$, ta được đường thẳng (d_1): $y = \frac{4}{3}x + 8$.

- Với $b = -8$, ta được đường thẳng (d_2): $y = \frac{4}{3}x - 8$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

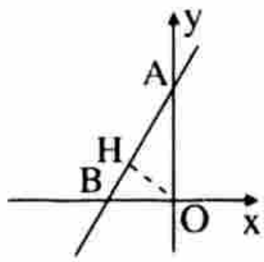
c. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}.0 + b = b$, do đó $A(0, b)$.
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{4}{3}.x + b \Leftrightarrow x = -\frac{3b}{4}$, do đó $B(-\frac{3b}{4}, 0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}$$



$$\Leftrightarrow \frac{12}{5} = \frac{|b|.\left|-\frac{3b}{4}\right|}{\sqrt{b^2 + \left(-\frac{3b}{4}\right)^2}} = \frac{3|b|}{5}$$

$\Leftrightarrow |b| = 4 \Leftrightarrow b = \pm 4$.

Khi đó:

- Với $b = 4$, ta được đường thẳng (d_3): $y = \frac{4}{3}x + 4$.
- Với $b = -4$, ta được đường thẳng (d_4): $y = \frac{4}{3}x - 4$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_3) và (d_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: Qua lời giải của ví dụ trên, ta ghi nhận kết quả " *Mọi đường thẳng có hệ số góc k luôn có phương trình y = kx + **b*** ". Khi đó, để xác định phương trình đường thẳng chúng ta chỉ cần xác định b.

Ví dụ 4: Cho đường thẳng:

(Δ): $y = x + 6$.

Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và:

a. Đi qua điểm $M(1, 2)$.

b. Chắn trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 2.

c. Khoảng cách từ O đến (d) bằng $2\sqrt{2}$.

Giải

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) có phương trình:

(d): $y = x + b$.

a. Vì M(1, 2) thuộc (d) nên:

$$2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1.$$

Vậy, ta được (d): $y = x + 1$.

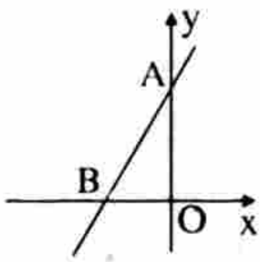
b. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = x + b \Leftrightarrow x = -b$, do đó B(−b, 0).

Diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2}.|b|\,.\,|-b| = \frac{b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = \pm 2.$$



Khi đó:

- Với $b = 2$, ta được đường thẳng (d_1): $y = x + 2$.
- Với $b = -2$, ta được đường thẳng (d_2): $y = x - 2$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = x + b \Leftrightarrow x = -b$, do đó B(−b, 0).

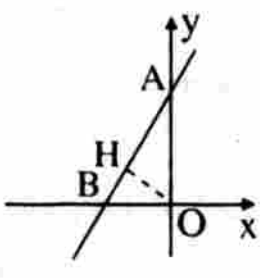
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \frac{|b|.|-b|}{\sqrt{b^2 + (-b)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow |b| = 4 \Leftrightarrow b = \pm 4.$$



Khi đó:

- Với $b = 4$, ta được đường thẳng (d_3): $y = x + 4$.

- Với $b = -4$, ta được đường thẳng (d_4): $y = x - 4$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_3) và (d_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: Qua lời giải của ví dụ trên, ta ghi nhận kết quả " *Mọi đường thẳng song song với đường thẳng $y = ax + m$ luôn có phương trình $y = ax + \underline{b}$* ". Khi đó, để xác định phương trình đường thẳng chúng ta chỉ cần xác định b.

Ví dụ 5: Lập phương trình đường thẳng (d), biết (d) đi qua điểm M(1, 2) và chắn trên hai trục toạ độ những đoạn bằng nhau.

Giải

Đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): y = ax + b.$$

Vì M(1, 2) thuộc (d) nên:

$$2 = a + b \Leftrightarrow a = 2 - b. \qquad (1)$$

Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được $A(0, b)$ và $B(-\frac{b}{a}, 0)$.

Với điều kiện OA = OB, suy ra:

$$|b| = \left|-\frac{b}{a}\right| \Leftrightarrow |b| = \left|\frac{b}{b-2}\right| \Leftrightarrow |b(b-2)| = |b|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 - 2b = b \\ b^2 - 2b = -b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 - 3b = 0 \\ b^2 - b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 3 \\ b = 1 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $b = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} a = 2$, ta được đường thẳng (d_1): $y = 2x$.
- Với $b = 3 \overset{(1)}{\Rightarrow} a = -1$, ta được đường thẳng (d_2): $y = -x + 3$.
- Với $b = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} a = 1$, ta được đường thẳng (d_3): $y = x + 1$.

Vậy, tồn tại ba đường thẳng (d_1), (d_2) và (d_3) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Tổng quát: Cho điểm A $(x_0 ; y_0)$, ta dễ dàng chứng minh được rằng mọi đường thẳng (d) đi qua A luôn có phương trình:

$$(d): y = a(x - x_0) + y_0.$$

Ví dụ 6: Lập phương trình đường thẳng (d), biết (d) cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A(a, 0), B(0, b) với $a, b \neq 0$.

Giải

Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = kx + m$.

- Vì B(0, b) thuộc (d) nên:

$$b = k.0 + m \Leftrightarrow m = b.$$

- Vì A(a, 0) thuộc (d) nên:

$$0 = ka + m \Leftrightarrow ka = -m = -b \Leftrightarrow k = -\frac{b}{a}.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$y = -\frac{b}{a}x + b \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Nhận xét: Qua lời giải của ví dụ trên, ta ghi nhận kết quả " *Mọi đường thẳng đi qua hai điểm A(a, 0) và B(0, b) với $a, b \neq 0$ luôn có phương trình* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$".

Phương trình trên được gọi là phương trình đoạn chắn.

Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng phương trình đoạn chắn để giải toán.

Ví dụ 7: Trên mặt phẳng toạ độ, cho điểm M(4, 1). Một đường thẳng (d) luôn đi qua M cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A(a, 0), B(0, b) với $a, b > 0$. Lập phương trình đường thẳng (d) sao cho:

a. Diện tích ΔOAB nhỏ nhất.

b. OA + OB nhỏ nhất.

c. $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Giải

Từ giả thiết, ta được:

$$(d): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Vì M(4, 1) thuộc (d) nên:

$$\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{4b}{b-1}, \text{ với } b > 1. \qquad (*)$$

a. Diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2}.OA.OB = \frac{ab}{2}.$$

Từ (*), sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$1 = \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{4}{a}.\frac{1}{b}} = \frac{4}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 16 \Leftrightarrow S \geq 8.$$

Suy ra, ta được $S_{Min} = 8$, đạt được khi:

$$\frac{4}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): \frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow (d): y = -\frac{1}{4}x + 2.$$

b. Ta có:

$$OA + OB = |a| + |b| = \frac{4b}{b-1} + b = \frac{4}{b-1} + b + 4$$

$$= \frac{4}{b-1} + b - 1 + 5 \geq 2\sqrt{\frac{4}{b-1}.(b-1)} + 5 = 9.$$

Suy ra, ta được $(OA + OB)_{Min} = 9$, đạt được khi:

$$\frac{4}{b-1} = b - 1 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow (d): y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

c. Ta có:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$(4^2 + 1^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{17}.$$

Suy ra, ta được $\left(\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\right)_{Min}=\frac{1}{17}$, đạt được khi:

$$\begin{cases}\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1\\ 4a=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{17}{4}\\ b=17\end{cases}.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): \frac{x}{17/4}+\frac{y}{17}=1 \Leftrightarrow (d): y=-\frac{1}{4}x+17.$$

Chú ý: Sai lầm thường gặp của học sinh trong câu b) là dùng lập luận:

$$OA+OB=a+b\ge 2\sqrt{ab}\ge 8.$$

Khi đó $(OA+OB)_{Min}=8$ đạt được khi $a=b \xrightarrow{(*)} a=b=5$.

Ví dụ 8:

a. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(−5, 5) sao cho (d) tạo với tia Ox một góc α có $tg\alpha=\frac{1}{2}$.

b. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M, y_M)$ sao cho $x_M^2+y_M^2$ nhỏ nhất.

Giải

a. Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): y=ax+b.$$

- (d) tạo với tia Ox một góc α có $tg\alpha=\frac{1}{2}$ nên:

$$a=tg\alpha=\frac{1}{2}.$$

- Vì A(−5, 5) thuộc (d) nên:

$$5=a(-5)+b=\frac{1}{2}(-5)+b \Leftrightarrow b=\frac{15}{2}.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): y=\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}.$$

a. Vì $M(x_M, y_M)$ thuộc (d) nên:

$$y_M=\frac{1}{2}x_M+\frac{15}{2} \Leftrightarrow x_M=2y_M-15.$$

Khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 = (2y_M - 15)^2 + y_M^2 = 5y_M^2 - 60y_M + 225$$

$$= 5(y_M - 6)^2 + 45 \ge 45.$$

Suy ra, ta được $(x_M^2 + y_M^2)_{Min} = 45$ đạt được khi:

$$y_M = 6 \Rightarrow x_M = 2.6 - 15 = -3.$$

Vậy ta tìm được $M(-3, 6)$.

Nhận xét: Trong lời giải của ví dụ trên:

1. Ở câu a), ta sử dụng kết quả " *Nếu đường thẳng (d): y = ax + b tạo với tia Ox một góc α thì a = tgα* ".
2. Điểm M được tìm trong câu b) chính là toạ độ hình chiếu vuông góc của O lên (d).

Ví dụ 9: Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình:

$$(d_m): y = -\frac{m-1}{2m-3}x + \frac{m+1}{2m-3}.$$

1. Xác định m để:
   a. (d_m) đi qua $A(2, 1)$.
   b. (d_m) có hướng đi lên (hàm số đồng biến).
   c. (d_m) song song với đường thẳng $(\Delta): x - 2y + 12 = 0$.
2. Tìm điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua.

Giải

Viết lại phương trình họ đường thẳng (d_m) dưới dạng:

$$(d_m): (m-1)x + (2m-3)y - m - 1 = 0.$$

1. Ta lần lượt có:
   a. (d_m) đi qua $A(2, 1)$ khi và chỉ khi:

   $$2(m-1) + (2m-3) - m - 1 = 0 \Leftrightarrow 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

   b. (d_m) có hướng đi lên khi và chỉ khi nó có hệ số góc dương

   $$\Leftrightarrow -\frac{m-1}{2m-3} > 0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{2m-3} < 0$$

   $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m-1>0 \\ 2m-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-1<0 \\ 2m-3>0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m>1 \\ m<3/2 \end{cases} \\ \begin{cases} m<1 \\ m>3/2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}.$$

c. (d_m) song song với đường thẳng (Δ)khi và chỉ khi:

$$-\frac{m-1}{2m-3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\frac{5}{4}.$$

2. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua, khi đó:

$(m-1)x_0+(2m-3)y_0-m-1=0$, với $\forall m$

$\Leftrightarrow (x_0+2y_0-1)m-x_0-3y_0-1=0$, với $\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+2y_0-1=0 \\ x_0+3y_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=5 \\ y_0=-2 \end{cases}.$$

Vậy, (d_m) luôn đi qua điểm cố định M(5, −2)

Chú ý: Với bài toán về sự đồng quy của ba đường thẳng

(d_1): $y=a_1x+b_1$, (d_2) : $y=a_2x+b_2$, (d_3) : $y=a_3x+b_3$,

ta thực hiện theo các bư

Bước 1: Xác định toạ độ giao điểm I của hai đường thẳng (d_1), (d_2).

Bước 2: Với yêu cầu :

- Để chứng minh (d_1), (d_2), (d_3) đồng quy ta đi chứng minh $I\in(d_3)$.
- Để nhận được giá trị của tham số để ba đường thẳng đồng quy ta thiết lập điều kiện $I\in(d_3)$.

Ví dụ 10: Cho ba đường thẳng:

(d_1): $y=2x-1$,

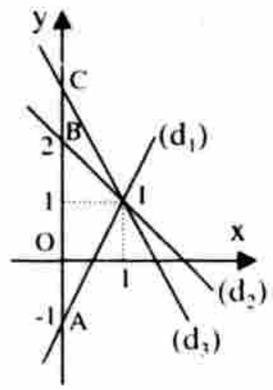
(d_2): $y=2-x$,

(d_3): $y=ax+3$.

Xác định a để ba đường thẳng trên đồng quy, rồi vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục toạ độ.

Giải

Giả sử giao điểm I của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có toạ độ $I(x_0, y_0)$, khi đó:



- Vì I thuộc (d_1) nên $y_0=2x_0-1$. (1)
- Vì I thuộc (d_2) nên $y_0=-x_0+2$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$$2x_0-1=-x_0+2\Leftrightarrow x_0=1\Rightarrow y_0=1.$$

Vậy (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm I(1, 1).

Để (d_1), (d_2), (d_3) đồng quy điều kiện là:

$I \in (d_3) \Leftrightarrow 1 = a + 3 \Leftrightarrow a = -2$.

Vậy, với $a = -2$ thì (d_1), (d_2), (d_3) đồng quy và khi đó (d_3): $y = -2x + 3$.

Vẽ đồ thị:

- Để vẽ đồ thị của (d_1) ta lấy thêm điểm $A(0, -1)$.
- Để vẽ đồ thị của (d_2) ta lấy thêm điểm $B(0, 2)$.
- Để vẽ đồ thị của (d_3) ta lấy thêm điểm $C(0, 3)$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu định nghĩa hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$. Giải thích tại sao lại có được định nghĩa này ?

Câu hỏi 2: Nêu điều kiện để hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b$ $(a' \neq 0)$ là:

a. Trùng nhau.

b. Song song với nhau.

c. Cắt nhau.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng mọi đường thẳng (d) đi qua điểm $A(x_0, y_0)$ luôn có phương trình $y = a(x - x_0) + y_0$.

Câu hỏi 4: Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua hai điểm $A(a, 0)$ và $B(0, b)$ với $a, b \neq 0$ luôn có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Câu hỏi 5: Chứng minh rằng đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A\,(x_1\,;\,y_1)$ và $B\,(x_2;\,y_2)$ với $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ có hệ số góc $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Câu hỏi 6: Cho hai đường thẳng :

$$(d_1):\ y = a_1x + b_1,\ \ (d_2):\ y = a_2x + b_2$$

Chứng minh rằng $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow a_1.a_2 = -1$.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Lập phương trình đường thẳng (d), biết (d):

a. Đi qua điểm $M\,(1, 2)$ có hệ số góc bằng 3.

b. Đi qua điểm $A\,(-3, 2)$ và tạo với tia Ox một góc 45^0.

c. Đi qua điểm $B\,(3, 2)$ và tạo với trục Ox một góc 60^0.

Bài tập 2. Lập phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $-\frac{4}{3}$ và:

a. Đi qua điểm M(1, −1).

b. Chắn trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 54.

c. Khoảng cách từ O đến (d) bằng $\frac{3}{5}$.

Bài tập 3. Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ): $y = -3x$ và đi qua điểm M(1 ; 3). Vẽ đồ thị của (d).

Bài tập 4. Cho đường thẳng:

$$(\Delta): y = -x + 2.$$

Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và:

a. Đi qua điểm M(1, −2).

b. Chắn trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 8.

c. Khoảng cách từ O đến (d) bằng $9\sqrt{2}$.

Bài tập 5. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

a. (d_1): $x + y + 1 = 0$; (d_2): $2x + 2y + 3 = 0$.

b. (d_1): $3x - y + 1 = 0$; (d_2): $4x - y + 1 = 0$.

c. (d_1): $x + 2y + 1 = 0$; (d_2): $x + 4y + 3 = 0$.

d. (d_1): $2x + 3y + 1 = 0$; (d_2): $4x + 6y + 2 = 0$.

trong trường hợp cắt nhau hãy tìm toạ độ giao điểm.

Bài tập 6. Cho hai đường thẳng:

$$(d_1): y = 2x - 1 \text{ và } (d_2): y = -x + 2.$$

b. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng và vẽ hai đường thẳng này trên cùng một hệ trục toạ độ.

c. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua I và có hệ số góc bằng 3.

d. Lập phương trình đường thẳng (d') đi qua I và song song với đường thẳng $y = 5x + 7$.

Bài tập 7. Cho hai đường thẳng:

$$(d_1): y = kx + k,$$

$$(d_2): y = \frac{k^2 - 1}{2k}x + \frac{k^2 + 1}{2k}, \text{ với } k \neq 0.$$

a. CMR khi k thay đổi (d_1) luôn đi qua một điểm cố định.

b. Với mỗi giá trị của $k \neq 0$, hãy xác định giao điểm I của (d_1) và (d_2).

Bài tập 8. Cho ba đường thẳng:

$$(d_1): y = 2x + 3,\ (d_2): y = 3x + 2,\ (d_3): y = ax + a - 1.$$

Xác định a để ba đường thẳng trên đồng quy, rồi vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục toạ độ.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Giả sử đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$.

a. Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 3 nên $a = 3$.

Vì $M(1, 2)$ thuộc (d) nên:

$$2 = a.1 + b = 3.1 + b \Leftrightarrow b = -1.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d): $y = 3x - 1$.

b. Đường thẳng (d) tạo với tia Ox một góc 45^0 nên:

$$a = tg45^0 = 1.$$

Vì $A(-3, 2)$ thuộc (d) nên:

$$2 = a.(-3) + b = 1.(-3) + b \Leftrightarrow b = 5.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d): $y = x + 5$.

c. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Đường thẳng (d) tạo với tia Ox một góc 60^0, ta được:

$$a = tg60^0 = \sqrt{3}.$$

Vì $B(3, 2)$ thuộc (d) nên:

$$2 = a.3 + b = \sqrt{3}.3 + b \Leftrightarrow b = 2 - 3\sqrt{3}.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d_1): $y = \sqrt{3}x + 2 - 3\sqrt{3}$.

Trường hợp 2: Đường thẳng (d) tạo với tia đối của tia Ox một góc 60^0, ta được:

$$a = -tg60^0 = -\sqrt{3}.$$

Vì $B(3, 2)$ thuộc (d) nên:

$$2 = a.3 + b = -\sqrt{3}.3 + b \Leftrightarrow b = 2 + 3\sqrt{3}.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d_2): $y = -\sqrt{3}x + 2 + 3\sqrt{3}$.

Kết luận, có hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 2. Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $-\frac{4}{3}$ có phương trình:

$$(d): y = -\frac{4}{3}x + b.$$

a. Vì $M(1, -1)$ thuộc (d) nên

$$-1 = -\frac{4}{3}.1 + b \Leftrightarrow b = 1.$$

Vậy, ta được (d): $y = -\frac{4}{3}x + 1$.

b. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}.0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{4}{3}.x + b \Leftrightarrow x = \frac{3b}{4}$, do đó B($\frac{3b}{4}$, 0).

Diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 54 = \frac{1}{2}.|b|.\left|\frac{3b}{4}\right| = \frac{3b^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 144 \Leftrightarrow b = \pm 12.$$

Khi đó:

- Với b = 12, ta được đường thẳng (d_1): $y = -\frac{4}{3}x + 12$.
- Với b = −12, ta được đường thẳng (d_2): $y = -\frac{4}{3}x - 12$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}.0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{4}{3}.x + b \Leftrightarrow x = \frac{3b}{4}$, do đó B($\frac{3b}{4}$, 0).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}$$

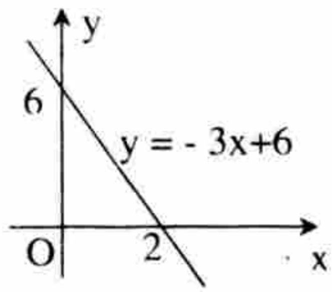
$$\Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{|b|.\left|\frac{3b}{4}\right|}{\sqrt{b^2 + \left(\frac{3b}{4}\right)^2}} = \frac{3|b|}{5} \Leftrightarrow |b| = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1.$$

Khi đó:

- Với b = 1, ta được đường thẳng (d_3): $y = -\frac{4}{3}x + 1$.
- Với b = −1, ta được đường thẳng (d_4): $y = -\frac{4}{3}x - 1$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_3) và (d_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 3.



a. Vì (d) song song với (Δ) nên có phương trình:

$(d): y = -3x + b.$

Vì M(1, 3) thuộc (d) nên:

$3 = -3.1 + b \Leftrightarrow b = 6.$

Vậy, ta được (d): $y = -3x + 6$.

b. Vẽ đồ thị của (d), ta lựa chọn hai điểm A(0, 6) và B(2, 0).

Nối A và B ta được đồ thị của (d).

Bài tập 4. Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) có phương trình:

$(d): y = -x + b.$

a. Vì M(1, −2) thuộc (d) nên:

$-2 = -1 + b \Leftrightarrow b = -1.$

Vậy, ta được (d): $y = -x - 1$.

b. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = -x + b \Leftrightarrow x = b$, do đó B(b, 0).

Diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{2}.|b|\ .\ |b| = \frac{b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = \pm 4.$$

Khi đó:

- Với $b = 4$, ta được đường thẳng (d_1): $y = -x + 4$.
- Với $b = -4$, ta được đường thẳng (d_2): $y = -x - 4$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = -x + b \Leftrightarrow x = b$, do đó B(b, 0).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{2} = \frac{|b|.|-b|}{\sqrt{b^2 + (-b)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |b| = 18 \Leftrightarrow b = \pm 18.$$

Khi đó:

- Với b = 18, ta được đường thẳng (d_3): $y = -x + 18$.
- Với b = −18, ta được đường thẳng (d_4): $y = -x - 18$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_3) và (d_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 5. *Hướng dẫn*: Chuyển các cặp đường thẳng về dạng (d_1): $y = a_1x + b_1$ và (d_2): $y = a_2x + b_2$, từ đó xác định a_1, b_1, a_2, b_2 và đưa ra lời kết luận.

Bài tập 6.

a. Nhận xét rằng:

- Đường thẳng (d_1) có $a_1 = 2$ và $b_1 = -1$.
- Đường thẳng (d_2) có $a_2 = -1$ và $b_2 = 2$.

Suy ra:

$$a_1 \neq a_2 \text{ và } b_1 \neq b_2 \Rightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ cắt nhau tại điểm I.}$$

Giả sử giao điểm của hai đường thẳng có toạ độ $I(x_0, y_0)$, khi đó:

- Vì I thuộc (d_1) nên $y_0 = 2x_0 - 1$. (1)
- Vì I thuộc (d_2) nên $y_0 = -x_0 + 2$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$$2x_0 - 1 = -x_0 + 2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1.$$

Vậy hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm I(1, 1).

b. Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 3, có phương trình:

$$(d): y = 3x + b.$$

Vì I thuộc đường thẳng (d) nên:

$$1 = 3.1 + b \Leftrightarrow b = -2.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d): $y = 3x - 2$.

c. Đường thẳng (d') song song với đường thẳng $y = 5x + 7$, có phương trình:

$$(d'): y = 5x + b, \text{ với } b \neq 7.$$

Vì I thuộc đường thẳng (d') nên:

$$1 = 5.1 + b \Leftrightarrow b = -4.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d'): $y = 5x - 4$.

Bài tập 7.

a. (d_1) luôn đi qua một điểm cố định M(−1, 0).

b. Giao điểm $I\left(\dfrac{1-k^2}{1+k^2}, \dfrac{2k}{1+k^2}\right)$.

Bài tập 8. a = 1.

Phần 2

Hình học

CHƯƠNG I - HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được các hệ thức lượng trong tam giác vuông cùng bảng lượng giác, cụ thể:

1. **Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông**
2. **Tỉ số lượng giác của góc nhọn**

CHỦ ĐỀ 1 MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

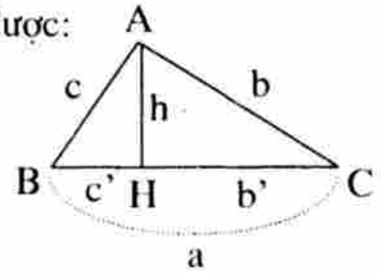
1. HỆ THỨC GIỮA CẠNH GÓC VUÔNG VÀ HÌNH CHIẾU CỦA NÓ TRÊN CẠNH HUYỀN

> **Định lí 1**: *Trong một tam giác vuông, bình phương một cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.*

Như vậy, trong ΔABC vuông tại A, ta nhận được:

$$AB^2 = BC.BH \Leftrightarrow c^2 = a.c',$$

$$AC^2 = BC.CH \Leftrightarrow b^2 = a.b',$$



__Thí dụ 1:__ Cho ΔABC vuông tại A, AB = 3, AC = 4, AH là đường cao. Tính BC, BH, CH và AH.

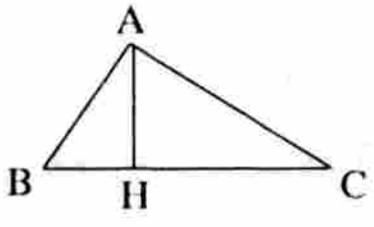
Giải

Ta có:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{5}.$$

$$CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{16}{5}.$$



$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 3^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow AH = \frac{12}{5}.$$

2. MỘT SỐ HỆ THỨC LIÊN QUAN TỚI ĐƯỜNG CAO

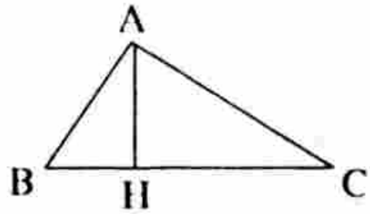
> **Định lí 2**: *Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.*

Như vậy, trong ΔABC vuông tại A (hình trong định lí 1), ta nhận được:

$$AH^2 = BH.CH \Leftrightarrow h^2 = b'.c'.$$

Thí dụ 2: Cho ΔABC vuông tại A. Tính độ dài các cạnh và đường cao AH của ΔABC, biết $BH = 3$, $CH = \frac{16}{3}$.

Giải



Ta có:

$$BC = BH + CH = 3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3}.$$

$$AB^2 = BH.BC = 3.\frac{25}{3} = 25 \Leftrightarrow AB = 5.$$

$$AC^2 = CH.BC = \frac{16}{3}.\frac{25}{3} = \frac{400}{9} \Leftrightarrow AC = \frac{20}{3}.$$

$$AH^2 = BH.CH = 3.\frac{16}{3} = 16 \Leftrightarrow AH = 4.$$

Ta có, ta có hệ thức tiếp theo được mô tả bằng định lí sau:

> ***Định lí 3**: Trong một tam giác vuông, tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.*

Như vậy, trong ΔABC vuông tại A (hình trong định lí 1), ta nhận được:

$$AB.AC = AH.BC \Leftrightarrow bc = ah.$$

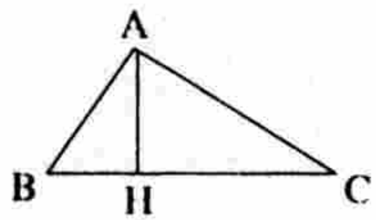
> ***Định lí 4**: Trong một tam giác vuông, nghịch đảo bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông.*

Như vậy, trong ΔABC vuông tại A (hình trong định lí 1), ta nhận được:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Thí dụ 3: Cho ΔABC vuông tại A, $AB = 6$, $BC = 10$. Tính độ dài đường cao AH.

Giải



Ta có:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} = \frac{25}{576} \Leftrightarrow AH = \frac{5}{24}.$$

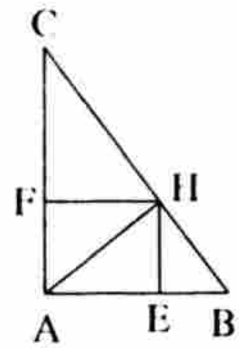
Nhận xét: Nếu không sử dụng kết quả trong định lí 4, để tính được AH chúng ta cần thực hiện tương tự như trong thí dụ 1.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A; AH là đường cao. HE, HF lần lượt là các đường cao của ΔAHB, ΔAHC. Chứng minh rằng:

a. $BC^2=3AH^2+BE^2+CF^2$.

b. $\sqrt[3]{BE^2}+\sqrt[3]{CF^2}=\sqrt[3]{BC^2}$.



Giải

a. Ta có:

$$3AH^2+BE^2+CF^2=3AH^2+BH^2-HE^2+CH^2-HF^2.$$
$$=3AH^2-EF^2+(BH+HC)^2-2HB.HC.$$
$$=2AH^2+BC^2-2AH^2=BC^2.$$

b. Trong ΔAHB:

$$BE=\frac{BH^2}{BA}\Rightarrow BE^2=\frac{BH^4}{BA^2}=\frac{BH^4}{BH.BC}=\frac{BH^3}{BC} \quad (1)$$

Trong ΔAHC:

$$CF=\frac{CH^2}{CA}\Rightarrow CF^2=\frac{CH^4}{CA^2}=\frac{CH^4}{CH.BC}=\frac{CH^3}{BC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\sqrt[3]{BE^2}+\sqrt[3]{CF^2}=\frac{BH}{\sqrt[3]{BC}}+\frac{CH}{\sqrt[3]{BC}}=\frac{BC}{\sqrt[3]{BC}}=\sqrt[3]{BC}.$$

Ví dụ 2: Cho hai tam giác vuông ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ vuông tại A và A_1 và đồng dạng với nhau. Chứng minh rằng:

a. $aa_1=bb_1+cc_1$.

b. $\frac{1}{hh_1}=\frac{1}{bb_1}+\frac{1}{cc_1}$.

Giải

a. Trong ΔABC, ta có:

$b=a\cos\alpha$, $c=a\sin\alpha$,

Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$b_1=a_1.\cos\alpha$, $c_1=a_1.\sin\alpha$

Từ đó suy ra:

$bb_1+cc_1=aa_1.\cos^2\alpha+aa_1.\sin^2\alpha=aa_1.(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=aa_1$, đpcm.

b. Trong ΔABC, ta có:

$b=\frac{h}{\sin\alpha}$, $c=\frac{h}{\cos\alpha}$.

Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$$b_1 = \frac{h_1}{\sin\alpha},\ c_1 = \frac{h_1}{\cos\alpha}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{bb_1} + \frac{1}{cc_1} = \frac{1}{\frac{hh_1}{\sin^2\alpha}} + \frac{1}{\frac{hh_1}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{hh_1} = \frac{1}{hh_1},\ \text{đpcm}.$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC, biết

$$S = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c). \qquad (1)$$

chứng minh rằng ΔABC là vuông.

Giải

Sử dụng công thức Hêrong, ta biến đổi (1) về dạng:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-c)(p-b)$$

$$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = (p-c)^2(p-b)^2 \Leftrightarrow p(p-a) = (p-c)(p-b)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a) = (a+b-c)(a+c-b)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2 = c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ là vuông tại C.}$$

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC vuông tại A, AB=15, AC = 20, AH là đường cao. Tính độ dài BC, BH, CH, AH.

Bài tập 2. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết rằng $AH = \frac{6\sqrt{13}}{13}$, BC=13. Tính AB, AC, HB và HC.

Bài tập 3. Cho ΔABC vuông tại A, $tgC = \frac{3}{4}$ và đường cao AH =12. Tính độ dài đoạn BH, CH, AB, AC.

Bài tập 4. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết rằng BH =1, $AC = 2a\sqrt{5}$. Tính độ dài cạnh BC, AB, AH.

Bài tập 5. Cho ΔABC vuông tại A, AB=3, AC=4, đường cao AH. Điểm I thuộc cạnh AB sao cho IA=2IB, CI cắt AH tại E. Tính độ dài CE.

Bài tập 6. Cho ΔABC vuông tại A; AD là phân giác trong của $\hat{A}$, Chứng minh rằng:

$$AD = \frac{\sqrt{2}}{b+c}bc.$$

Bài tập 7. Cho ΔABC vuông ở A, đường cao AH; r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp tam giác vuông ABC, AHB, AHC. Chứng minh rằng:

$$r_1 = r\frac{c}{a} \text{ và } r_2 = r\frac{b}{a}$$

từ đó suy ra:

$$r_1^2 + r_1^2 = r^2$$

Bài tập 8. Cho ΔABC vuông tại A; D là hình chiếu của A trên BC; E và F lần lượt là hình chiếu của D xuống AB và AC. Chứng minh rằng:

a. $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{DB}{DC}$; $\left(\frac{AB}{AC}\right)^3 = \frac{BE}{CF}$.

b. $AD^3 = BC.EB.CF$.

IV. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. BC = 25, BH = 9, CH = 16, AH = 12.

Bài tập 2. Ta có hai đáp số:

$$AB = 2,\ AC = 3,\ HB = \frac{4}{13},\ HC = \frac{9}{13}$$

hoặc $AB = 3,\ AC = 2,\ HB = \frac{9}{13},\ HC = \frac{4}{13}$.

Bài tập 3. HB = 9, CH = 16, AB = 15, AC = 20.

Bài tập 4. BC = 5, AB = $\sqrt{5}$, AH = 2.

Bài tập 5. $CE = \frac{16\sqrt{5}}{11}$.

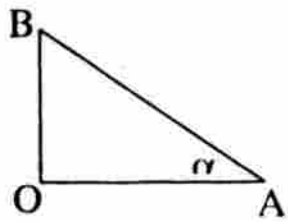
CHỦ ĐỀ 2 TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

Cho ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{OB}{AB}.$$



$$\cos\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}} = \frac{OA}{AB}.$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} = \frac{OB}{OA}.$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}} = \frac{OA}{OB}.$$

2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐẶC BIỆT

Hàm \ Độ đo	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$
$\text{cotg}\alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU

$\sin(90^0-\alpha) = \cos\alpha.$

$\cos(90^0-\alpha) = \sin\alpha.$

$\text{tg}(90^0-\alpha) = \text{cotg}\alpha.$

$\text{cotg}(90^0-\alpha) = \text{tg}\alpha.$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tính giá trị của biểu thức:

a. $A = 4 - \sin^2 45^0 + 2\cos^2 60^0 - 3\cot g^3 45^0$.

b. $B = tg45^0.\cos 30^0.\cot g30^0$.

Giải

a. Ta có: $A = 4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 = 1$.

b. Ta có: $B = 1.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức:

a. $A = 3a.\cos 0^0 + b.\sin 90^0 - a$.

b. $B = 4a^2.\sin^2 45^0 - 3(a.tg45^0)^2 + (2a.\cos 45^0)^2$.

Giải

a. Ta có: $A = 3a + b - a = 2a + b$.

b. Ta có: $B = 4a^2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3a^2 + 4a^2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính giá trị của biểu thức:

$$A=8-\cos^2 30^0+2\sin^2 45^0-\sqrt{3}\,tg^3 60^0.$$

Bài tập 2. Tính giá trị của biểu thức:

$$A=(a^2+1).\sin 0^0+ b.\cos 90^0.$$

Bài tập 3. Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\frac{a^2\sin 90^0 - b^2\cos 0^0}{a.\cot g45^0 - b - 2a.\cot g90^0}.$$

Bài tập 4. Cho ΔABC vuông tại A, biết AB = 3, AC = 4. Hãy giải ΔABC.

Bài tập 5. Cho ΔABC vuông tại A, biết AB = 6, BC = 10. Hãy giải ΔABC.

Bài tập 6. Cho ΔABC vuông tại A đường cao AH, biết BH = 4, CH = 1. Hãy giải ΔABC.

Bài tập 7. Cho ΔABC vuông tại A đường cao AH, biết BH = 1, AH = 9. Hãy giải ΔABC.

Bài tập 8. Cho ΔABC vuông tại A đường cao AH, biết BH = 4, AB = 5. Hãy giải ΔABC.

CHƯƠNG II - ĐƯỜNG TRÒN

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được khái niệm về đường tròn cùng các kiến thức liên quan, cụ thể:

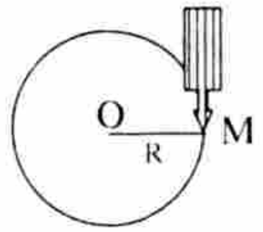
1. **Định nghĩa và sự xác định đường tròn**
2. **Đường kính và dây cung**
3. **Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn**
4. **Tiếp tuyến của đường tròn**
5. **Vị trí tương đối của hai đường tròn**

CHỦ ĐỀ 1 ĐỊNH NGHĨA ĐƯỜNG TRÒN SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA ĐƯỜNG TRÒN

Định nghĩa: *Tập hợp (quỹ tích) các điểm cách điểm O cho trước một khoảng cách không đổi R > 0 được gọi là đường tròn tâm O bán kính R.*



Đường tròn như vậy được kí hiệu (O ; R), trong trường hợp không cần chú ý đến bán kính có thể sử dụng kí hiệu (O).

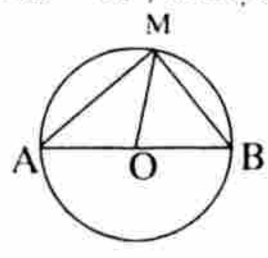
<u>**Thí dụ 1:**</u> Cho đoạn thẳng AB, tìm tập hợp các điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 90^0$.

Giải

Gọi O là trung điểm AB, khi đó với điểm M thoả mãn $\widehat{AMB} = 90^0$, ta được:

ΔABM vuông tại M $\Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}AB$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn $(O, \dfrac{1}{2}AB)$.

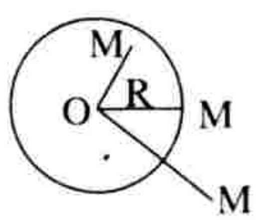


<u>**Chú ý**</u>: 1. Cách trình bày trên chỉ có tính minh hoạ, còn để có được lời giải đúng của một *bài toán quỹ* cần thực hiện theo ba bước - Điều này sẽ được miêu tả chi tiết trong bài toán 2.

2. Từ nay, chúng ta được quyền sử dụng kết quả " *Nếu* $\widehat{AMB} = 90^0$ *thì M thuộc đường tròn đường kính AB*".

2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Cho đường tròn (O, R) và điểm M, ta có:



- Nếu OM < R $\Leftrightarrow$ M nằm trong đường tròn.
- Nếu OM = R $\Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn.
- Nếu OM > R $\Leftrightarrow$ M nằm ngoài đường tròn.

Thí dụ 2: Cho đường tròn (O; 2cm). Xác định vị trí các điểm A, B, C đối với đường tròn biết OA = 1cm, OB = 2cm, OC = 3cm.

Giải

Ta thực hiện phép so sánh để đưa ra kết luận:

- Nếu $OA < R \Leftrightarrow$ A nằm trong đường tròn.
- Nếu $OB = R \Leftrightarrow$ B nằm trên đường tròn.
- Nếu $OC > R \Leftrightarrow$ C nằm ngoài đường tròn.

Định nghĩa: *Hình tròn* là tập hợp các điểm ở bên trong đường tròn và các điểm của chính đường tròn đó.

3. CUNG VÀ DÂY CUNG

Ta cần nhớ kết quả:

Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn.

Thí dụ 3:

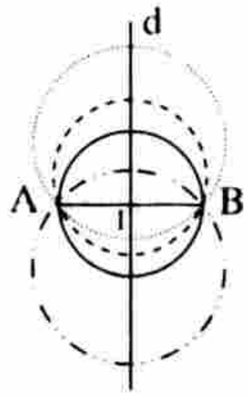
a. Hãy dựng một đoạn thẳng AB = 6cm và ba đường tròn phân biệt nhận AB làm một dây cung.

b. Trong tất cả các đường tròn nhận AB làm một dây cung thì đường tròn nào có đường kính nhỏ nhất ? Giải thích tại sao ?

Giải

a. Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn thẳng AB = 6cm.
- Dựng trung trực d của AB. Trên d lấy bốn điểm O_1, O_2, O_3, I (I là trung điểm AB).
- Dựng bốn đường tròn (O_1, O_1A), (O_2, O_2A), (O_3, O_3A) và (I, IA).



b. Gọi (O) là một đường tròn nhận AB làm một dây cung. Vẽ đường kính AC, ta có:

$$AC \geq AB \text{ với AB là hằng số.}$$

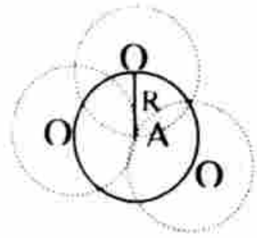
Do đó $AC_{min} = AB$, đạt được khi $C \equiv B$.

Vậy, đường tròn có đường kính nhỏ nhất là đường tròn đường kính AB.

4. SỰ XÁC ĐỊNH MỘT ĐƯỜNG TRÒN - ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

Theo định nghĩa một đường tròn sẽ hoàn toàn được xác định khi biết tâm và bán kính, vậy với câu hỏi " *Hãy xác định tâm O của đường tròn*, biết:

a. Đường tròn đi qua điểm A và có bán kính bằng R.

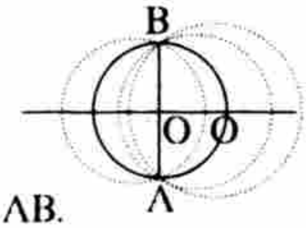


Khi đó:

$AO = R$

$\Leftrightarrow O \in (A, R)$ – Đường tròn tâm A, bán kính R.

b. Đường tròn đi qua hai điểm A và B.



Khi đó:

$OA = OB$

$\Leftrightarrow$ O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.

c. Đường tròn đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

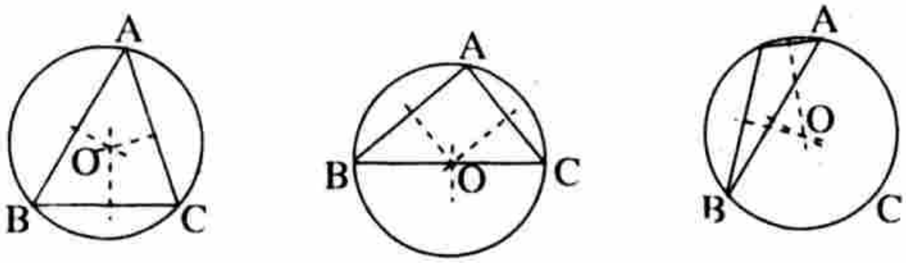
Khi đó:

$OA = OB \Leftrightarrow$ O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.

$OA = OC \Leftrightarrow$ O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC.

$OB = OC \Leftrightarrow$ O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Vậy, O là điểm đồng quy của ba đường trung trực của ba cạnh của ΔABC.



Trường hợp đặc biệt: Nếu ΔABC vuông thì tâm của của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm của cạnh huyền.

Ta có các kết quả:

1. Một điểm O cho trước và một số thực $R > 0$ cho trước xác định một đường tròn (O : R).
2. Một đoạn thẳng AB cho trước xác định một đường tròn đường kính AB.
3. Ba điểm không thẳng hàng A, B, C xác định một và chỉ một đường tròn đi qua ba điểm đó (gọi là *đường tròn ngoại tiếp* ΔABC).

Thí dụ 4: Chứng minh rằng qua ba điểm thẳng hàng không thể có một đường tròn.

Giải

Ta đi chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử tồn tại đường tròn (O) đi qua ba điểm thẳng hàng A, B, C.

Ta có:

$A, B \in (O) \Rightarrow OA = OB \Rightarrow$ O thuộc trung trực Ex của AB

$B, C \in (O) \Rightarrow OB = OC \Rightarrow$ O thuộc trung trực Fy của BC

suy ra $O = Ex \cap Fy$. (*)

Mặt khác, vì A, B, C thẳng hàng nên:

Ex // Fy, điều này mâu thuẫn với (*).

Vậy, qua ba điểm thẳng hàng không thể có một đường tròn.

Chú ý: Từ kết quả " *Ba điểm không thẳng hàng A, B, C xác định một và chỉ một đường tròn đi qua ba điểm đó* ", chúng ta có thể khai thức thêm như sau:

1. Nếu các điểm A, B, C, D thuộc đường tròn (O) và A, B, C, E thuộc đường tròn (O') thì $(O) \equiv (O')$, hay nói cách khác " *Năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn* ".
2. Mở rộng hơn " *Nếu ta có A, B, C, D thuộc đường tròn (O_1) và A, B, C, E thuộc đường tròn (O_2) và A, B, C, F thuộc đường tròn (O_3)* " thì $(O_1) \equiv (O_2) \equiv (O_3) \equiv (O)$ và (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔDEF.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Các dạng toán liên quan tới kiến thức của chủ đề này, bao gồm:

Dạng 1: Chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn.

Dạng 2: Quỹ tích điểm là một đường tròn.

Dạng 3: Dựng đường tròn thoả mãn điều kiện cho trước.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa đường tròn và vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 2: Hãy nêu một ví dụ về quỹ tích là đường tròn và chứng minh.

Câu hỏi 3: Nêu các trường hợp về vị trí tương đối của điểm M với đường tròn (O, R).

Câu hỏi 4: Phát biểu định nghĩa hình tròn.

Câu hỏi 5: Phát biểu định nghĩa cung và dây cung.

Câu hỏi 6: Chứng minh rằng đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn.

Câu hỏi 7: Nêu các cách xác định một đường tròn và nêu định nghĩa đường tròn ngoại tiếp một tam giác.

Câu hỏi 8: Chứng minh rằng qua ba điểm thẳng hàng không thể có một đường tròn.

Bài toán 1	CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP

Muốn chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa, ta chứng minh các điểm này cùng cách đều một điểm.

Cách 2: Sử dụng kết quả " *Nếu* $\widehat{ABC} = 90^0$ *thì B thuộc đường tròn đường kính AC* "

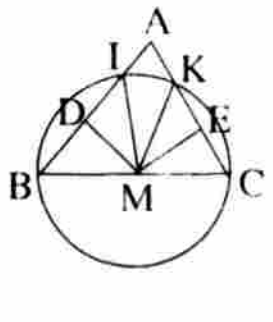
II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho ΔABC và M là trung điểm của BC. Hạ MD, ME theo thứ tự vuông góc với AB và AC. Trên tia BD và CE lần lượt lấy các điểm I, K sao cho D là trung điểm của BI, E là trung điểm của CK. Chứng minh rằng bốn điểm B, I, K, C cùng nằm trên một đường tròn.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: (*Sử dụng định nghĩa*) Ta có:



- M là trung điểm BC nên:

$$MB = MC = \frac{1}{2}BC. \quad (1)$$

- MD là trung trực của BI nên:

$$MI = MB. \quad (2)$$

- ME là trung trực của CK nên:

$$MK = MC. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $MB = MC = MI = MK = \frac{1}{2}BC$.

Vậy bốn điểm B, I, K, C cùng nằm trên đường tròn tâm M, bán kính $\frac{1}{2}BC$.

Cách 2: Ta có:

- MD là trung trực của BI nên $MI = MB = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow \Delta BCI$ vuông tại I

$$\Leftrightarrow \text{I thuộc đường tròn đường kính BC.} \quad (4)$$

- ME là trung trực của CK nên:

$$MK = MC = \frac{1}{2}BC$$

$\Leftrightarrow \Delta BCK$ vuông tại K

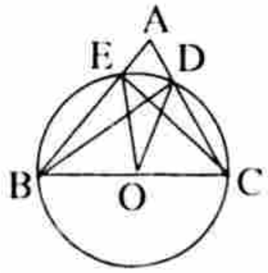
$\Leftrightarrow$ K thuộc đường tròn đường kính BC. (5)

Vậy, bốn điểm B, I, K, C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

<u>Nhận xét</u>: Trong lời giải trên, để chứng minh bốn điểm B, I, K, C cùng thuộc một đường tròn, ta có thể sử dụng cả hai cách và:

- Ở cách 1, ta khẳng định điểm M (đã cho sẵn) cách đều bốn điểm B, I, K, C dựa trên tính chất đường trung trực.
- Ở cách 2, ta khéo léo chứng minh $\widehat{BIC} = \widehat{BKC} = 90^0$ dựa trên kết quả " *Trong tam giác vuông trung tuyến bằng thuộc cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền và ngược lại* ". Tuy nhiên, cách 2 được đề xuất thông qua kết quả của cách 1

<u>Ví dụ 2:</u> Cho ΔABC, các đường cao BD và CE.



a. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, D, E nằm trên cùng một đường tròn.

b. Chứng minh rằng DE < BC.

Giải

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Từ giả thiết ta có:

- $BD \perp AC \Leftrightarrow \widehat{BDC} = 90^0 \Rightarrow$ D thuộc đường tròn có đường kính BC.
- $CE \perp AB \Leftrightarrow \widehat{BEC} = 90^0 \Rightarrow$ E thuộc đường tròn có đường kính BC.

Vậy bốn điểm B, C, D, E thuộc đường tròn có đường kính BC.

Cách 2: Gọi O là trung điểm của BC, ta có:

- ΔBEC vuông tại E và có EO là trung tuyến, nên:

$$OE = OB = OC. \qquad (1)$$

- ΔBCD vuông tại D và có DO là trung tuyến, nên:

$$OD = OB = OC. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$OB = OE = OD = OC \Leftrightarrow$ B, C, D, E thuộc đường tròn (O; OB).

b. Trong đường tròn (O), ta có BC là đường kính của đường tròn, DE là dây (khác đường kính) nên DE < BC (đường kính là dây lớn nhất của đường tròn)

Nhận xét: Trong lời giải trên, để chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn, ta có thể sử dụng cả hai cách và:

- Ở cách 1, ta có ngay:

$$\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^0.$$

- Ở cách 2, ta chỉ ra được điểm O cách đều bốn điểm B, C, D, E. Tuy nhiên, cách 2 được đề xuất thông qua kết quả của cách 1.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các cách để chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn.

Câu hỏi 2: Người ta có bao giờ hỏi " *Chứng minh rằng ba điểm không thẳng hàng A, B, C cùng thuộc một đường tròn* " không ? Vì sao ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC đều. Gọi M, N, P theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng các điểm B, M, P, C thuoc một đường tròn.

Bài tập 2. Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH = 1cm, BC = 4cm. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng AH ở D.

a. Chứng minh rằng các điểm B, C thuộc đường tròn đường kính AD.

b. Tính độ dài AD.

Bài tập 3. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^0$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BD, DC và CA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên mot đường tròn.

Bài tập 4. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Bài tập 5. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^0$.

a. Chứng minh rằng bốn đỉnh của tứ giác cùng thuọc một đường tròn.

b. Chứng minh rằng BD ≤ AC. Tứ giác ABCD có thêm điều kiện gì để BD = AC.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta có thể lựa chọn một trong ba cách trình bày sau:

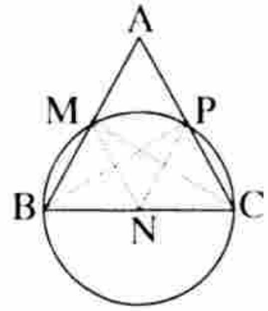
Cách 1: Vì ΔABC đều nên trung tuyến sẽ là đường cao, do đó:

- $CM \perp AB \Leftrightarrow \widehat{BMC} = 90^0$

  $\Rightarrow$ M thuộc đường tròn có đường kính BC.

- $BP \perp AC \Leftrightarrow \widehat{BPC} = 90^0$

  $\Rightarrow$ P thuộc đường tròn có đường kính BC.



Vậy bốn điểm B, C, M, P thuộc đường tròn có đường kính BC.

Cách 2: Ta có:

- ΔBMD vuông tại M và có MN là trung tuyến, nên:

  $MN = NB = NC.$ (1)

- ΔBPC vuông tại P và có PN là trung tuyến, nên:

  $PN = NB = NC.$ (2)

Từ (1), (2) suy ra:

$NB = NC = NM = NP$

$\Leftrightarrow$ B, C, M, P thuộc đường tròn (N; NB).

Cách 3: Với ΔABC đều có cạnh bằng a. Ta có:

- $NB = NC = \frac{a}{2}.$ (3)

- MN là đường trung bình nên:

$$MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}. \quad (4)$$

- PN là đường trung bình nên:

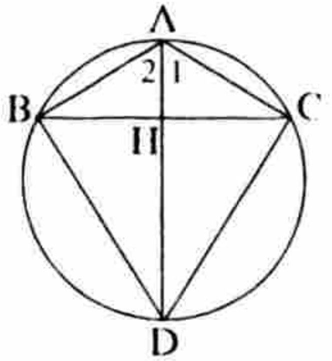
$$PN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}. \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) suy ra:

$NB = NC = NM = NP = \frac{a}{2} \Leftrightarrow$ B, C, M, P thuộc đường tròn (N; $\frac{a}{2}$).

Bài tập 2.

a. Xét hai tam giác ΔADC và ΔADB, ta có:



AD chung

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, vì ΔABC cân nên AH là phân giác

AC = AB, , vì ΔABC cân tại A.

do đó:

$$\Delta ADC = \Delta ADB \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$$

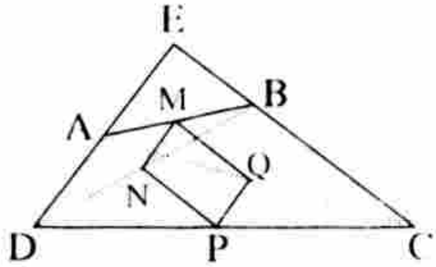
$\Leftrightarrow$ B, C thuộc đường tròn đường kính AD.

b. Trong ΔABD vuông tại D, ta có:

$$AH.AD = AB^2 = AH^2 + BH^2 \Leftrightarrow AD = \frac{AH^2 + \frac{BC^2}{4}}{AH} = 5cm.$$

Vậy, ta được AD = 5cm.

Bài tập 3. Giả sử AD cắt BC tại E.



Khi đó từ giả thiết $\hat{C} + \hat{D} = 90^0$, suy ra:

$$\hat{E} = 180^0 - (\hat{C} + \hat{D}) = 90^0.$$

Ta lần lượt có:

MN // AD // PQ

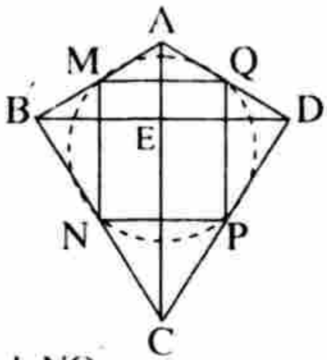
MQ // BC // PN

do đó, dựa trên tính chất của góc có cạnh tương ứng song song ta được:

$$\widehat{NMQ} = \widehat{NPQ} = \hat{E} = 90^0.$$

$\Leftrightarrow$ M, N, P, Q thuộc đường tròn có đường kính NQ.

Bài tập 4. Vì M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD và DA nên theo tính chất đường trung bình ta có:



MN // AC // PQ

MQ // BD // PN

Mặt khác, theo giả thiết AC vuông góc với BD nên:

$$\widehat{NMQ} = \widehat{NPQ} = 90^0.$$

$\Leftrightarrow$ M, N, P, Q thuộc đường tròn có đường kính NQ.

Bài tập 5. *Học sinh tự vẽ hình.*

a. A, B, C, D thuộc đường tròn đường kính AC.

b. Ta luôn có:

BD $\le$ AC, vì dây cung nhỏ hơn đường kính.

Để có:

BD = AC $\Leftrightarrow$ BD là đường kính $\Leftrightarrow$ $\hat{A} = \hat{C} = 90^0$

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.

Bài toán 2

QUỸ TÍCH ĐIỂM LÀ MỘT ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP

Với yêu cầu " *Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn tính chất K* ", ta cần trình bày lời giải gồm ba phần:

- ***Phần thuận***: Giả sử có điểm M thoả mãn điều kiện K, ta khéo léo suy ra rằng M thuộc một đường tròn (O), thí dụ:

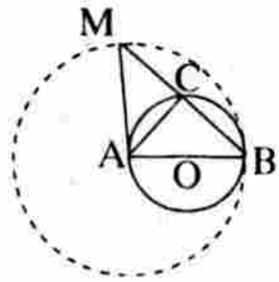
  Chứng minh OM = r – không đổi.

  Chứng minh $\widehat{AMB} = 90^0$, với O là trung điểm AB.

- ***Phần đảo***: Lấy M ∈ (O) và đi chứng minh rằng M có tính chất K.
- ***Kết luận***.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho đường tròn (O) đường kính AB = R. C là một điểm chạy trên đường tròn đó. Trên tia BC lấy một điểm M sao cho C là trung điểm của BM. Tìm quỹ tích của điểm M.



Giải

Phần thuận: Giả sử có điểm M sao cho C là trung điểm của BM.

Vì C thuộc đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^0 \Leftrightarrow AC \perp BM$

$\Rightarrow$ ΔABM cân vì có AC vừa là đường cao, vừa là trung tuyến

$\Rightarrow AM = AB = R \Leftrightarrow M \in (A, R)$.

Phần đảo: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn (A, R). BM cắt (O) tại C. Ta phải chứng minh C là trung điểm của BM.

Thật vậy:

- $AM = AB = R \Rightarrow \Delta ABM$ cân tại A
- $C \in (O) \Rightarrow \widehat{ACB} = 90^0 \Leftrightarrow AC \perp BM$

$\Rightarrow$ AC là đường cao ứng với cạnh đáy nên đồng thời là trung tuyến.

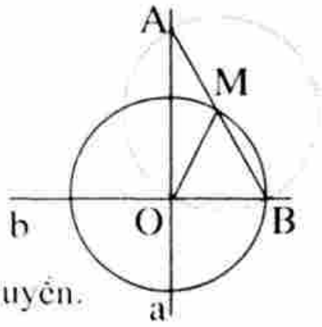
Vậy C là trung điểm của BM.

Kết luận: Quỹ tích của điểm M là đường tròn (A, R).

Nhận xét: Trong lời giải trên, để tìm tập hợp điểm M chúng ta đã tuân theo đúng lược đồ của bài toán quỹ tích, cụ thể:

- ***Phần thuận***: Ta *giả sử có điểm M sao cho C là trung điểm của BM,* từ đó suy ra được $M \in (A, R)$.
- ***Phần đảo***: Ta lấy điểm $M \in (A, R)$ và đi chứng minh M thoả mãn điều kiện C là trung điểm của BM.
- ***Kết luận***.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau tại O. Trên a và b lấy các điểm A, B sao cho AB = ℓ không đổi. Tìm tập hợp trung điểm M của đoạn AB.



Giải

Phần thuận: Với đoạn thẳng AB = ℓ, ta có:

ΔAOB vuông tại O

$\Rightarrow OM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\ell}{2}$, trung tuyến bằng nửa cạnh huyền.

Và khi A hoặc B trùng O ta vẫn có $OM = \dfrac{\ell}{2}$.

Vậy, điểm M thuộc đường tròn $\left(O; \dfrac{\ell}{2}\right)$.

Phần đảo: Lấy điểm M bất kì thuộc $\left(O; \dfrac{\ell}{2}\right)$ và giả sử đường tròn $\left(M; \dfrac{\ell}{2}\right)$ cắt a tại A khác O, AM cắt b tại B. Ta sẽ đi chứng minh AB = ℓ và M là trung điểm của AB.

Thật vậy, vì ΔOMA cân tại M nên:

$\widehat{MOA} = \hat{A}$

$\Rightarrow \widehat{MOB} = \hat{B}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).

Vậy:

$MA = MO = MB \Rightarrow AB = \ell$ và M là trung điểm của AB.

Kết luận: Tập hợp trung điểm M của AB là đường tròn $\left(O; \dfrac{\ell}{2}\right)$.

Ví dụ 3: Trên đường tròn (O) lấy hai điểm B, C cố định. Điểm A di chuyển trên đường tròn, D là trung điểm của BC. Gọi M là hình chiếu của B trên đường thẳng AD.

a. Tìm tập hợp điểm M khi A di chuyển trên (O)

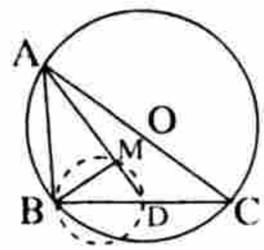
b. Tìm vị trí của điểm A trên (O) để BM có độ dài lớn nhất.

Giải

a. *Hướng dẫn:*

$BM \perp DM \Leftrightarrow \widehat{BMD} = 90^0$

$\Leftrightarrow$ M di chuyển trên đường tròn có đường kính BD, trừ điểm B.



b. Ta có, trong đường tròn có đường kính BD thì

$BM \le BD$ (đường kính là dây lớn nhất).

Do đó, BM có độ dài lớn nhất bằng BD, đạt được khi

$M \equiv D \Leftrightarrow AD \perp BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A

$\Leftrightarrow$ A là giao điểm của đường tròn tâm O với đường trung trực của BC.

Nhận xét: Trong lời giải b), để chỉ ra được vị trí cần tìm của điểm A sao cho BM lớn nhất chúng ta đã bắt đầu bằng bất đẳng thức:

$BM \le BD$, trong đó BD là độ dài không đổi

$\Rightarrow BM_{max} = BD$, đặt được khi $M \equiv D \Rightarrow$ vị trí của A.

Như vậy, lập luận đó dựa trên tính chất "*Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn* ", tuy nhiên, nếu muốn, chúng ta có thể lập luận theo cách khác như sau:

$BD^2 = BM^2 + DM^2 \Rightarrow BM_{max}$ khi DM_{min}.

Từ đó, suy ra $BM_{max} = BD$ đặt được khi:

$DM_{min} = 0 \Leftrightarrow M \equiv D$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Để giải một bài toán tìm quỹ tích ta cần thực hiện theo mấy bước ? Hãy nêu nội dung cần trình bày trong mỗi bước đó.

Câu hỏi 2: Để chứng tỏ rằng quỹ tích của điểm M là một đường tròn ta cần thực hiện như thế nào ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho đường tròn (O, R), điểm A cố định trên đường tròn, điểm B di chuyển trên đường tròn. Tìm quỹ tích trur g điểm M của AB.

Bài tập 2. Cho đường tròn (O, R). Hai điểm A, B di chuyển trên đường tròn sao cho độ dài $AB = 2l$ không đổi ($l < R$). Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn AB.

Bài tập 3. Cho hình bình hành ABCD có cạnh AB cố định, đường chéo AC = 2cm. Tìm quỹ tích của điểm D.

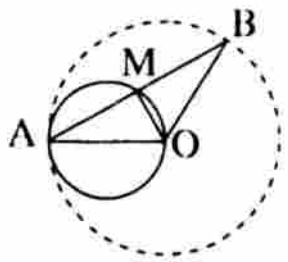
Bài tập 4. Cho đường tròn (O, R) đường kính BC. Điểm A di động trên (O), gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

a. Chứng minh rằng PQ có độ dài không đổi khi A di động trên (O).

b. Tìm quỹ tích trung điểm M của PQ.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.



Phần thuận: Giả sử có điểm M là trung điểm của AB.

Xét ΔOAB, ta có:

$OA = OB = R \Leftrightarrow \Delta OAB$ cân tại O

$\Rightarrow$ OM vừa là đường cao, vừa là trung tuyến

$\Rightarrow \widehat{AMO} = 90^0 \Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn đường kính OA.

Phần đảo: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn (OA), AM cắt (O) tại B. Ta phải chứng minh M là trung điểm của AB.

Thật vậy:

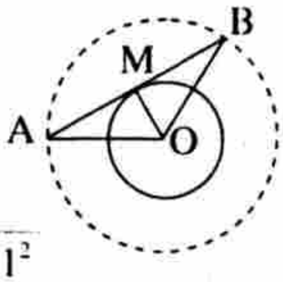
$M \in (OA) \Leftrightarrow \widehat{AMO} = 90^0 \Leftrightarrow OM \perp AB$.

Khi đó, trong ΔOAB cân tại O ta có ngay:

OM là trung tuyến $\Leftrightarrow MA = MB$.

Kết luận: Quỹ tích của điểm M là đường tròn (OA).

Bài tập 2.



Phần thuận: Giả sử có điểm M là trung điểm của AB.

Xét ΔOMA vuông tại M, ta có:

$OM^2 = OA^2 - MA^2 = R^2 - l^2 \Leftrightarrow OM = \sqrt{R^2 - l^2}$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn (O, $\sqrt{R^2 - l^2}$).

Phần đảo: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn (O, $\sqrt{R^2 - l^2}$), đường thẳng qua M vuông góc với OM cắt (O, R) tại A và B. Ta phải chứng minh M là trung điểm của AB và AB = $2l$.

Thật vậy, ta thấy ngay M là trung điểm của AB, ngoài ra:

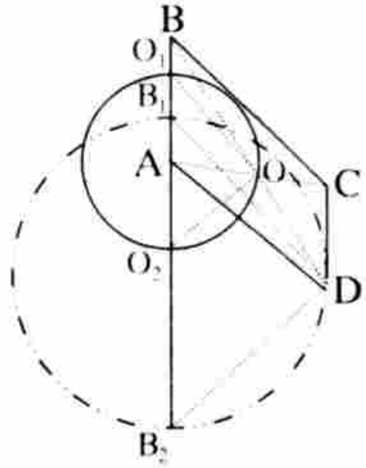
$$AB = 2AM = 2\sqrt{OA^2 - OM^2} = 2\sqrt{R^2 - (R^2 - l^2)} = 2l, \text{ đpcm.}$$

Kết luận: Quỹ tích của điểm M là đường tròn (O, $\sqrt{R^2 - l^2}$).

Bài tập 3. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Phần thuận: Giả sử có điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

Ta có:



$$OA = \frac{1}{2}AC = 1cm \Leftrightarrow O \in (A, 1).$$

Giả sử (A, 1) cắt đường thẳng AB tại O_1 và O_2 (cố định). Gọi B_1 và B_2 theo thứ tự là điểm đối xứng với B qua O_1 và O_2. Ta có ngay.

$O_1\hat{O}O_2 = 90^0$, góc chắn nửa đường tròn

$DB_1 // OO_1$, tính chất đường trung bình

$DB_2 // OO_2$, tính chất đường trung bình

suy ra:

$$\widehat{B_1DB_2} = 90^0 \Leftrightarrow D \text{ thuộc đường tròn đường kính } B_1B_2.$$

Phần đảo: Lấy một điểm D bất kỳ trên đường tròn (B_1B_2), BD cắt (A, 1) tại O, lấy C đối xứng với A qua O. Ta phải chứng minh ABCD là hình bình hành có AC = 2cm.

Thật vậy, ta có ngay:

AC = 2AO = 2cm.

Mặt khác, dựa trên hình vẽ cùng với nhận xét:

$$O_1\hat{O}O_2 = 90^0 \text{ và } \widehat{B_1DB_2} = 90^0 \Rightarrow DB_1 // OO_1.$$

Trong ΔBB_1D, ta có:

$$\begin{cases} BO_1 = B_1O_1 \\ DB_1 // OO_1 \end{cases} \Leftrightarrow OO_1 \text{ là đường trung bình} \Rightarrow OB = OD.$$

Khi đó, tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên nó là hình bình hành.

Kết luận: Quỹ tích của điểm D là đường tròn (B_1B_2).

Bài tập 4. *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Trong ΔABC, có PQ là đường trung bình, do đó.

$$PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.2R = R, \text{ không đổi.}$$

b. Từ kết quả câu a), suy ra A, M, O thẳng hàng và M là trung điểm OA, do đó:

$$OM = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2}$$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn $(O, \frac{R}{2})$.

Bài toán 3

DỰNG ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP

Để dựng một đường tròn ta cần biết tâm và bán kính và hãy nhớ lại "*Tâm của đường tròn đi qua hai điểm A và B cho trước nằm trên đường trung trực của AB*".

Để trình bày lời giải một bài toán dựng hình, ta cần thực hiên bốn phần:

- ***Phân tích***: Giả sử đã dựng được đường tròn (O), từ đây suy ra vị trí tâm và độ dài bán kính của nó.
- ***Cách dựng***: Dựa vào kết quả ở bước phân tích chúng ta suy ra phép dựng hình.
- ***Chứng minh***: Chứng minh đường tròn được dựng ở bước dựng hình thoả mãn điều kiện đầu bài.
- ***Biện luận***: Số đường tròn thoả mãn điều kiện đầu bài.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

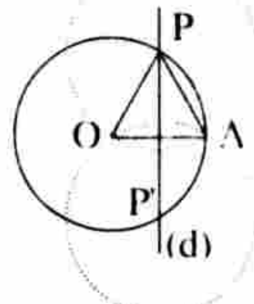
Ví dụ 1: Cho trước đường tròn (O) và một điểm A nằm trên đường tròn đó. Hãy dựng đường tròn tâm P đi qua O và A và có tâm nằm trên đường tròn (O).

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn (P) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Vì O, A$\in$(P) $\Rightarrow$ P nằm trên đường trung trực d của OA.

Vậy, tâm P là giao điểm của đường trung trực d với đường tròn (O).



Cách dựng : Ta lần lượt:

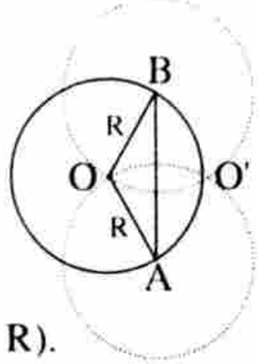
- Dựng đường trung trực d của OA.
- d cắt đường tròn (O) tại P và P'.
- Dựng đường tròn (P , PO).

Chứng minh : Ta thấy ngay (P, PO) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Biện luận. Vì đường thẳng (d) cắt đường tròn (O) tại hai điểm P và P' nên bài toán có hai nghiệm hình, đó là hai đường tròn (P, PO) và (P', P'O).

Ví dụ 2: Dựng một đường tròn (O) có bán kính R cho trước và đi qua hai điểm A và B cho trước.

Giải



Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn (O) thoả mãn điều kiện đầu bài, ta có:

- $A \in (O, R) \Rightarrow OA = R \Rightarrow O \in (A, R)$.
- $B \in (O, R) \Rightarrow OB = R \Rightarrow O \in (B, R)$.

Vậy, tâm O là giao của hai đường tròn (A, R) và (B, R).

Cách dựng: Ta lần lượt:

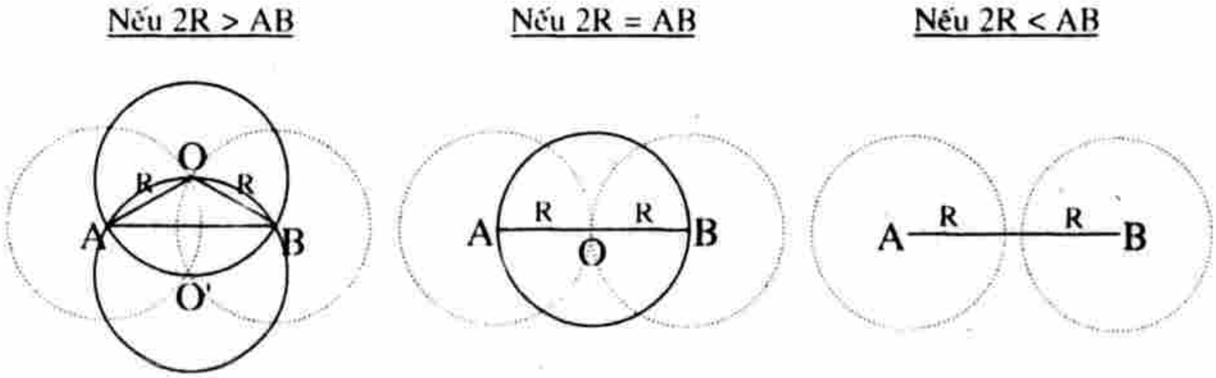
- Dựng các đường tròn (A, R) và (B, R) và gọi O là giao điểm của hai đường tròn đó.
- Dựng đường tròn (O, R).

Chứng minh: Theo cách dựng ta có:

$OA = OB = R \Rightarrow A, B \in (O, R)$.

Biện luận: Số nghiệm hình của bài toán phụ thuộc vào số giao điểm của hai đường tròn (A, R) và (B, R), ta có:

- Nếu $2R > AB$ thì bài toán có hai nghiệm hình.
- Nếu $2R = AB$ thì bài toán có một nghiệm hình.
- Nếu $2R < AB$ thì bài toán không có nghiệm hình.



III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Để giải một bài toán dựng hình ta cần thực hiện theo mấy bước ? Hãy nêu nội dung cần trình bày trong mỗi bước đó.

Câu hỏi 2: Để dựng một đường tròn thoả mãn điều kiện cho trước ta cần thực hiện như thế nào ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC có ba góc nhọn, đường cao AD. Dựng điểm M thuộc đường thẳng AD sao cho $\widehat{BMC} = 90^0$.

Bài tập 2. Cho đường thẳng d và một điểm A cách đường thẳng d là 1cm. Dựng đường tròn (O) có bán kính 1,5cm đi qua A và có tâm nằm trên đường thẳng d.

Bài tập 3. Dựng một đường tròn (O) đi qua hai điểm A và B cho trước và có tâm ở trên đường thẳng d cho trước (A, B không thuộc d).

Bài tập 4. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Biết rằng qua bốn điểm A, B, C, D có thể vẽ được một đường tròn, qua bốn điểm B, C, D, E cũng vẽ được một đường tròn. Hỏi qua cả năm điểm A, B, C, D, E có thể vẽ được một đường tròn không ?

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

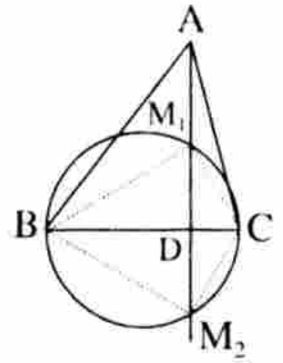
Bài tập 1.

Phân tích: Giả sử đã dựng được điểm M thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ta có:

$$\widehat{BMC} = 90^0 \Rightarrow M \in (BC).$$

Vậy, M là giao của đường thẳng AD với đường tròn (BC).



Cách dựng : Ta lần lượt:

- Dựng (BC)
- Đường thẳng AD cắt đường tròn (BC) tại M.

Khi đó, M là điểm cần dựng.

Chứng minh : Ta thấy ngay $\widehat{BMC} = 90^0$.

Biện luận: Vì đường thẳng AD cắt đường tròn (BC) tại hai điểm M_1 và M_2 nên bài toán có hai nghiệm hình, đó là M_1 và M_2.

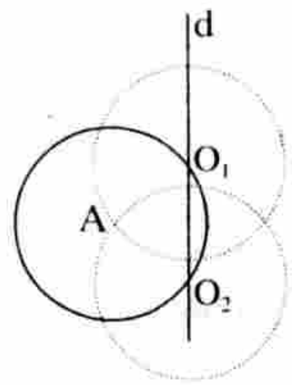
Bài tập 2.

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn (O) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ta có:

$$OA = 1{,}5cm \Rightarrow O \in (A;\ 1{,}5cm).$$

Vậy, tâm O là giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (A; 1,5cm).



Cách dựng : Ta lần lượt:

- Dựng đường tròn (A; 1,5cm).
- d cắt đường tròn (A; 1,5cm) tại O.
- Dựng đường tròn (O; 1,5cm).

Chứng minh : Ta thấy ngay (O; 1,5cm) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Biện luận: Vì đường thẳng d cắt đường tròn (A; 1,5cm) tại hai điểm O_1 và O_2 nên bài toán có hai nghiệm hình, đó là hai đường tròn (O_1; 1,5cm) và (O_2; 1,5cm).

Bài tập 3.

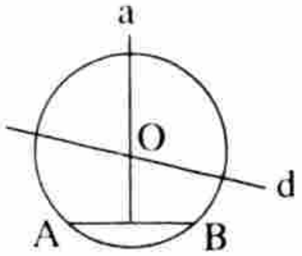
Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn (O) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ta có:

A, B $\in$ (O)

$\Rightarrow$ O nằm trên đường trung trực a của AB.

Vậy, tâm O là giao của a và d.



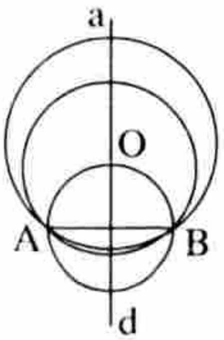
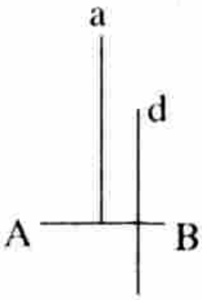
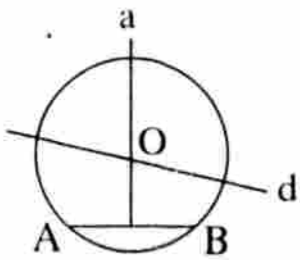
Cách dựng : Ta lần lượt:

- Dựng đường trung trực a của AB.
- d cắt a tại O.
- Dựng đường tròn (O , OA).

Chứng minh : Ta thấy ngay (O, OA) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Biện luận: Vì với hai đường thẳng d và a ta có ba trường hợp về vị trí tương đối nên:

- Nếu a $\equiv$ d $\Leftrightarrow$ d là trung trực của AB thì bài toán có vô số nghiệm hình.
- Nếu a // d $\Leftrightarrow$ AB $\perp$ d (d không là ttrung trực của AB) thì bài toán vô nghiệm.
- Nếu a cắt d thì bài toán có nghiệm hình duy nhất.

Nếu d là trung trực của AB	Nếu AB $\perp$ d và không là trung trực của AB	Nếu AB không vuông góc với d
		

Bài tập 4. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Với giả thiết:

- Bốn điểm A, B, C, D thuộc đường tròn (O_1), suy ra $(O_1) \equiv (O)$.
- Bốn điểm E, B, C, D thuộc đường tròn (O_2), suy ra $(O_2) \equiv (O)$.

Vậy, cả năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc đường tròn (O).

CHỦ ĐỀ 2

ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CUNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

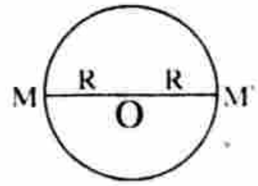
1. TÂM ĐỐI XỨNG - TRỤC ĐỐI XỨNG

Cho đường tròn (O, R) và có đường kính AB, ta có nhận xét sau:

1. Với điểm M bất kỳ thuộc (O, R) và gọi M' là điểm đối xứng với M qua O, suy ra:

$$OM' = OM = R$$

$$\Rightarrow M' \in (O, R)$$

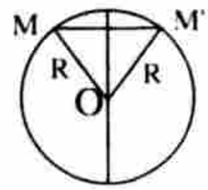


Vậy O là tâm đối xứng của đường tròn (O, R).

Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

2. Với điểm M bất kỳ thuộc (O, R) và gọi M' là điểm đối xứng với M qua đường kính AB, suy ra:

$$OM' = OM = R \Rightarrow M' \in (O, R)$$



Vậy AB là trục đối xứng của đường tròn (O, R).

Bất kỳ đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

2. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CUNG

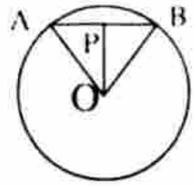
Ta có các kết quả sau:

1. *Đường kính vuông góc với một dây thì chia dây ấy ra hai phần bằng nhau.*
2. *Đường kính đi qua trung điểm của một dây (không qua tâm) thì vuông góc với dây ấy.*

Ngoài việc ứng dụng kết quả trên trong các bài toán định tính và định lượng, chúng ta còn sử dụng nó trong bài toán dựng hình và bài toán quỹ tích. Hai thí dụ sau sẽ minh hoạ nhận xét này.

Thí dụ 1: Cho một đường tròn (O) và một điểm P khác O ở bên trong đường tròn. Dựng một dây cung AB đi qua P sao cho PA = PB.

Giải



Phân tích: Giả sử đã dựng được dây AB đi qua P sao cho PA = PB, ta có:

$$PA = PB \Rightarrow OP \perp AB.$$

Cách dựng: Dựng đường thẳng (d) qua P và vuông góc với OP cắt (O) tại hai điểm A, B.

Chứng minh: Vì :

$$OP \perp AB \Rightarrow PA = PB.$$

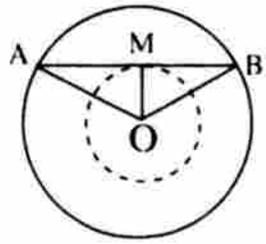
Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Lưu ý: Nếu $P \equiv O$; bài toán có vô số nghiệm hình.

Thí dụ 2: Cho đường tròn (O, R). Tìm quỹ tích trung điểm M của các dây AB sao cho $\widehat{AOB} = 120^0$.

Giải

Phần thuận: Giả sử có điểm M là trung điểm của dây cung AB sao cho $\widehat{AOB} = 120^0$.



Trong ΔOAM, ta có:

$$\widehat{AOM} = 60^0 \Rightarrow \widehat{OAM} = 30^0$$

$$\Rightarrow OM = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2} \Rightarrow M \in (O, \frac{R}{2}).$$

Phần đảo: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn $(O, \frac{R}{2})$, dựng dây cung AB qua M và vuông góc với OM. Ta phải chứng minh $\widehat{AOB} = 120^0$.

Thật vậy, trong ΔOAM vuông tại M, ta có:

$$OM = \frac{1}{2}OA \Rightarrow \widehat{OAM} = 30^0 \Leftrightarrow \widehat{AOM} = 60^0$$

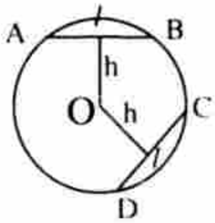
$$\Leftrightarrow \widehat{AOB} = 2\widehat{AOM} = 120^0.$$

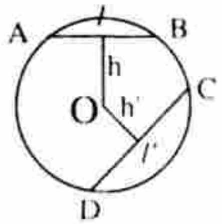
Kết luận: Quỹ tích của điểm M là đường tròn $(O, \frac{R}{2})$.

3. DÂY CUNG VÀ KHOẢNG CÁCH ĐẾN TÂM

Ta có các kết quả sau:

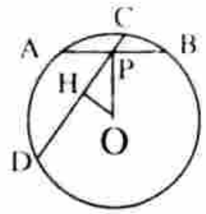
> 1. *Trong một đường tròn hai dây bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.*
> 2. *Trong hai dây không bằng nhau của một đường tròn dây lớn hơn khi và chỉ khi nó gần tâm hơn.*





Cả hai kết quả trên vẫn đúng với trường hợp hai đường tròn có bán kính bằng nhau (gọi là hai đường tròn bằng nhau) và nó tỏ ra rất hiệu quả trong bài toán cực trị. Thí dụ sau sẽ minh hoạ nhận xét này.

Thí dụ 3: Cho một đường tròn (O) và điểm P ở bên trong đường tròn. Chứng minh rằng trong tất cả các dây cung đi qua P thì dây cung vuông góc với bán kính qua P là dây cung ngắn nhất.



Giải

Gọi AB là dây cung qua P và vuông góc với OP và CD là dây cung bất kỳ đi qua P.

Hạ OH vuông góc với CD, ta có ngay:

$OH \le OP$, vì trong tam giác vuông cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền

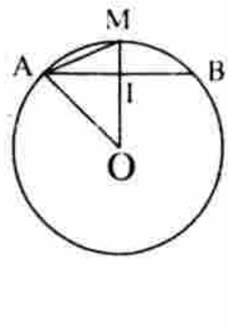
$\Rightarrow AB \le CD \Rightarrow AB$ là dây cung ngắn nhất.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O, R) và một dây cung AB = 2a (a < R).

Gọi I là trung điểm của AB. Tia OI cắt cung $\overset{\frown}{AB}$ tại M. Tính độ dài của dây cung MA.

Giải



Trong ΔAMI, ta có:

$$AM^2 = AI^2 + MI^2 = a^2 + MI^2. \qquad (1)$$

Mặt khác:

$$MI = OM - OI = R - OI.$$

Trong ΔOAI, ta có:

$$OI^2 = OA^2 - AI^2 = R^2 - a^2 \Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow MI = R - \sqrt{R^2 - a^2}\,. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$AM^2 = AI^2 + MI^2 = a^2 + (R - \sqrt{R^2 - a^2})^2$$

$$= a^2 + R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2} + R^2 - a^2$$

$$= 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2}}.$$

Vậy, độ dài dây cung $AM = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2}}$.

Nhận xét: Trong lời giải trên để tính độ dài dây cung AM chúng ta lựa chọn phương pháp trình bày theo hướng phát sinh yêu cầu rồi thực hiện yêu cầu này để đạt được mục đích cuối cùng là AM, cụ thể:

$AM^2 = AI^2 + MI^2 = a^2 + MI^2 \Rightarrow$ cần xác định MI.

$MI = OM - OI = R - OI \Rightarrow$ cần xác định OI.

OI được xác định dựa vào ΔOAI.

Từ đó thay ngược lại kết quả để nhận được AM.

Cách trình bày như vậy sẽ rất dễ hiểu, tuy nhiên nó lại tỏ ra dài dòng, chính vì lý do này mà các em học sinh hãy lưu trữ nó trong suy nghĩ còn khi trình bày lời giải thì trình bày theo kiểu ngược lại, cụ thể:

Suy nghĩ	***Trình bày***
1. Để tính AM cần xác định MI. 2. Để tính MI cần xác định OI. 3. OI được xác định dựa vào ΔOAI.	Trong ΔOAI, ta có: $OI^2 = OA^2 - AI^2 = R^2 - a^2$ $\Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - a^2}$ Suy ra $MI = OM - OI = R - \sqrt{R^2 - a^2}$ Trong ΔAMI, ta có: $AM^2 = AI^2 + MI^2$ $= a^2 + (R - \sqrt{R^2 - a^2})^2$. $\Rightarrow AM = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - a^2}}$.

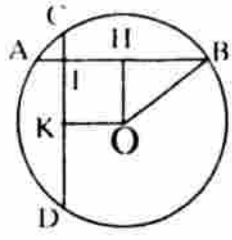
Các em học sinh có thể luyện tập bằng việc giải lại ví dụ này với R = 5cm và a = 3cm.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O) và hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Giả sử IA = 2a, IB = 2b (a < b).

a. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây.

b. Tính bán kính của đường tròn (O).

Giải



a. Hạ OH, OK theo thứ tự vuông góc với AB và CD, ta có:

$$OH = OK \text{ vì } AB = CD.$$

$$HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{AI + IB}{2} = \frac{2a + 2b}{2} = a + b.$$

Tứ giác IHOK có ba góc vuông nên là hình chữ nhật, ngoài ra có hai cạnh liên tiếp OH và OK bằng nhau nên là hình vuông.

Suy ra

$$OH = OK = IH = AH - AI = a + b - 2a = b - a.$$

b. Trong ΔHOB, ta có:

$$R^2 = OB^2 = OH^2 + HB^2 = (b - a)^2 + (a + b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Vậy, ta được $R = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (O), dây AB = 2a và khoảng cách từ nó tới tâm bằng h. Gọi I là trung điểm của AB. Tia IO cắt đường tròn tại C.

a. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác cân.

b. Tính khoảng cách từ O đến BC.

Giải

a. Ta có:

$$AI = IB = a \Rightarrow OI \perp AB.$$

Suy ra ΔABC có trung tuyến CI là đường cao nên là tam giác cân.

b. Hạ OH vuông góc với BC, ta có:

$$HB = HC = \frac{1}{2}BC.$$

Trong ΔOIB, ta có:

$$OB^2 = IO^2 + IB^2 = h^2 + a^2 \Rightarrow OB = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Ta có:

$$IC = IO + OC = IO + OB = h + \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Trong ΔIBC, ta có:

$$BC^2 = IC^2 + IB^2 = (h + \sqrt{a^2 + h^2})^2 + a^2 = 2(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2)$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{2(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2)}$$

$$\Rightarrow HB = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2)}.$$

Trong ΔOHB, ta có:

$$OH^2 = OB^2 - HB^2 = (\sqrt{a^2 + h^2})^2 - [\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2)}]^2$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2)$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{\frac{a^2 - h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2}{2}}.$$

Nhận xét: Trong lời giải trên:

1. Ở câu a) ta chỉ cần sử dụng kết quả " *Đường kính đi qua trung điểm của một dây thì vuông góc với dây ấy* ", từ đó dẫn tới tam giác có trung tuyến là đường cao, do đó nó là tam giác vuông.
2. Ở câu b) chúng ta đã lựa chọn phương pháp trình bày ngược sau suy nghĩ theo kiểu phát sinh yêu cầu, cụ thể ta nghĩ :
   - Để tính OH cần xác định BH và OB.
   - $BH = \frac{1}{2}BC$ và BC được xác định thông qua ΔIBC nếu biết OC (tức là OB).
   - OB được xác định thông qua ΔOIB.
3. Tất nhiên có thể tính OH thông qua sự đồng dạng của hai tam giác vuông là ΔOHC và ΔBIC - *Bạn đọc tự làm.*

Các em học sinh có thể luyện tập bằng việc giải lại ví dụ này với a = 24cm và h = 7cm.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Điểm nào là tâm đối xứng của một đường tròn ?

Câu hỏi 2: Đường thẳng nào là trục đối xứng của một đường tròn ? Từ đó hãy cho biết một đường tròn có bao nhiêu trục đối xứng ?

Câu hỏi 3: Phát biểu định lí về đường kình vuông góc với một dây. Vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 4: Phát biểu định lí về đường kình đi qua trung điểm của một dây. Vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 5: Trong một đường tròn hai dây cung bằng nhau khi nào ?

Câu hỏi 6: Trong một đường tròn hai dây cung không bằng nhau ta có được kết quả gì ?

IV.BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, AC sao cho AB < AC và tâm O nằm trong góc ABC. Chứng minh rằng $O\hat{A}B > O\hat{A}C$.

Bài tập 2. Cho đường tròn (O, R) và hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho OM = ON. Vẽ dây CD đi qua M và N (M nằm giữa C và N).

a. Chứng minh rằng CM = DN.

b. Giả sử $A\hat{O}B = 90^0$, hãy tính OM, ON theo R sao cho CM = MN = ND.

Bài tập 3. Cho đường tròn (O, R) đường kính AB. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của OA và OB. Qua M và N lần lượt vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

a. Chứng minh tứ giác CDFE là hình chữ nhật.

b. Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn là 30^0, tính diện tích hình chữ nhật CDFE.

Bài tập 4. Cho đường tròn (O, R). Tìm quỹ tích trung điểm M của các dây AB sao cho $A\hat{O}B = 60^0$.

Bài tập 5. Cho đường tròn (O) và một điểm A ở bên trong đường tròn đó ($A \neq O$). Dựng hình thoi ABCD sao cho B, C, D nằm trên đường tròn (O).

Bài tập 6. Cho ΔABC có ba góc nhọn. Ở phía ngoài tam giác vẽ các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB và AC. Qua A vẽ đường thẳng (d) cắt các nửa đường tròn trên thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng.

a. Nếu (d) song song với BC thì BEFC là hình chữ nhật.

b. Nếu (d) vuông góc với trung tuyến AM của ΔABC thì AE = AF.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự vẽ hình.*

Hạ OE, OF theo thứ tự vuông góc với AB và AC.

Từ giả thiết:

$$AB < AC \Leftrightarrow OE > OF.$$

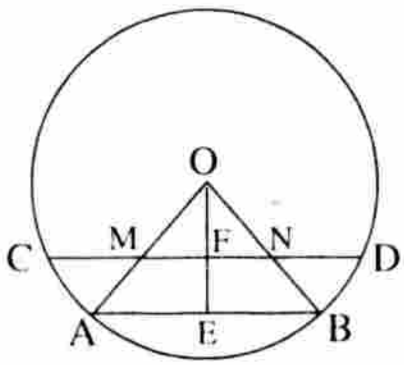
Trên OE lấy điểm F' sao cho OF' = OF, ta thấy ngay điểm F' nằm giữa O và E, suy ra:

$O\hat{A}E > O\hat{A}F = O\hat{A}F$, vì $\Delta OAF = \Delta OAF$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông)

$\Leftrightarrow O\hat{A}B > O\hat{A}C$, đpcm.

Bài tập 2.

a. Hạ OE vuông góc với AB cắt CD tại F.



Trong ΔOAB cân tại O, ta có:

$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} \Rightarrow MN \parallel AB$$

$$\Rightarrow OF \perp MN \text{ và } MF = NF.$$

Ta có nhận xét thêm:

$$OF \perp MN \Leftrightarrow OF \perp CD \Leftrightarrow CF = DF.$$

Khi đó:

$$CM = CF - MF = DF - NF = DN, \text{ đpcm.}$$

b. Đặt MF = x, suy ra:

$$CF = CM + MF = MN + MF = 3MF = 3x.$$

$OF = x$, vì ΔOMF vuông cân tại F.

Trong ΔOCF, ta có:

$$OF^2 = OC^2 - CF^2 \Leftrightarrow x^2 = R^2 - 9x^2 \Leftrightarrow 10x^2 = R^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{10}}.$$

Khi đó, ta được:

$$ON = OM = OF\sqrt{2} = \frac{R}{\sqrt{10}}.\sqrt{2} = \frac{R}{\sqrt{5}}.$$

Vậy, với $ON = OM = \dfrac{R}{\sqrt{5}}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 3.

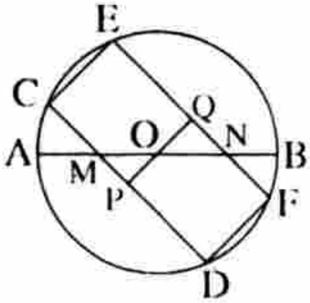
a. Hạ OP vuông góc với CD cắt EF tại Q, suy ra:

CP = DP, tính chất đường kính vuông góc với dây cung.

$OQ \perp EF$, vì $EF \parallel CD$

$\Rightarrow$ EQ = FQ, tính chất đường kính vuông góc với dây cung.

Xét hai tam giác vuông ΔOPM và ΔOQN, ta có:



$$OM = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OB = ON$$

$\widehat{MOP} = \widehat{NOQ}$, vì đối đỉnh

do đó:

$\Delta OPM = \Delta OQN$ (cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow OP = OQ \Leftrightarrow CD = EF$.

Khi đó, tứ giác CDFE có:

$CD \overset{//}{=} EF \Leftrightarrow$ CDFE là hình bình hành.

Trong hình bình hành CDFE, ta có:

PQ là đường trung bình $\Rightarrow PQ \parallel CE \Rightarrow CD \perp CE$

$\Rightarrow$ CDFE là hình chữ nhật.

b. Ta có:

$$S_{CDFE} = CE.CD. \qquad (1)$$

Trong ΔOPM vuông tại P, với $\widehat{OMP} = 30^0$, suy ra:

$$OP = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}OA = \frac{R}{4}.$$

$$CE = PQ = 2OP = \frac{R}{2}. \qquad (2)$$

Trong ΔOPC vuông tại P, ta có:

$$CP = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}} = \frac{R\sqrt{15}}{4}.$$

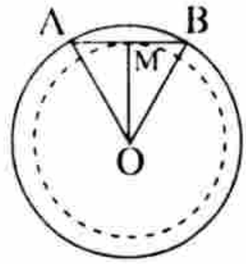
$$CD = 2CP = \frac{R\sqrt{15}}{2}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_{CDFE} = \frac{R}{2}.\frac{R\sqrt{15}}{2} = \frac{R^2\sqrt{15}}{4}.$$

Bài tập 4.

Phần thuận: Giả sử có điểm M là trung điểm của dây cung AB sao cho $\widehat{AOB} = 60^0$.



Trong ΔOAB, ta có:

$OA = OB = R$ và $\widehat{AOB} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta OAB$ đều $\Rightarrow OM = \dfrac{OA\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow M \in (O, \dfrac{R\sqrt{3}}{2})$.

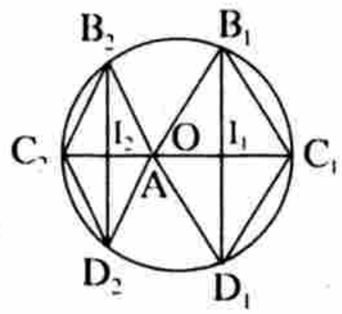
Phần đảo: Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn $(O, \dfrac{R\sqrt{3}}{2})$, dựng dây cung AB qua M và vuông góc với OM. Ta phải chứng minh $\widehat{AOB} = 60^0$.

Thật vậy, trong ΔOAB cân tại O, ta có:

$$OM = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{OA\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta OAB \text{ đều} \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^0.$$

Kết luận: Quỹ tích của điểm M là đường tròn $(O, \dfrac{R\sqrt{3}}{2})$.

Bài tập 5.



Phân tích: Giả sử đã dựng được hình thoi ABCD thoả mãn điều kiện đầu bài, ta có:

AC là đường trung trực của BD $\Rightarrow O \in AC$.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Nối AO cắt đường tròn (O) tại C, lấy I là trung điểm AC.
- Dựng đường thẳng d qua I và vuông góc với AC cắt đường tròn (O) tại B và D.

Khi đó, ABCD là hình thoi cần dựng.

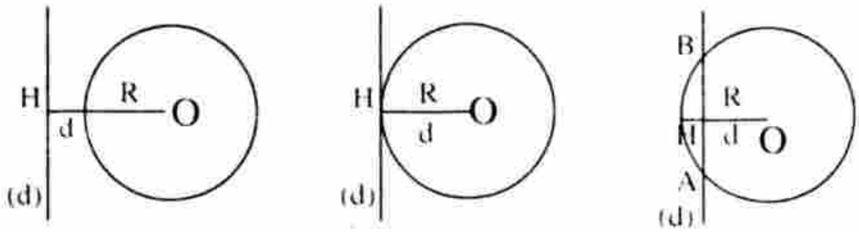
Chứng minh: Vì tứ giác ABCD có hai được vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên nó là hình thoi.

Biện luận: Vì AO cắt đường tròn (O) tại hai điểm C_1 và C_2 nên bài toán có hai nghiệm hình.

CHỦ ĐỀ 3 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Vị trí tương đối của đường thẳng (d) và đường tròn (O) được đánh giá thông qua số điểm chung của (d) với (O).



Như vậy, ta có ba vị trí tương đối:

- Nếu $(d)\cap(O) = \varnothing \Leftrightarrow$ (d) và (O) không giao nhau $\Leftrightarrow d > R$, với $d = OH$ và H là hình chiếu vuông góc của O lên (d).
- Nếu $(d)\cap(O) = \{H\} \Leftrightarrow$ (d) tiếp xúc với (O) tại H $\Leftrightarrow d = R$.
- Nếu $(d)\cap(O) = \{A, B\} \Leftrightarrow$ (d) và (O) cắt nhau $\Leftrightarrow d < R$.

BẢNG TÓM TẮT BA VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
1. Đường thẳng và đường tròn không giao nhau.	0	$d > R$
2. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn	1	$d = R$
3. Đường thẳng cắt đường tròn	2	$d < R$

Thí dụ 1: Cho đường thẳng d và điểm O không thuộc d. Hãy nêu cách dựng một đường tròn tâm O sao cho:

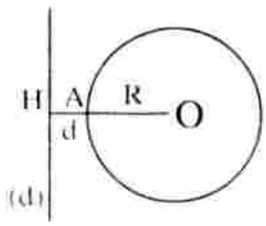
a. d không cắt (O).

b. d tiếp xúc với (O).

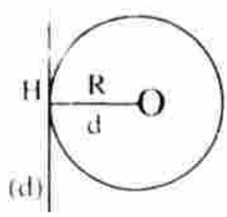
c. d cắt (O).

Giải

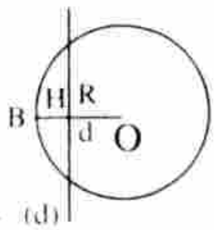
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d.



Hình a



Hình b



Hình c

a. (Hình a) Lấy điểm A nằm giữa O và H, rồi vẽ đường tròn (O, OA). Khi đó, đường thẳng d không cắt đường tròn (O, OA) bởi:

$R = OA < OH = d$.

b. (Hình b) Vẽ đường tròn (O, OH). Khi đó, đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O, OH) bởi:

$R = OH = d$.

c. (Hình c) Lấy điểm B nằm trên tia đối của tia HO, rồi vẽ đường tròn (O, OB). Khi đó, đường thẳng d cắt đường tròn (O, OB) bởi:

$R = OB > OH = d$.

Chú ý: Như vậy, để xác định được vị trí tương đối của đường thẳng d với đường tròn (O, R) cho trước, ta cần thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Hạ OH vuông góc với đường thẳng d.

Bước 2: Tính độ dài đoạn OH.

Bước 3: Thực hiện phép so sánh OH với R, từ đó đưa ra kết luận.

Ngoài ra:

1. Nếu ta có:

$A \in d$ và A nằm trong (O, R) $\Rightarrow$ d cắt (O, R)

đánh giá trên cho phép chúng ta nhận được lời giải đơn giản hơn rất nhiều.

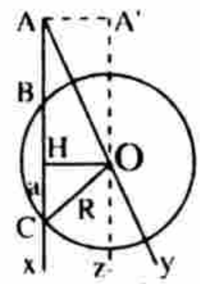
2. $A \in d$, $A \in (O, R)$ và $OA \perp d$ thì d tiếp xúc với (O)

3. $A \in d$, $A \in (O, R)$ và OA không vuông góc với d thì d cắt đường tròn (O).

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho góc $x\hat{A}y$ khác góc bẹt. Dựng đường tròn (O, R) sao cho tia Ay qua O, đường thẳng Ax cắt (O) tại hai điểm B và C sao cho BC = 2a, với a < R.

Giải



Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn (O, R) thoả mãn điều kiện.

Hạ OH ⊥ BC, ta có:

$$OH^2 = OC^2 - HC^2 = R^2 - a^2$$

$\Rightarrow OH = \sqrt{R^2 - a^2}$, tức là độ dài OH không đổi

$\Rightarrow$ O thuộc đường thẳng song song và cách Ax một khoảng bằng OH.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng tia Az qua A và vuông góc với Ax (về phần mặt phẳng chứa Ay).
- Trên Az lấy điểm A' sao cho $AA' = \sqrt{R^2 - a^2}$.
- Dựng đường thẳng (d) qua A' và song song với Ax cắt tia Ay ở O.
- Dựng đường tròn (O, R).

Chứng minh: Trước hết theo cách dựng ta có (O, R) và O thuộc Ay, ta phải đi chứng minh BC = 2a.

Thật vậy, hạ OH ⊥ BC, ta có:

$$OH = AA' = \sqrt{R^2 - a^2}.$$

$$BC = 2CH = 2\sqrt{OC^2 - OH^2}$$

$$= 2\sqrt{R^2 - (R^2 - a^2)} = 2a$$

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Nhận xét: Các em học sinh hãy thực hiện yêu cầu trên cho các trường hợp:

1. a = R
2. a > R.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

a. Nếu đường thẳng xy không cắt đường tròn (O, R) thì mọi điểm của xy ở bên ngoài đường tròn đó.

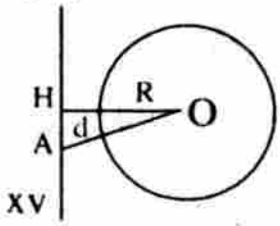
b. Nếu đường thẳng xy đi qua một điểm bên trong đường tròn (O, R) thì phải cắt đường tròn này tại hai điểm phân biệt.

c. Nếu đường thẳng xy cắt đường tròn (O, R) tại hai điểm phân biệt A, B thì mọi điểm nằm giữa hai điểm A và B đều nằm bên trong đường tròn, các điểm còn lại (trừ A, B) nằm bên ngoài đường tròn đó.

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng xy.

a. Từ giả thiết suy ra OH > R.



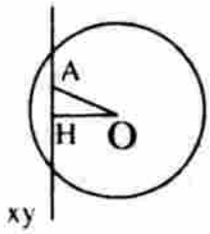
Gọi A là điểm bất kì trên xy, suy ra:

$OA \geq OH$ (Cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông)

$\Rightarrow OA > R \Leftrightarrow$ A nằm ngoài đường tròn.

Vậy, mọi điểm của xy ở bên ngoài đường tròn (O, R).

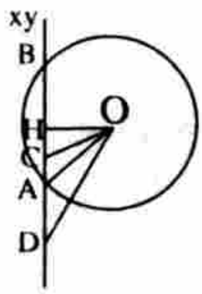
b. Gọi A là điểm ở bên trong đường tròn (O, R) mà đường thẳng xy đi qua, ta có:



$OH \leq OA < R$

$\Leftrightarrow$ xy và (O, R) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

c. Gọi C là điểm bất kì nằm giữa A và B, ta có:



$HC < HA \Leftrightarrow OC < OA = R$

$\Leftrightarrow$ C nằm trong đường tròn (O, R)

Vậy, mọi điểm nằm giữa hai điểm A và B đều nằm bên trong đường tròn.

Gọi D là điểm bất kì nằm ngoài đoạn AB, ta có:

$HD > HA \Leftrightarrow OD > OA = R$

$\Leftrightarrow$ D nằm ngoài đường tròn (O, R)

Vậy, mọi điểm nằm ngoài đoạn AB đều nằm bên ngoài đường tròn.

Nhận xét: Trong lời giải trên ngoài việc sử dụng kết quả về vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn chúng ta còn sử dụng kết quả về vị trí tương đối của điểm với đường tròn, cụ thể với đường tròn (O, R) và điểm M, ta có:

- Nếu $OM < R \Leftrightarrow$ M nằm trong đường tròn.
- Nếu $OM = R \Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn.
- Nếu $OM > R \Leftrightarrow$ M nằm ngoài đường tròn.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Viết bảng tóm tắt ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 2: Nêu các bước cần thực hiện để xác định được vị trí tương đối của đường thẳng d với đường tròn (O, R) cho trước.

Câu hỏi 3: Nếu đường thẳng d đi qua một điểm A ở bên trong đường tròn (O) thì kết luận được điều gì về vị trí tương đối của d với (O).

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho góc $x\hat{A}y$ khác góc bẹt.

a. Dựng đường tròn (O, R) có tâm O thuộc Ay và tiếp xúc với đường thẳng Ax.

b. Dựng đường tròn (O, R) tiếp xúc với Ax và Ay.

Bài tập 2. Cho góc nhọn xAy, điểm C thuộc tia Ax. Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với Ax tại C tâm O thuộc tia Ay.

Bài tập 3. Cho trước góc $x\hat{A}y$ khác góc bẹt và một điểm B trên cạnh Ax. Hãy dựng đường tròn (O) đi qua B và tiếp xúc với Ay tại A.

Bài tập 4. Cho đường thẳng d, điểm A thuộc đường thẳng điểm B nằm ngoài đường thẳng. Dựng đường thẳng (O) đi qua B và tiếp xúc với đường thẳng d tại A.

Bài tập 5. Cho ΔABC vuông cân tại A. Vẽ phân giác BI.

a. Chứng minh rằng đường tròn (I; IA) tiếp xúc với các đường thẳng AB và BC.

b. Cho biết AB = a, tính IA từ đó suy ra $tg22^0 30' = \sqrt{2} - 1$.

Bài tập 6. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy OA làm đường kính vẽ nửa đường tròn cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AB với nửa đường tròn (O). Trên nửa đường tròn đường kính OA lấy một điểm C (khác A và O). Tia OC cắt nửa đường tròn (O) tại D. Kẻ DH vuông góc AB. Chứng minh rằng tứ giác AHCD là hình thang cân.

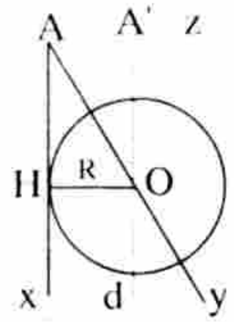
Bài tập 7. Gọi p, a, r và S lần lượt là nửa chu vi, cạnh huyền, bán kính đường tròn nội tiếp và diện tích của một tam giác vuông. Chứng minh rằng:

a. r = p - a

b. S = p.a.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.



a. Ta thực hiện theo các bước:

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn (O, R) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Hạ OH ⊥ Ay, ta có:

OH = R

⇒ O thuộc đường thẳng d song song và cách Ax một khoảng bằng OH (d thuộc nửa mặt phẳng chứa Ax có bờ Ay).

Cách dựng : Ta lần lượt thực hiện:

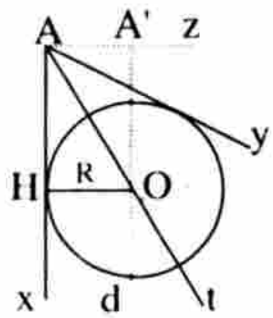
- Dựng tia Az qua A và vuông góc với Ax (về phần mặt phẳng chứa Ay).
- Trên Az lấy điểm A' sao cho AA' = R.
- Dựng đường thẳng d qua A' và song song với Ax, cắt tia Ay ở O.
- Dựng đường tròn (O, R).

Chứng minh: Trước hết theo cách dựng ta có (O, R) và O thuộc Ay, ta phải đi chứng minh (O, R) tiếp xúc với Ax.

Thật vậy, hạ OH ⊥ Ax, ta có:

OH = AA' = R ⇔ (O, R) tiếp xúc với Ax.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.



b. Ta thực hiện theo các bước:

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường tròn (O, R) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Vì (O, R) tiếp xúc với Ax và Ay nên tâm O thuộc tai phân giác At của góc xÂy.

Hạ OH ⊥ Ay, ta có:

OH = R

⇒ O thuộc đường thẳng d song song và cách Ax một khoảng bằng OH (d thuộc nửa mặt phẳng chứa Ax có bờ Ay).

Cách dựng : Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng tia phân giác At của góc xÂy.

- Dựng tia Az qua A và vuông góc với Ax (về phần mặt phẳng chứa Ay).
- Trên Az lấy điểm A' sao cho AA' = R.
- Dựng đường thẳng d qua A' và song song với Ax, cắt tia At ở O.
- Dựng đường tròn (O, R).

Chứng minh: Trước hết theo cách dựng ta có (O, R) và O thuộc At, ta phải đi chứng minh (O, R) tiếp xúc với Ax và Ay.

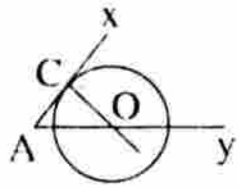
Thật vậy, hạ $OH \perp Ax$, ta có:

$$OH = AA' = R \Leftrightarrow d(O, Ax) = d(O, Ay) = R$$

$$\Leftrightarrow (O, R) \text{ tiếp xúc với } Ax \text{ và } Ay.$$

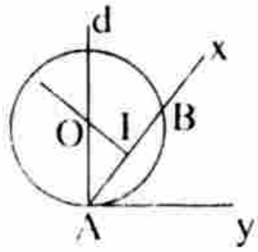
Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Bài tập 2. *Hướng dẫn*:



Tâm O là giao điểm của đường thẳng d (d qua C và vuông góc với Ax) với tia Ay.

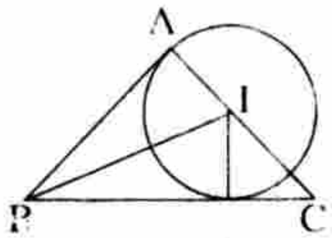
Bài tập 3. *Hướng dẫn*:



Tâm O là giao điểm của đường thẳng d (d qua A và vuông góc với Ay) với đường trung trực của đoạn AB.

Bài tập 4. *Tương tự bài tập 3.*

Bài tập 5.



a. Ta có:

$$IA \perp BA \Leftrightarrow IA = d(I, BA)$$

$$\Leftrightarrow (I, IA) \text{ tiếp xúc với } BA \text{ tại } A.$$

Mặt khác:

BI là phân giác góc $\widehat{ABC}$

do đó (I, IA) tiếp xúc với BC.

b. Sử dụng tính chất của tia phân giác trong ΔABC, ta có:

$$\frac{IA}{BA} = \frac{IC}{BC} = \frac{AC - IA}{BA\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{IA}{a} = \frac{a - IA}{a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\, IA = a - IA$$

$$\Leftrightarrow IA = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = a(\sqrt{2} - 1).$$

Khi đó, trong ΔABI vuông tại A, ta có:

$$tg\,\widehat{ABI} = \frac{IA}{BA} \Leftrightarrow tg22^0 30' = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{a} = \sqrt{2} - 1, \text{ dpcm.}$$

CHỦ ĐỀ 4 TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

> ***Định nghĩa**: Một đường thẳng được gọi là một tiếp tuyến của đường tròn nếu nó chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.*

Như vậy, ta có:

$$(d) \text{ là tiếp tuyến của } (O) \Leftrightarrow (d) \cap (O) = \{H\}$$

khi đó, ta nói " *đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H* ".

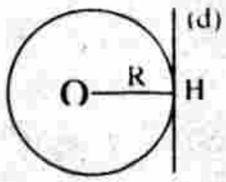
2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TIẾP TUYẾN

Ta có các kết quả sau:

> 1. *Nếu một đường thẳng là một tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.*
> 2. *Nếu một đường thẳng vuông góc với bán kính tại mút nằm trên đường tròn thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn.*

Ta có minh hoạ:

(d) là tiếp tuyến của (O) tại H $\Leftrightarrow$ (d) $\perp$ OH



hoặc viết:

$$\begin{cases} \text{Nếu } H \in (O) \text{ và } H \in (d) \\ (d) \perp OH \end{cases} \Leftrightarrow (d) \text{ là tiếp tuyến của } (O) \text{ tại } H.$$

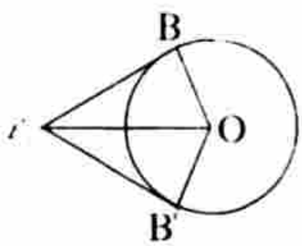
Với hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm, ta có kết quả

> *Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì giao điểm này cách đều hai tiếp điểm và tia kẻ từ giao điểm đó qua tâm của đường tròn là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.*

Như vậy:

AB và AB' là hai tiếp tuyến của (O)

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = AB' \\ O\hat{A}B = O\hat{A}B' \end{cases}$$

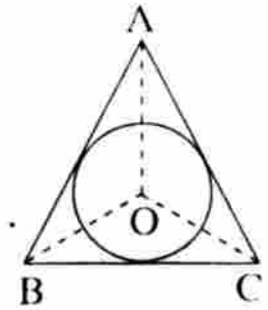


3. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

> ***Định nghĩa**: Đường tròn nội tiếp tam giác là đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác.*

Khi đó:

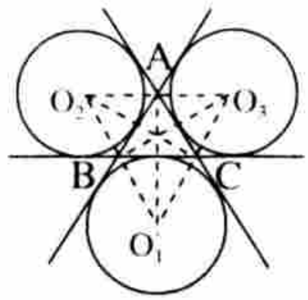
1. Tam giác đó gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn.
2. Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác (trong thực tế ta chỉ cần lấy giao điểm của hai đường phân giác bởi trong một tam giác ba đường phân giác đồng qui).



4. ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP TAM GIÁC

> ***Định nghĩa**: Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và các phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp của tam giác.*

Như vậy, với ΔABC tồn tại ba đường tròn bàng tiếp và tâm của một đường tròn bàng tiếp là giao điểm của một đường phân giác trong với hai phân giác ngoài.



II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Các dạng toán liên quan tới kiến thức của chủ đề này, bao gồm:

Dạng 1: Chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn.

Dạng 2: Quỹ tích điểm là một đường tròn.

Dạng 3: Dựng tiếp tuyến thoả mãn điều kiện cho trước.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa tiếp tuyến của đường tròn. Vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 2: Nêu các tính chất của tiếp tuyến. Hãy minh hoạ mỗi tính chất bằng hình vẽ.

Câu hỏi 3: Phát biểu định nghĩa đường tròn nội tiếp tam giác. Nêu cách xác định tâm đường tròn nội tiếp một tam giác. Vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 4: Phát biểu định nghĩa đường tròn bàng tiếp tiếp tam giác. Nêu cách xác định tâm đường tròn nội tiếp một tam giác. Vẽ hình minh hoạ.

Bài toán 1	DỰNG TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Bài toán 1 — DỰNG TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP

Các yêu cầu dựng tiếp tuyến của đường tròn (O) cho trước thường gặp phải một trong ba dạng sau:

Dạng 1: Dựng tiếp tuyến đi qua điểm A cho trước.

Dạng 2: Dựng tiếp tuyến song song với đường thẳng a cho trước.

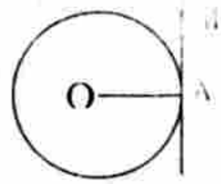
Dạng 3: Dựng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng a cho trước.

Phương pháp thực hiện các dạng toán trên được trình bày trong ba bài toán sau:

> ***Dạng 1***: Từ một điểm A cho trước, hãy dựng tiếp tuyến với đường tròn (O) cho trước, biết:
>
> a. Điểm A nằm trên đường tròn.
>
> b. Điểm A nằm ngoài đường tròn.

Phương pháp dựng

a. Vì A nằm trên đường tròn nên tiếp tuyến là đường thẳng qua A và vuông góc với OA.

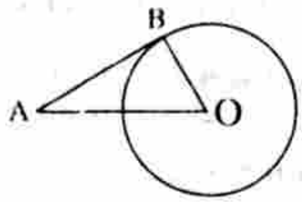


b. Ta thực hiện theo bốn phần:

Phân tích: Giả sử đã dựng được tiếp tuyến qua A tới đường tròn (O) và có tiếp điểm là B, ta có:

$$\widehat{ABO} = 90^0$$

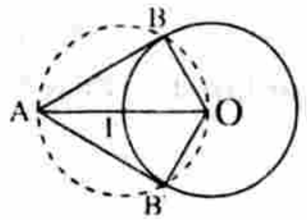
$\Rightarrow$ B thuộc đường tròn đường kính AO.



Vậy, B là giao điểm của (O) và đường tròn đường kính AO.

Cách dựng: Ta thực hiện:

- Dựng đường tròn đường kính AO, kí hiệu (AO), đường tròn này cắt (O) tại B và B'.
- Dựng đường thẳng AB và AB', đó chính là các tiếp tuyến cần dựng.



Chứng minh: Trong đường tròn (AO) ta có ngay:

$$A\hat{B}O = 90^0 \Rightarrow AB \text{ là tiếp tuyến của đường tròn (O).}$$

$$A\hat{B}'O = 90^0 \Rightarrow AB' \text{ là tiếp tuyến của đường tròn (O).}$$

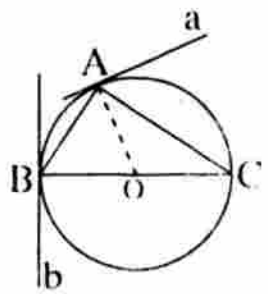
Biện luận: Bài toán có hai nghiệm hình (tức là, qua A luôn kẻ được hai tiếp tuyến tới (O)).

<u>Chú ý</u>: Nếu điểm A nằm trong đường tròn (O) thì qua A không thể kẻ được tiếp tuyến tới đường tròn (O).

<u>Thí dụ 1:</u> Cho ΔABC vuông tại A. Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết tiếp tuyến đi qua điểm:

a. A.
b. B.

Giải



Vì ΔABC vuông tại A nên đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm O là trung điểm của BC.

a. Tiếp tuyến qua A là đường thẳng a qua A và vuông góc với OA.

b. Tiếp tuyến qua B là đường thẳng b qua B và vuông góc với OB.

> ***Dạng 2***: Cho đường tròn (O) và một đường tròn (d). Dựng tiếp tuyến của đường tròn sao cho tiếp tuyến này song song với (d).

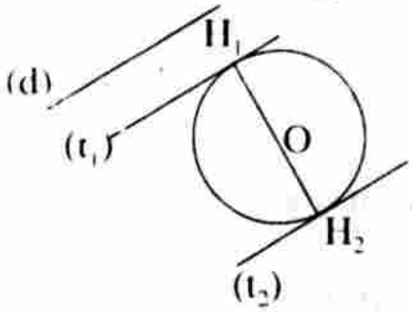
Phương pháp dựng

Phân tích: Giả sử đã dựng được tiếp tuyến (t) của đường tròn (O) và tiếp tuyến song song với (d), gọi H là tiếp điểm, ta có:

$$OH \perp (t) \overset{(t)//(d)}{\Leftrightarrow} OH \perp (d).$$

Vậy, tiếp điểm H là giao điểm của đường tròn (O) với đường thẳng qua O vuông góc với (d).

Cách dựng: Ta thực hiện:



- Dựng đường thẳng xOy ⊥ (d) và cắt (O) tại H.
- Dựng đường thẳng (t) qua H và vuông góc với OH, đó chính là tiếp tuyến cần dựng.

Chứng minh: Ta có ngay:

$$(t) \perp OH \text{ và } (d) \perp OH \Rightarrow (t) // (d) \Rightarrow (t) \text{ là tiếp tuyến cần dựng.}$$

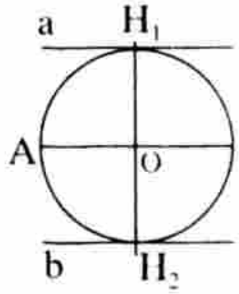
Biện luận: Bài toán có hai nghiệm hình.

Thí dụ 2: Cho đường tròn đường kính AB. Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến với đường tròn, biết tiếp tuyến song song với AB.

Giải

Gọi O là trung điểm của AB, ta thực hiện:

- Dựng đường thẳng d qua O và vuông góc với AB. Đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm H_1 và H_2.
- Dựng hai đường thẳng a, b theo thứ tự đi qua hai điểm H_1, H_2 và song song với AB.



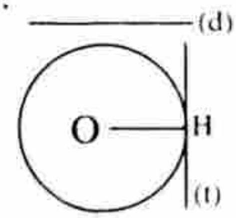
Khi đó, a, b là hai tiếp tuyến cần dựng.

> ***Dạng 3***: Cho đường tròn (O) và một đường thẳng (d). Dựng tiếp tuyến của đường tròn sao cho tiếp tuyến này vuông góc với (d).

Phương pháp dựng

Phân tích: Giả sử đã dựng được tiếp tuyến (t) của đường tròn (O) và tiếp tuyến vuông góc với (d), gọi H là tiếp điểm, ta có:

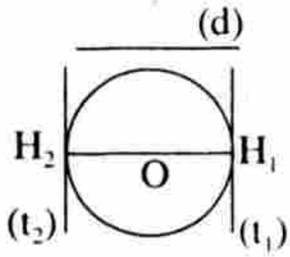
$$OH \perp (t) \overset{(t)\perp(d)}{\Leftrightarrow} OH \,//\, (d).$$



Vậy, tiếp điểm H là giao điểm của đường tròn (O) với đường thẳng qua O song song với (d).

Cách dựng: Ta thực hiện:

- Dựng đường thẳng xOy // (d) và cắt (O) tại H.
- Dựng đường thẳng (t) qua H và vuông góc với OH, đó chính là tiếp tuyến cần dựng.



Chứng minh: Ta có ngay:

$$(t) \perp OH \text{ và } (d) \,//\, OH \Rightarrow (t) \perp (d) \Rightarrow (t) \text{ là tiếp tuyến cần dựng.}$$

Biện luận: Bài toán có hai nghiệm hình.

II. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Hãy dựng tiếp tuyến của đường tròn (O) biết tiếp tuyến đi qua điểm A thuộc (O).

Câu hỏi 2: Hãy dựng tiếp tuyến của đường tròn (O) biết tiếp tuyến đi qua điểm A nằm ngoài (O).

Câu hỏi 3: Hãy dựng tiếp tuyến của đường tròn (O) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d cho trước.

Câu hỏi 4: Hãy dựng tiếp tuyến của đường tròn (O) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d cho trước.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ΔABC cân A. Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến a của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết tiếp tuyến đi qua điểm A. Chứng minh rằng d // BC.

Bài tập 2. Cho ΔABC vuông cân tại A.

a. Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến a của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết tiếp tuyến đi qua điểm A. Chứng minh rằng a // BC.

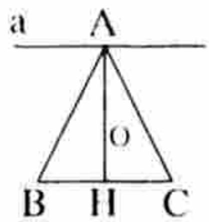
b. Hãy nêu cách dựng các tiếp tuyến b, c của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết rằng các tiếp tuyến này theo thứ tự đi qua điểm B, C. Chứng minh rằng b // c.

Bài tập 3. Cho ΔABC đều.

a. Hãy nêu cách dựng tiếp tuyến a của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết tiếp tuyến đi qua điểm A. Chứng minh rằng d // BC.

b. Hãy nêu cách dựng các tiếp tuyến b, c của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết rằng các tiếp tuyến này theo thứ tự đi qua điểm B, C. Giả sử b cắt c tại D. Chứng minh rằng ΔBCD đều.

IV. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

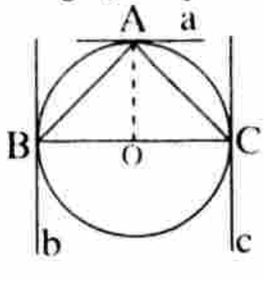


Bài tập 1. Vì ΔABC cân tại A nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC thuộc đường cao AH, do đó:

$$AO \perp BC.$$

Vậy, tiếp tuyến qua A là đường thẳng a qua A và song song với BC.

Bài tập 2. Vì ΔABC vuông cân tại A nên đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm O là trung điểm của BC.



a. Tiếp tuyến qua A là đường thẳng a qua A và vuông góc với OA.

Vì $AO \perp BC$ nên a // BC, đpcm.

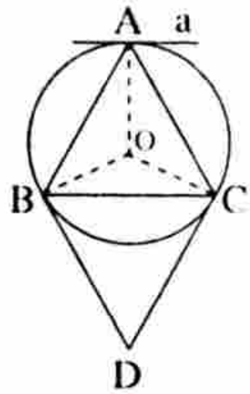
b. Ta có ngay:

- Tiếp tuyến qua B là đường thẳng b qua B và vuông góc với BC.
- Tiếp tuyến qua C là đường thẳng c qua C và vuông góc với BC.

Từ đó, thấy ngay b // c, đpcm.

Bài tập 3. *Hướng dẫn:*

a. Tham khảo bài tập 1.



b. Ta có ngay:

- Tiếp tuyến qua B là đường thẳng b qua B và vuông góc với OB.
- Tiếp tuyến qua C là đường thẳng c qua C và vuông góc với OC.

Xét ΔBCD, ta có:

DB = DC, tính chất hai tiếp tuyến với đường tròn cùng đi qua D

$\widehat{CBD} = \widehat{OBD} - \widehat{OBC} = 90^0 - 30^0 = 60^0$

do đó ΔBCD đều (tam giác cân có một góc bằng 6$0^0$).

Bài toán 2 SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TIẾP TUYẾN GIẢI CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH VÀ ĐỊNH LƯỢNG

I. PHƯƠNG PHÁP

Ta nhận thấy:

1. Với bài toán cho trước đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H, ta sẽ nhận được ngay các kết quả:

$$(d) \perp OH \text{ và } OH = R.$$

2. Với bài toán cho trước AM và AN là hai tiếp tuyến của đường tròn (O), ta sẽ nhận được ngay các kết quả:

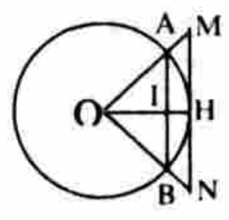
$$AM \perp OM \text{ và } AN \perp ON,$$
$$AM = AN \text{ và } \widehat{MAO} = \widehat{NAO}.$$

Dựa vào các kết quả trên ta thực hiện các yêu cầu của bài toán.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O, R) và dây AB = 2a. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, nó cắt các tia OA và OB theo thứ tự tại M và N. Tính diện tích ΔMON.

Giải



Gọi H là tiếp điểm và OH cắt AB tại I, ta có:

$$OH \perp MN \text{ và } OH \perp AB$$

Trong ΔOAI, ta có:

$$IA = \frac{AB}{2} = a.$$

$$OI^2 = OA^2 - IA^2 = R^2 - a^2 \Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - a^2}.$$

Vì ΔOAI ~ ΔOMH nên:

$$\frac{IA}{HM} = \frac{OI}{OH} \Rightarrow HM = \frac{IA.OH}{OI} = \frac{a.R}{\sqrt{R^2 - a^2}}.$$

Suy ra:

$$MN = 2HM = \frac{2a.R}{\sqrt{R^2 - a^2}}.$$

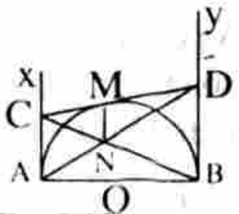
Ta có:

$$S_{\Delta MON} = \frac{1}{2}OH.MN = \frac{1}{2}R.\frac{2a.R}{\sqrt{R^2 - a^2}} = \frac{a.R^2}{\sqrt{R^2 - a^2}}.$$

Nhận xét: Trong lời giải trên chúng ta đã lựa chọn phương pháp trình bày ngược sau suy nghĩ theo kiểu phát sinh yêu cầu, cụ thể ta nghĩ :

- Để tính $S_{\Delta MON} = \frac{1}{2}OH.MN$ cần xác định MN, tức là cần xác định HM (vì MN = 2HM).
- HM được xác định thông qua sự đồng dạng của ΔOAI và ΔOMH, từ đó cần xác định IA và OI .
- $IA = \frac{1}{2}AB$ còn OI được xác định thông qua ΔOIA.

Ví dụ 2: Cho nửa đường tròn (O) với đường kính AB. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax và By. Qua một điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau ở N. Chứng minh rằng:



a. MN // AC.

b. CM.DB = CD.MN.

Giải

a. Theo tính chất của tiếp tuyến ta có ngay DB = DM, AC = MC.

Mặt khác, vì Ax // By nên hai tam giác ΔANC và ΔDNB đồng dạng, suy ra:

$$\frac{ND}{NA} = \frac{DB}{AC} = \frac{DM}{CM} \Rightarrow MN \,//\, AC \text{ (định lí Talet đảo).}$$

b. Từ kết quả câu a) suy ra

$$MN \,//\, BD \Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{MN}{DB} \Leftrightarrow CM.DB = CD.MN, \text{ dpcm.}$$

Nhận xét: Trong lời giải trên:

1. Ở câu a) để chứng minh MN // AC, ta suy nghĩ theo điều kiện tương đương, tức là giả sử có :

$$MN \,//\, AC \Leftrightarrow \frac{ND}{NA} = \frac{MD}{MC} \overset{MD=DB}{\underset{MC=AC}{=}} \frac{DB}{AC},$$

luôn đúng vì Ax // By.

Do vậy, khi trình bày lời giải chúng ta đã xuất phát từ kết quả DB = DM, AC = MC cùng với giả thiết Ax//By.

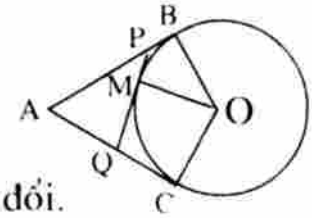
2. Ở câu b) vẫn với suy nghĩ như trong a) ta giả sử có:

$$CM.DB = CD.MN \Leftrightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{MN}{DB} \Leftrightarrow MN // BD // AC.$$

Do vậy, khi trình bày lời giải chúng ta đã xuất phát từ giả thiết Ax // By cùng kết quả thu được trong a) để có nhận xét MN // BD.

Ví dụ 3: Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn. Từ một điểm M trên cung nhỏ BC kẻ một tiếp tuyến thứ ba, cắt hai tiếp tuyến kia tại P và Q. Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên cung BC thì chu vi ΔAPQ có giá trị không đổi.

Giải



Chu vi ΔAPQ được cho bởi:

$$P = AP + PQ + QA = AP + PM + MQ + QA$$
$$= AP + PB + QC + QA = AB + AC, \text{ không đổi.}$$

Vậy chu vi ΔAPQ không đổi.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Hãy nêu các kết quả được sử dụng khi biết đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O) để giải các bài toán định tính và định lượng.

Câu hỏi 2: Hãy nêu các kết quả được sử dụng khi biết AM, AN là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) để giải các bài toán định tính và định lượng.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O, R) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm D. Tiếp tuyến tại D của đường tròn cắt AB tại M, cắt AC tại N. Cho biết dạng của ΔABC và tính chu vi của ΔAMN trong các trường hợp sau

a. OA = 2R.

b. $OA = R\sqrt{2}$.

Bài tập 2. Cho ΔABC vuông tại A, AB = 6cm, AC = 8cm. Đường tròn (I) nội tiếp ΔABC tiếp xúc với AB, AC theo thứ tự ở D, F

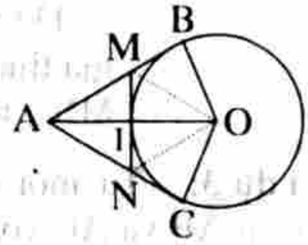
a. Tính $\widehat{BIC}$.

b. Tính diện tích tứ giác ADIE.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Ta đã biết kết quả trong ví dụ 6, như sau:

$S_{\Delta AMN} = AB + AC = 2AB.$



Để xác định dạng của ΔABC (cân tại A), ta xét:

$$\sin O\hat{A}B = \frac{OB}{OA}.$$

a. Với $OA = 2R$, ta được:

$$\sin O\hat{A}B = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow O\hat{A}B = 30^0 \Leftrightarrow C\hat{A}B = 60^0 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Khi đó:

$$S_{\Delta AMN} = 2AB = 2\sqrt{OA^2 - OB^2} = 2\sqrt{4R^2 - R^2} = 2R\sqrt{3}.$$

b. Với $OA = R\sqrt{2}$, ta được:

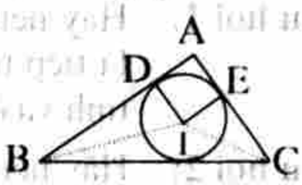
$$\sin O\hat{A}B = \frac{R}{\sqrt{2}R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow O\hat{A}B = 45^0 \Leftrightarrow C\hat{A}B = 90^0$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

Khi đó:

$$S_{\Delta AMN} = 2AB = 2\sqrt{OA^2 - OB^2} = 2\sqrt{2R^2 - R^2} = 2R.$$

Bài tập 2.



a. Trong ΔIBC, ta có:

$$B\hat{I}C = 180^0 - (I\hat{B}C + I\hat{C}B)$$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - \frac{1}{2}.90^0 = 135^0.$$

b. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

Xét tứ giác ADIE, ta có:

$\hat{A} = \hat{D} = \hat{E} = 90^0$ và $ID = IE = r \Rightarrow$ ADIE là hình vuông

do đó:

$S_{ADIE} = ID^2 = r^2.$

Trong ΔABC, ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}p.r = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).r$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{AB.AC}{AB + AC + \sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{6.8}{6 + 8 + \sqrt{6^2 + 8^2}} = 2cm.$$

Vậy ta được:

$S_{ADIE} = 2^2 = 4cm^2.$

Bài toán 3 — CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP

Để chứng minh đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O, R), ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Nếu biết một giao điểm A của d và (O) thì ta đi chứng minh:

$$OA \perp d.$$

Cách 2: Hạ OA vuông góc với d, ta đi chứng minh:

$$OA = R.$$

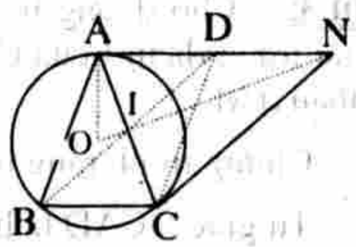
II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

<u>Ví dụ 1:</u> Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ hình bình hành ABCD. Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng AD tại N. Chứng minh rằng:

a. Đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b. Ba đường thẳng AC, BD và ON cùng đi qua một điểm.

Giải



a. Vì ΔABC cân tại A nên:

$OA \perp BC$.

Vì ABCD là hình bình hành nên:

$AD // BC \Rightarrow AD \perp OA$

$\Leftrightarrow$ AD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b. Gọi I là giao điểm của AC và BD, suy ra:

I là trung điểm AC

$\Rightarrow I \in ON$ (vì NA, NC đều là tiếp tuyến của (O))

Vậy, ba đường thẳng AC, BD và ON cùng đi qua điểm I.

<u>Nhận xét</u>:

1. Như vậy, trong ví dụ trên để chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn (O), ta chỉ phải đi chứng minh $AD \perp OA$ bởi A thuộc (O).
2. Với yêu cầu ngược lại "*Tìm điều kiện để đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O, R)*", ta cần có:

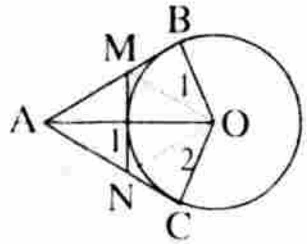
$$d(O, d) = R.$$

Ví dụ 2: Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O, R), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M.

a. Chứng minh tứ giác AMON là hình thoi.

b. Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) ?

Giải



a. Xét tứ giác AMON, ta có:

AM // ON, vì cùng vuông góc với OB.

AN // OM, vì cùng vuông góc với OC.

do đó AMON là hình bình hành.

Mặt khác, xét hai tam giác vuông ΔOBM và ΔOCN, ta có:

$OB = OC = R$

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, vì cùng phụ với góc $\widehat{MON}$

do đó:

$\Delta OBM = \Delta OCN$ (cạnh huyền và góc nhọn) $\Rightarrow OM = ON$.

Vậy, AMON là hình thoi (vì nó là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau).

b. Để MN tiếp xúc với (O, R) điều kiện là:

$d(O, MN) = R \Leftrightarrow OI = R \Leftrightarrow AO = 2R$.

Vậy, với $OA = 2R$ thì MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

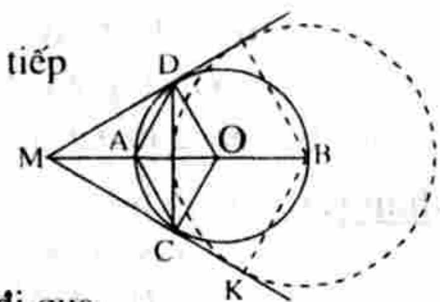
Ví dụ 3: Cho đường tròn (O), đường kính AB. Vẽ CD vuông góc với OA tại trung điểm I của OA. Các tiếp tuyến với đường tròn tại C và tại D cắt nhau ở M.

a. Chứng minh rằng ba điểm M, A, B thẳng hàng.

b. Tứ giác OCAD là hình gì ?

c. Tính $\widehat{CMD}$.

d. Chứng minh rằng đường thẳng MC là tiếp tuyến của đường tròn (B, BI).



Giải

a. Ta có nhận xét:

- AB là đường trung trực của CD (vì nó đi qua trung điểm I của CD và vuông góc với CD).
- MC = MD (tính chất giao điểm của hai tiếp tuyến) $\Rightarrow$ M thuộc đường trung trực của CD $\Rightarrow$ M thuộc AB.

Vậy, ba điểm M, A, B thẳng hàng.

b. Tứ giác OCAD có hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên nó là hình thoi.

c. Trong ΔAOC ta có:

$OA = OC = CA \Leftrightarrow \Delta AOC$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{CMO} = 90^0 - 60^0 = 30^0 \Rightarrow \widehat{CMD} = 60^0$.

d. Hạ BK vuông góc với MC, ta có nhận xét:

$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = 30^0 \Rightarrow$ CA là tia phân giác của góc $\widehat{MCD}$.

$AC \perp BC \Rightarrow$ CB là tia phân giác của góc $\widehat{KCD} \Rightarrow BI = BK$.

Khoảng cách BK bằng bán kính đường kính đường tròn (B, BI) nên MC là tiếp tuyến của đường tròn (B, BI).

Nhận xét: Trong lời giải trên:

1. Ở câu a) để chứng minh M, A, B thẳng hàng chúng ta xác định vị trí của chúng đối với CD và cụ thể chúng nằm trên đường trung trực của CD do đó xuất phát từ nhận xét AB là trung trực của CD chúng ta cần chứng minh M cũng thuộc trung trực của CD, điều này chỉ xảy ra khi MC = MD.

2. Ở câu b) chúng ta sử dụng kết quả " *Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường* ".

3. Ở câu c) chúng ta sử dụng kết quả câu b) và tính chất thứ 3 của tiếp tuyến đường tròn.

4. Ở câu c) chúng ta sử dụng kết quả về vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn để đưa ra kết luận cho tiếp tuyến MC, và dễ thấy MD cũng là tiếp tuyến của (B, BI).

5. Các kết quả ở câu a) và câu d) vẫn đúng nếu thay điều kiện "*trung điểm I của OA*" bởi "*I nằm giữa O và A*". Trong trường hợp này ta chứng minh $\widehat{MCA} = \widehat{ACD}$ bằng nhận xét $\widehat{MCA}$ phụ $\widehat{ACO}$, $\widehat{ACD}$ phụ $\widehat{CAO}$, mà $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$ nên $\widehat{MCA} = \widehat{ACD}$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Hãy nêu các cách để chứng minh đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O, R).

Câu hỏi 2: Để đường thẳng d là tiếp tuyến của đường tròn (O, R) điều kiện là gì ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy. Vẽ AD và BC vuông góc với xy.

a. Chứng minh rằng MC = MD.

b. Chứng minh rằng AD + BC có giá trị không đổi khi điểm M chuyển động trên nửa đường tròn.

c. Chứng minh rằng đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB.

d. Xác định vị của điểm M trên nửa đường tròn (O) để cho diện tích tứ giác ABCD lớn nhất.

Bài tập 2. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, d là tiếp tuyến của đường tròn tại A. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và tại C cắt d theo thứ tự ở D và E.

a. Tính $\widehat{DOE}$.

b. Chứng minh rằng DE = BD + CE.

c. Chứng minh rằng $BD \cdot CE = R^2$ (R là bán kính đường tròn (O).

d. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính DE.

Bài tập 3. Cho ΔABC cân tại A, các đường cao AD và BE cắt nhau ở H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

a. Chứng minh rằng BC = 2ED.

b. Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c. Tính độ dài DE biết DH = 2cm, HA = 6cm.

Bài tập 4. Cho ΔABC cân tại A, I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A, O là trung điểm của IK.

a. Chứng minh rằng bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn tâm O.

b. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c. Tính bán kính đường tròn (O) biết AB = AC = 20cm, BC = 24cm.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Xét tứ giác ABCD, ta có:

AD // BC, vì cùng vuông góc với xy

$\Rightarrow$ ABCD là hình thang vuông.

Mặt khác, ta lại có:

$$\begin{cases} OA = OB \\ OM \,//\, AD \end{cases} \Leftrightarrow \text{OM là đường trung bình} \Rightarrow MC = MD.$$

b. Dựa theo kết quả câu a), ta được:

$AD + BC = 2OM = 2R$ — không đổi.

c. Hạ MH vuông góc với AB, ta có ngay $MH = MC$.

Vậy, đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB.

d. Ta có:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC).CD = \frac{1}{2}.2R.CD = R.CD.$$

Do đó, S_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi CD lớn nhất.

Trong hình thang vuông ABCD, ta có nhận xét:

$CD \le AB = 2R \Rightarrow CD_{Max} = 2R$

đạt được khi:

ABCD là hình chữ nhật $\Leftrightarrow OM \perp AB$

$\Leftrightarrow$ M là điểm giữa của cung tròn đường kính AB.

Bài tập 2. *Học sinh tự vẽ hình.*

Vì ΔABC vuông tại A nên O là trung điểm BC.

a. Nhận xét rằng:

DA, DB là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow DA = DB$ và $D\hat{O}A = D\hat{O}B$.

EA, EC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow EA = EC$ và $E\hat{O}A = E\hat{O}C$.

Suy ra:

$$D\hat{O}E = D\hat{O}A + E\hat{O}A = \frac{1}{2}(A\hat{O}B + A\hat{O}C) = \frac{1}{2}.180^0 = 90^0.$$

b. Dựa trên kết quả câu a), ta có ngay:

$DE = DA + EA = DB + EC$, dpcm.

c. Xét hai tam giác vuông ΔOBD và ΔECO, ta có:

$B\hat{O}D = C\hat{E}O$, góc có cạnh tương ứng vuông góc

do đó:

$\Delta OBD \backsim \Delta ECO$

$$\Rightarrow \frac{OB}{EC} = \frac{BD}{CO} \Leftrightarrow BD\ .\ CE = OB.OC = R.R = R^2$$

d. Gọi I là trung điểm DE, suy ra I là tâm đường tròn (DE).

Trong hình thang vuông BCED, ta có:

OI là đường trung bình $\Rightarrow$ OI // BD

$\Rightarrow$ OI $\perp$ BC, vì BC vuông góc với BD

$\Rightarrow$ BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.

Bài tập 3. *(Học sinh tự vẽ hình) Hướng dẫn:*

Vì $\triangle$ABC cân tại A, đường cao AD do đó D là trung điểm BC.

a. Trong $\triangle$BCE, vuông tại E, ta có:

ED là trung tuến thuộc cạnh huyền $\Rightarrow$ BC = 2ED.

b. Chứng minh DE vuông góc với OE.

Bài toán 4 SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TIẾP TUYẾN TÌM QUỸ TÍCH ĐIỂM

I. PHƯƠNG PHÁP

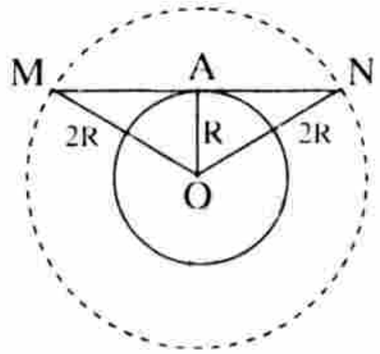
Việc sử dụng tính chất của tiếp tuyến để tìm quỹ tích điểm M, được hiểu là việc khai thác các tính chất đó để chỉ ra tính chất của điểm M trong phần thuận của bài toán quỹ tích.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho đường tròn (O; 2cm) và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy. Trên tia Ax lấy điểm M, trên tia Ay lấy điểm N sao cho $AM = AN = 2\sqrt{3}$ cm. Tìm quỹ tích các điểm M và N.

Giải

Phần thuận: Với hai điểm M, N điểm A thoả mãn điều kiện đầu bài.



Trong ΔOMN, ta có:

OA là đường cao và trung tuyến

$\Leftrightarrow \Delta OMN$ cân tại O $\Leftrightarrow OM = ON$.

Trong ΔOAM vuông tại A, ta có:

$$OM = \sqrt{OA^2 + MA^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + 3R^2} = 2R.$$

$\Leftrightarrow$ M, N thuộc đường tròn (O, 2R).

Phần đảo: Lấy điểm A bất kì trên đường tròn (O, R). Từ A vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn (O, R), tiếp tuyến này cắt (O, 2R) tại M và N. Ta phải chứng minh $AM = AN = R\sqrt{3}$.

Ta có ngay AM = AN.

Trong ΔOAM vuông tại A, ta có:

$$AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}.$$

Kết luận: Quỹ tích của các điểm M, N là đường tròn (O, 2R).

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải trên chúng ta đã khai thác hai tính chất của tiếp tuyến MN, bao gồm:

1. OA ⊥ MN từ đó áp dụng vào ΔOMN cân tại O.
2. OA = R từ đó áp dụng vào ΔOAM vuông tại A.

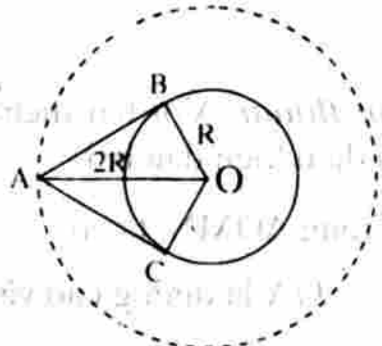
Trong ví dụ tiếp theo, chúng ta đi thực hiện một ví dụ cơ bản về bài toán quỹ tích điểm thoả mãn tính chất tiếp tuyến, hãy nhớ rằng dạng toán này sẽ được gặp lại trong chương trình toán THPT.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O, R). Tìm quỹ tích của điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới (O, R) sao cho $\widehat{BAC} = 60^0$.

Giải

Phần thuận: Giả sử tồn tại điểm A thoả mãn điều kiện đầu bài.

Trong ΔOAB, ta có:



$$\widehat{BAO} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 30^0$$

$$\Rightarrow OB = \frac{1}{2}OA$$

$$\Leftrightarrow OA = 2OB = 2R$$

⇒ A thuộc đường tròn (O, 2R).

Phần đảo: Lấy điểm A bất kì trên đường tròn (O, 2R). Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O, R). Ta phải chứng minh $\widehat{BAC} = 60^0$.

Trong ΔOAB, ta có:

$$OB = \frac{1}{2}OA \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{BAO} = 60^0.$$

Kết luận: Quỹ tích của điểm A là đường tròn (O, 2R).

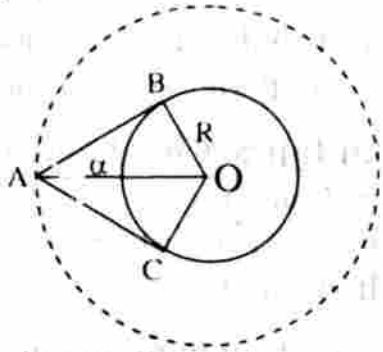
Nhận xét:

1. Trong lời giải trên, dựa vào dạng đặc biệt của ΔOAB vuông tại B, chúng ta tính được độ dài đoạn OA. Tuy nhiên, trong mọi trường hợp ta đều có thể tính được độ dài đoạn OA bằng cách sử dụng hệ thức lượng giác của hàm số sin$\widehat{BAO}$.
2. Chúng ta sẽ đi giải bài toán tổng quát là:

   " *Cho đường tròn (O, R). Tìm quỹ tích của điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới (O, R) sao cho $\widehat{BAC} = 2\alpha$* ".

Ta sẽ lần lượt thực hiện:

Phần thuận: Giả sử tồn tại điểm A thoả mãn điều kiện đầu bài.



Trong ΔOAB, ta có:

$$\widehat{BAO} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \alpha$$

$$OA = \frac{OB}{\sin\widehat{BAO}} = \frac{R}{\sin\alpha}$$

$\Rightarrow$ A thuộc đường tròn $(O, \frac{R}{\sin\alpha})$.

Phần đảo: Lấy điểm A bất kì trên đường tròn $(O, \frac{R}{\sin\alpha})$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O, R). Ta phải chứng minh $\widehat{BAC} = 2\alpha$.

Trong ΔOAB, ta có:

$$\sin\widehat{BAO} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{\frac{R}{\sin\alpha}} = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \widehat{BAO} = \alpha \Rightarrow \widehat{BAC} = 2\widehat{BAO} = \alpha.$$

Kết luận: Quỹ tích của điểm A là đường tròn $(O, \frac{R}{\sin\alpha})$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Việc sử dụng tính chất của tiếp tuyến để tìm quỹ tích điểm được thực hiện như thế nào ?

Câu hỏi 2: Hãy trình bày lời giải của bài toám " *Cho đường tròn (O, R). Tìm quỹ tích của điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới (O, R) sao cho $\widehat{BAC} = 2\alpha$* ".

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho đường tròn (O, R). Tìm quỹ tích của điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới (O, R).

Bài tập 2. Cho đường thẳng (d) và một điểm A ở trên đường thẳng đó. Tìm tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm A.

Bài tập 3. Cho đường thẳng (d). Tìm tập hợp tâm các đường tròn có bán kính bằng R và tiếp xúc với đường thẳng (d).

Bài tập 4. Cho hai đường thẳng cắt nhau. Tìm tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng đó.

Bài tập 5. Cho đường tròn (O, R) và điểm A cố định trên đường tròn đó. Qua A vẽ tiếp tuyến xy. Từ điểm M trên xy vẽ tiếp tuyến MB với đường tròn (O). Hai đường cao AD và BE của tam giác MAB cắt nhau tại H.

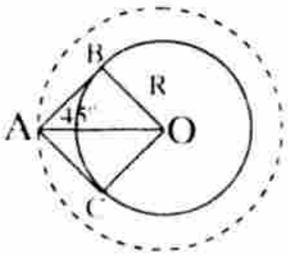
a. Chứng minh rằng ba điểm M, H, O thẳng hàng.

b. Chứng minh rằng tứ giác AOBH là hình thoi.

c. Tìm quỹ tích của điểm H khi M chạy trên xy.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1.



Phần thuận: Giả sử tồn tại điểm A thoả mãn điều kiện đầu bài.

Trong ΔOAB, ta có:

$$B\hat{A}O = \frac{1}{2}B\hat{A}C = 45^0 \Rightarrow BA = OB = R$$

$OA = \sqrt{OB^2 + BA^2} = R\sqrt{2} \Rightarrow$ A thuộc đường tròn (O, $R\sqrt{2}$).

Phần đảo: Lấy điểm A bất kì trên đường tròn (O, 2R). Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O, R). Ta phải chứng minh $B\hat{A}C = 60^0$.

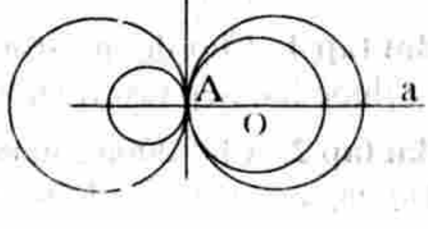
Trong ΔOAB, ta có:

$$\sin B\hat{A}O = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^0$$

$$\Rightarrow B\hat{A}O = 45^0 \Rightarrow B\hat{A}C = 2B\hat{A}O = 90^0.$$

Kết luận: Quỹ tích của điểm A là đường tròn (O, $\sqrt{2}$).

Bài tập 2. *Hướng dẫn*



Đường tròn (O) tiếp xúc với d tại A

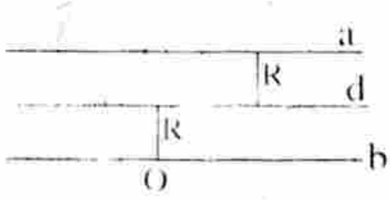
$\Rightarrow OA \perp d$

Vậy, quỹ tích tâm các đường tròn tiếp xúc với d tại A là đường thẳng a qua A và vuông góc với d.

Bài tập 3. *Hướng dẫn*

Đường tròn (O, R) tiếp xúc với d nếu:

d(O, d) = R.

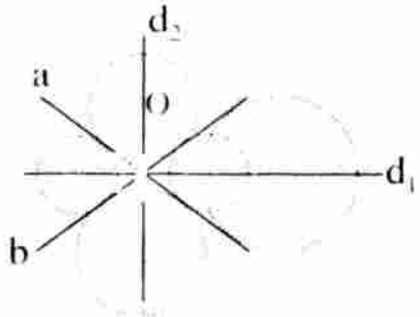


Vậy, quỹ tích tâm các đường tròn có bán kính R tiếp xúc với d là hai đường thẳng a, b song song và khoảng cách từ chúng đến d bằng R.

Bài tập 4. *Hướng dẫn*

Đường tròn (O) tiếp xúc với a và b:

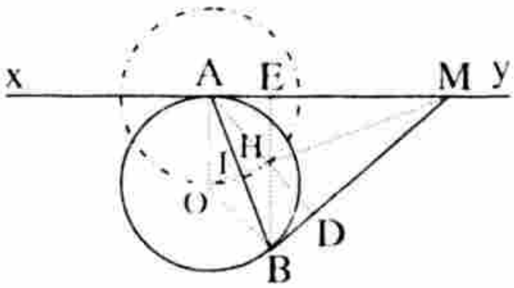
d(O, a) = d(O, b).



Vậy, quỹ tích tâm các đường tròn tiếp xúc với a và b là hai đường phân giác d_1 và d_2 của góc tạo bởi a và b.

Bài tập 5.

a. Gọi I là trung điểm AB.



- Vì MA, MB là tiếp tuyến nên M, O, I thẳng hàng.
- Vì ΔMAB cân tại M nên MI là đường cao do đó M, H, I thẳng hàng.

Vậy, ba điểm M, H, O thẳng hàng.

b. Xét tứ giác AOBH, ta có:

AO // BH, vì cùng vuông góc với MA.

AH // OB, vì cùng vuông góc với MB.

do đó AOBH là hình bình hành.

Mặt khác, ta có ngay OA = OB = R.

Vậy, AOBH là hình thoi (vì nó là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau).

c. Theo kết quả câu a), ta có:

$$AH = OA = R \Rightarrow H \in (A, R).$$

Hạn chế quĩ tích: *Học sinh tự làm.*

Nhóm Cự Môn chúng tôi đã và đang theo đuổi mục tiêu viết ra được một bộ giáo trình Toán phổ thông (PTCS và PTTH) với nội dung bao gồm:

1. *Đầy đủ các kiến thức theo quy chuẩn của BGD và ĐT.*
2. *Kiến thức được trình bày theo kiểu đặt vấn đề và các yêu cầu hành động để thay đổi kiểu dạy học theo lối thụ động.*
3. *Sau mỗi chủ đề kiến thức đều có phần hướng dẫn sử dụng máy tính Casio Fx570 Ms hoặc các phần mềm máy vi tính để trợ giúp cho việc giải toán (giảm thiểu các bài toán tính toán phức tạp).*
4. *Những chủ đề kiến thức cần thiết sẽ được chi i nhỏ thành phần lý thuyết và các dạng toán để giúp cho việc dạy và học nâng cao.*
5. *Có đĩa CD kèm theo để:*
   - *Giáo viên có thể thực hiện bài giảng bằng máy chiếu.*
   - *Học sinh có thể học ngay trên máy tính.*

Do vậy, chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp có tính xây dựng của tất cả các Thày giáo, Cô giáo, Nhà nghiên cứu, Phụ huynh và Học sinh trên toàn quốc.

CHỦ ĐỀ 5 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khi xét vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn ta căn cứ vào số điểm chung của hai đường đó. Tương tự như vậy, ta xét được vị trí tương đối của hai đường tròn.

> *Hai đường tròn phân biệt không thể có quá hai điểm chung, bởi vì qua ba điểm thẳng hàng không thể có một đường tròn, còn qua ba điểm không thẳng hàng chỉ có một đường tròn duy nhất.*

Như vậy, hai đường tròn phân biệt chỉ có thể:

- Có hai điểm chung.
- Có một điểm chung duy nhất.
- Không có điểm chung.

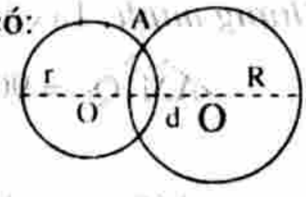
Chú ý: Hai đường tròn nếu có nhiều hơn hai điểm chung thì chúng trùng nhau.

Cho hai đường tròn (O, R) và (O', r) với R > r và d = OO', ta xét:

1. HAI ĐƯỜNG TRÒN CÓ HAI ĐIỂM CHUNG

Trường hợp này gọi là *hai đường tròn cắt nhau*, mỗi điểm chung gọi là một *giao điểm*.

Sử dụng bất đẳng thức tam giác trong $\Delta AOO'$ ta có:



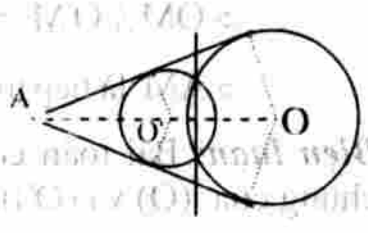
$$OA - O'A < OO' < OA + O'A,$$

từ đó suy ra điều kiện:

$$\boxed{R - r < d < R + r}$$

Nhận xét: Hai đường tròn cắt nhau:

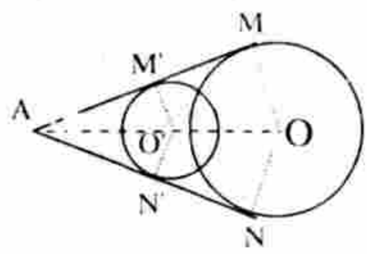
1. Có hai tiếp tuyến chung và chúng đồng quy với đường thẳng OO'.
2. Nếu bài toán cần vẽ đường phụ, ta thường vẽ thêm dây chung của chúng.



Bài toán: Cho hai đường tròn (O, R) và (O', r) với $r < R$ cắt nhau tại A và B. Hãy dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó, biết $OO' = d$.

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được tiếp tuyến chung của hai đường tròn và M, M' theo thứ tự là tiếp điểm của tiếp tuyến chung với (O, R) và (O', r). Gọi A là điểm đồng quy của hai tiếp tuyến với OO', ta có:



$$\frac{AO'}{AO} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow AO' = (AO' + O'O).\frac{r}{R}$$

$$\Leftrightarrow AO' = \frac{rd}{R - r} \Rightarrow \text{xác định được vị trí của điểm A.}$$

Khi đó:

- Tiếp điểm M' là giao điểm của (O') và đường tròn đường kính AO'.
- Tiếp điểm M là giao điểm của đường thẳng AM' và đường tròn (O).

Cách dựng: Ta thực hiện:

- Xác định điểm A trên tia OO' sao cho $AO' = \dfrac{rd}{R - r}$.
- Dựng đường tròn đường kính AO', đường tròn này cắt (O') tại M'.
- Dựng đường thẳng AM', đó chính là tiếp tuyến chung cần dựng.

Chứng minh: Ta có ngay:

$$A\widehat{M'}O' = 90^0 \Rightarrow AM' \text{ là tiếp tuyến của đường tròn (O).}$$

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{AO'}{AO' + O'O} = \frac{\dfrac{rd}{R - r}}{\dfrac{rd}{R - r} + d} = \frac{r}{R} = \frac{O'M'}{OM}$$

$$\Rightarrow OM \,//\, O'M' \Rightarrow OM \perp AM$$

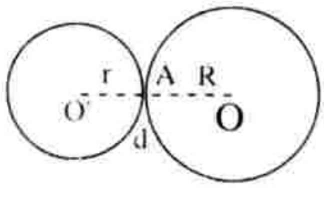
$$\Rightarrow AM' \text{ là tiếp tuyến của đường tròn (O').}$$

Biện luận: Bài toán có hai nghiệm hình (tức là tồn tại hai tiếp tuyến chung của (O) và (O')).

2. HAI ĐƯỜNG TRÒN CHỈ CÓ MỘT ĐIỂM CHUNG

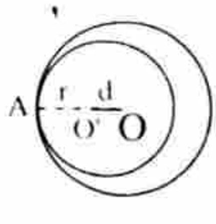
Trường hợp này gọi là *hai đường tròn tiếp xúc nhau*, và điểm chung duy nhất được gọi là *tiếp điểm*. Ta có hai khả năng tiếp xúc:

Tiếp xúc ngoài



$$\boxed{d = R + r}$$

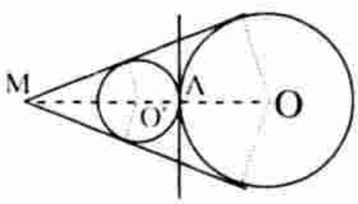
Tiếp xúc trong

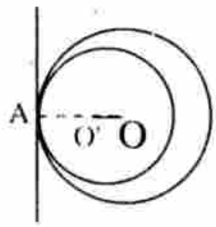


$$\boxed{d = R - r}$$

Nhận xét:

1. Hai đường tiếp xúc ngoài với nhau có ba tiếp tuyến chung.





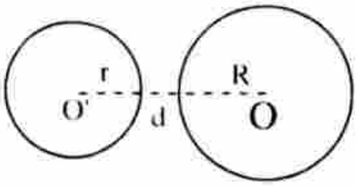
2. Hai đường tiếp xúc trong với nhau có một tiếp tuyến chung.
3. Hai đường tiếp xúc với nhau mà cần vẽ đường phụ, ta thường vẽ thêm tiếp tuyến chung của chúng.

3. HAI ĐƯỜNG TRÒN KHÔNG CÓ ĐIỂM CHUNG

Trường hợp này gọi là *hai đường tròn không giao nhau*.

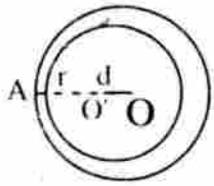
Ta có hai khả năng:

Ngoài nhau



$$\boxed{d > R + r}$$

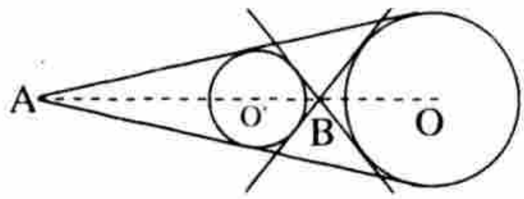
Trong nhau



$$\boxed{d < R - r}$$

Chú ý: 1. Hai đường tròn phân biệt cùng tâm (d = 0) gọi là hai đường tròn *đồng tâm*.

2. Hai đường tròn ngoài nhau có bốn tiếp tuyến chung, trong đó:
   - Có hai tiếp tuyến chung cắt đoạn OO'.
   - Có hai tiếp tuyến chung không đoạn cắt OO'.



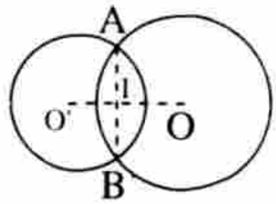
3. Hai đường tròn ở trong nhau không có tiếp tuyến chung

4. MỘT SỐ TÍNH CHẤT

Tính chất 1: Đường nối tâm là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đương tròn.

Tính chất 2: Nếu hai đường tròn cắt nhau thì dây chung vuông góc với đường nối tâm và bị đường này chia làm hai phần bằng nhau.

Cụ thể, theo hình vẽ ta có:

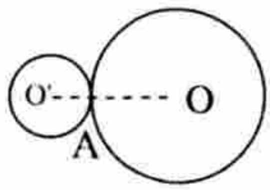


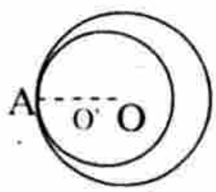
$OO' \perp AB$

và $IA = IB$.

Tính chất 3: Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

Cụ thể, theo hình vẽ sau ta có O, O', A thẳng hàng.



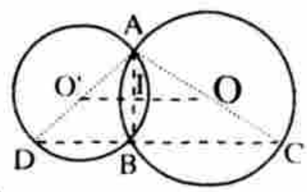


II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tai A và B. Từ A vẽ đường kính AOC và AO'D. Chứng minh rằng ba liểm B, C, D thẳng hàng và AB vuông góc với CD.

Giải

Gọi I là giao điểm của AB và OO', suy ra I là trung điểm của AB.



- Trong ΔABC, ta có OI là đường trung bình, nên:

  $OI // BC$.

- Trong ΔABD, ta có O'I là đường trung bình, nên:

  $O'I // BD$.

Suy ra OO' // BC // BD, nên ba điểm B, C, D thẳng hàng.

Vì:

$$AB \perp OO' \Rightarrow AB \perp CD.$$

Nhận xét:
1. Trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã tận dụng đầy đủ tính chất của hai đường tròn cắt nhau.
2. Thí dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng tính chất của hai đường tròn tiếp xúc với nhau.

Ví dụ 2: Cho hai đường tròn (O, R) và (O', r) tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC (B thuộc đường tròn (O), C thuộc đường tròn (O').

a. Chứng minh rằng Δ ABC là tam giác vuông.

b. Tính số đo góc $O\widehat{M}O'$.

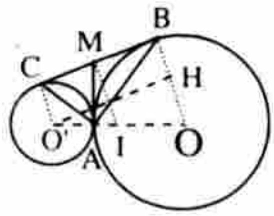
c. Tính diện tích tứ giác BCO'O theo R và r.

d. Gọi I là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường (I, IM).

Giải

a. Qua A vẽ tiếp tuyến chung trong, cắt BC tại M, ta có:

$$\begin{cases} MA = MB & \text{tính chất tiếp tuyến của } (O, R) \\ MA = MC & \text{tính chất tiếp tuyến của } (O', r) \end{cases}$$



$$\Rightarrow MA = MB = MC = \frac{1}{2}BC.$$

Tức là, ΔABC có trung tuyến AM ứng với cạnh BC bằng nửa cạnh đó nên là tam giác vuông.

b. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

- MO là tia phân giác của góc $A\widehat{M}B$.
- MO' là tia phân giác của góc $A\widehat{M}C$.

Suy ra:

$O\widehat{M}O' = 90^0$ (bởi nó hợp bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù)

c. Tứ giác BCO'O có OB// O'C (vì cùng vuông góc với BC) nên tứ giác này là hình thang, do đó:

$$S_{BCO'O} = \frac{1}{2}(OB + O'C)BC.$$

Hạ O'D $\perp$ OB, suy ra:

tứ giác BCO'H là hình chữ nhật $\Rightarrow$ BC = O'H.

Trong $\Delta OO'H$ ta có:

$$O'H^2 = OO'^2 - OH^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr$$

$$\Rightarrow O'H = 2\sqrt{Rr}.$$

Vậy:

$$S_{BCO'O} = \frac{1}{2}(R + r).2\sqrt{Rr} = \sqrt{Rr}\,(R + r).$$

d. Ta có ngay IM là đường trung bình của hình thang BCO'O, do đó:

$$IM \,//\, OB \Rightarrow IM \perp BC.$$

Vậy, BC là tiếp tuyến của đường tròn (I, IM).

Nhận xét: 1. Ta cũng có OO' là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính BC.

2. Chúng ta đã biết rằng " *Nếu đường thẳng d đi qua một điểm ở bên trong đường tròn (O) thì nó cắt đường tròn này* " và câu hỏi được đặt ra ở đây là nếu thay đường thẳng d bằng một đường tròn thì có thể kết luận được gì về vị trí tương đối của hai đường tròn này. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ nhận định này.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng nếu một đường tròn đi qua một điểm bên trong và một điểm bên ngoài một đường tròn khác thì hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm.

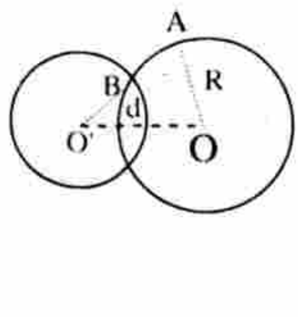
Giải

Giả sử đường (O) đi qua A và B, trong đó A ở bên ngoài (O'), B ở bên trong (O'). Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của các đường tròn (O), (O'). Ta có:

$$OA = OB = R,\ O'A > r \text{ và } O'B < r.$$

Xét $\Delta OO'B$ ta có:

$$OO' \le OB + O'B < R + r \qquad (1)$$



- Nếu $R \ge r$ thì trong $\Delta OO'B$, ta có:

$$OO' \ge OB - O'B > R - r \qquad (2)$$

- Nếu $r \ge R$ thì trong $\Delta OO'A$, ta có:

$$OO' \ge O'A - OA > r - R \qquad (3).$$

Từ đó ta được:

$$|R - r| < OO' < R + r \Leftrightarrow \text{hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau.}$$

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã sử dụng các kiến thức:

- Vị trí tương đối của một điểm với đường tròn.
- Hệ thức liên hệ giữa các cạnh của tam giác.

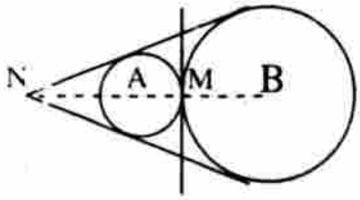
Để từ đó nhận được bất đẳng thức $|R - r| < OO' < R + r$.

Ví dụ 4: Cho đoạn thẳng AB và một điểm M không trùng với. Vẽ các đường tròn (A, AM) và (B, BM). Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn này, từ đó suy ra số tiếp tuyến chung của chúng.

Giải

Để xét vị trí tương đối của hai đường tròn (A, AM) và đường tròn (B, BM), ta phải xét các trường hợp vị trí của điểm M đối với đoạn thẳng AB.

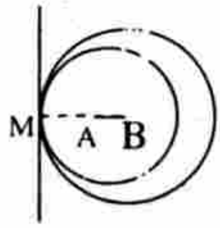
Trường hợp 1: Điểm M nằm giữa A và B, ta có:

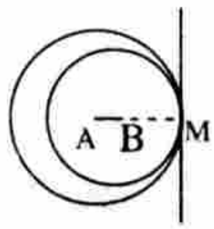


$$AB = AM + MB \Leftrightarrow d = R + r.$$

Vậy, hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau và do đó chúng có ba tiếp tuyến chung.

Trường hợp 2: Điểm M nằm trên tia đối của tia AB (hoặc tia đối của tia BA), ta có:

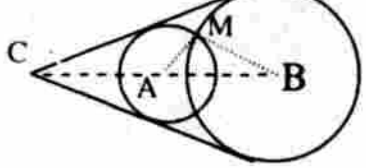




$$\left[\begin{array}{l} AB = BM - AM \Leftrightarrow d = R - r \\ AB = AM - BM \Leftrightarrow d = r - R \end{array}\right.$$

Vậy, hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau và do đó chúng có một tiếp tuyến chung.

Trường hợp 3: Điểm M nằm ngoài đường thẳng AB, ta có:



$$|MB - MA| < AB < MB + MA$$

$$\Leftrightarrow |R - r| < d < R + r.$$

Vậy, hai đường tròn cắt nhau và do đó chúng có hai tiếp tuyến chung.

Nhận xét: Để tránh bỏ sót trường hợp, các em học sinh hãy nhớ lại vị trí tương đối của điểm và đường thẳng, cụ thể với điểm M và đường thẳng AB (M không trùng với A, B) cho trước, ta có:

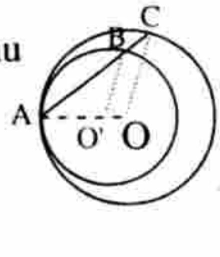
1. Nếu M thuộc đường thẳng AB, khi đó:
   - M nằm giữa A và B.
   - A nằm giữa M và B.
   - B nằm giữa M và A.
2. M không thuộc đường thẳng AB.

Ví dụ 5: Cho hai đường tròn (O, R) và (O', r) tiếp xúc với nhau tại A. Vẽ một cát tiếp qua A cắt hai đường tròn tại B và C. Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại B và C song song với nhau.

Giải

Xét hai khả năng tiếp xúc của (O, R) và (O', r).

Trường hợp 1: Nếu (O, R) và (O', r) tiếp xúc trong với nhau

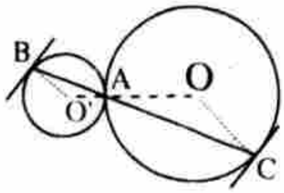


Trong ΔOAC, ta có:

$$\frac{O'B}{OC} = \frac{r}{R} = \frac{O'A}{OA} \Rightarrow O'B // OC$$

Nên các tiếp tuyến tại B và C song song với nhau vì chúng vuông góc với O'B và vuông góc với OC.

Trường hợp 2: Nếu (O, R) và (O', r) tiếp xúc ngoài với nhau



Ta có:

$$\frac{O'B}{OC} = \frac{r}{R} = \frac{O'A}{OA} \Rightarrow O'B // OC.$$

Nên các tiếp tuyến tại B và C song song với nhau vì chúng vuông góc với O'B và vuông góc với OC.

Nhận xét: Cũng với nhận xét như trong ví dụ trước, các em học sinh hãy nhớ rằng với giả thiết " *Hai đường tròn tiếp xúc với nhau* " chúng ta cần xét hai trường hợp, đó là:

1. Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.
2. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Hai đường tròn phân biệt có nhiều nhất bao nhiêu điểm chung ? Vì sao ?

Câu hỏi 2: Nêu các vị trí tương đối của hai đường tròn phân biệt. Vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 3: Hãy chỉ ra vị trí tương đối của hai đường tròn phân biệt (O) và (O'), biết số tiếp tuyến chung của hai đường tròn bằng:

a. 0.

b. 1

c. 2.

d. 3.

e. 4.

Câu hỏi 4: Hai đường tròn (O) và (O') thoả mãn điều kiện gì để chúng có vô số tiếp tuyến chung ?

Câu hỏi 5: Trục đối xứng của hai đường tròn (O) và (O') là đường thẳng nào ? Vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 6: Nêu tính chất của hai đường tròn cắt nhau.

Câu hỏi 7: Nêu tính chất của hai đường tròn tiếp xúc với nhau.

Câu hỏi 8: Cho hai đường tròn (O, R) và (O', r) với $r < R$ và $OO' = d$. Hãy dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó, biết:

a. (O) và (O') cắt nhau.

b. (O) và (O') tiếp xúc với nhau.

c. (O) và (O') ở ngoài nhau.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ba đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 cùng có bán kính R và tiếp xúc ngoài với nhau đôi một. Tính diện tích tam giác có ba đỉnh là ba tiếp điểm.

Bài tập 2. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB.

a. Vẽ các đường tròn (A; a) và (B; a). Chứng minh rằng hai đường tròn này tiếp xúc ngoài với nhau.

b. Vẽ một đường tròn tâm M cắt hai đường tròn (A) và (B) lần lượt tại C, D, E, F (C và F cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng tứ giác CDEF là hình chữ nhật.

c. Xác định bán kính của đường tròn (M) để cho tứ giác CDEF là hình vuông.

Bài tập 3. Cho đường (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn (B; BO), cắt đường tròn (O) ở C, D.

a. Xác định dạng tứ giác OCDB.

b. Xác định dạng tam giác ACD.

Bài tập 4. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tai A và B, trong đó OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Tính dây cung AB biết OA = 20cm, O'A = 15cm.

Bài tập 5. Cho hai đường tròn (O. 17cm) và (O'; 10cm) cắt nhau tại A và B. Biết OO' = 21cm. Tính AB.

Bài tập 6. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi M là trung điểm của OO'. Qua A, kẻ đường thẳng vuông góc với AM, cắt các đường tròn (O) và (O') ở C và D. Chứng minh rằng AC = AD.

Bài tập 7. Cho đường tròn (O; OA), điểm I thuộc bán kính OA sao cho $AI = \frac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn (I, IA).

a. Xác định vị trí của các đường tròn (O) và (I).

b. Kẻ một đường thẳng qua A, cắt các đường tròn (I) và (O) theo thứ tự ở B và C. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

Bài tập 8. Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn đó. Trên bán kính OA lấy điểm B sao cho $OB = \frac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn đường kính AB.

a. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O) cho trước.

b. Vẽ đường tròn đồng tâm O với đường tròn (O) cho trước, cắt đường tròn đường kính AB tại C. Tia AC cắt hai đường tròn đồng tâm tại D và E (D nằm giữa C và E). Chứng minh rằng AC = CD = DE.

Bài tập 9. Cho đường tròn (O) và đường thẳng a không giao nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên a. Tia đối của tia OH cắt đường tròn tại A. Vẽ đường thẳng b ⊥ a tại điểm B trên đường thẳng a. Đoạn thẳng AB cắt đường tròn tại C. Tia OC cắt b tại I. Chứng minh rằng đường tròn (I; IB) tiếp xúc với đường thẳng a và đường tròn (O).

Bài tập 10. Cho hình vuông ABCD. Vẽ đường tròn (D; DC) và đường tròn đường kính BC, chúng cắt nhau tại một điểm thứ hai là E. Tia CE cắt AB tại M, tia BE cắt AD tại N. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB, N là trung điểm của AD.

Bài tập 11. Cho đường tròn (O) và một điểm A ở trên đường tròn đó. Vẽ đường tròn (I) đi qua O và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. Qua A vẽ tiếp tuyến chung xy với hai đường tròn. Dây AC của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại M. Tia CO cắt đường tròn tâm I tại N.

Đường thẳng OM cắt xy và tia AN lần lượt tại B và D. Chứng minh rằng:

a. MA = MC.

b. Tứ giác ABCD là hình thoi.

Bài tập 12. Cho đoạn thẳng AB cố định. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại A, vẽ đường tròn O' tiếp xúc với AB tại B, hai đường tròn này luôn luôn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và luôn tiếp xúc ngoài với nhau. Tìm quỹ tích tiếp điểm M của hai đường tròn.

Bài tập 13. Cho đoạn thẳng OO' = 4cm. Vẽ đường tròn (O; 2cm) và (O'; 1cm).

a. Hãy xác định vị trí tương đối giữa hai đường tròn đó.

b. Dựng đường tròn (I; 1,5cm) tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O').

Bài tập 14. Cho trước đường tròn (O, 2cm) và đường thẳng xy tiếp xúc với (O) tại A. Dựng đường tròn (I; 1cm) tiếp xúc với đường tròn (O) và tiếp xúc với xy.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Xét $\Delta O_1O_2O_3$, ta có:

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2R$$

$\Leftrightarrow \Delta O_1O_2O_3$ đều và có cạnh bằng 2R

do đó:

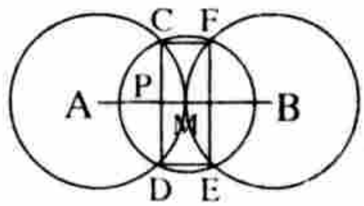
$$S_{\Delta O_1O_2O_3} = \frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}.$$

Bài tập 2. *Hướng dẫn*:

a), b) học sinh tự chứng minh.

Để CDEF là hình vuông điều kiện là:

$$CE \perp DF \Leftrightarrow \widehat{AMC} = 45^0.$$



Khi đó, trong tam giác ΔACM cân tại A với $\widehat{AMC} = 45^0$, ta được:

$$CM = a\sqrt{2}.$$

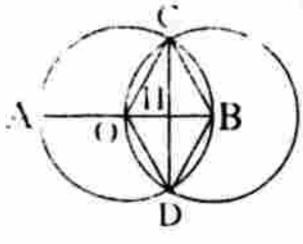
Bài tập 3.

a. Ta có ngay:

$$OC = OD = OB \text{ và } BC = BD = BO$$

$$\Rightarrow OC = CB = BD = DO$$

$\Leftrightarrow$ OCDB là hình thoi.



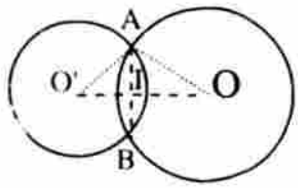
b. Trong ΔABC vuông tại C, ta có:

$$BC = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow B\hat{A}C = 30^0 \Rightarrow C\hat{A}D = 60^0 \Rightarrow \Delta ACD \text{ đều.}$$

Bài tập 4. Gọi I là trung điểm của AB, suy ra:

$AB = 2AI$ và $AI \perp OO'$.

Trong $\Delta OAO'$ vuông tại A, ta có:



$$S_{\Delta OAO'} = \frac{1}{2}OA.O'A$$

$$= \frac{1}{2}AI.OO' = \frac{1}{2}AI.\sqrt{OA^2 + O'A^2}$$

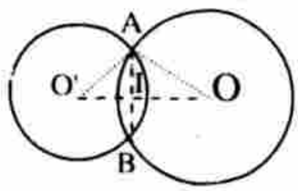
$$\Leftrightarrow AI = \frac{OA.O'A}{\sqrt{OA^2 + O'A^2}} = \frac{20.15}{\sqrt{20^2 + 15^2}} = 12cm.$$

Vậy, ta được $AB = 24cm$.

Bài tập 5. Gọi I là trung điểm của AB, suy ra:

$AB = 2AI$ và $AI \perp OO'$.

Trong $\Delta OAO'$, ta có:



$$S_{\Delta OAO'} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{1}{2}AI.OO'$$

$$\Leftrightarrow AI = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{OO'} = \frac{2\sqrt{24.3.14.7}}{21} = 8cm.$$

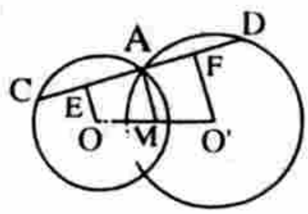
Vậy, ta được $AB = 16cm$.

Bài tập 6. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AC, AD, suy ra:

$OE \perp AC$ và $AE = CE$

$O'F \perp AD$ và $AF = DF$

$\Rightarrow OE \parallel MA \parallel O'F$.



Khi đó, tứ giác OO'FE có:

$OE \parallel O'F \Rightarrow$ OO'FE là hình thang

từ đó AM là đường trung bình của OO'FE, suy ra:

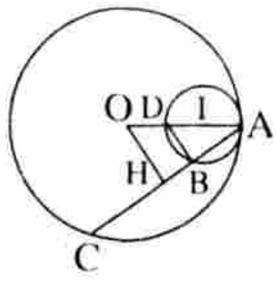
$EA = FA \Leftrightarrow 2EA = 2FA \Leftrightarrow AC = AD$, đpcm.

Bài tập 7.

a. Ta có:

$OI = OA - IA$

$\Leftrightarrow$ (O) và (I, IA) tiếp xúc trong với nhau.



b. Kẻ OH vuông góc với CD, ta được:

$CH = AH$

Mặt khác, ta có:

$$\widehat{ABD} = 90^0 \Leftrightarrow BD \perp AB \Rightarrow BD \,//\, OH \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AD}{AO} = \frac{2}{3}$$

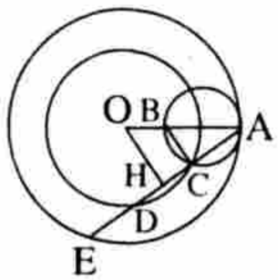
$$\Leftrightarrow \frac{AB}{2AH} = \frac{2}{2.3} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}.$$

Bài tập 8.

a. Gọi I là trung điểm AB, ta có:

$OI = OA - IA$

$\Leftrightarrow$ (O) và (AB) tiếp xúc trong với nhau.



b. Kẻ OH vuông góc với CD, ta được:

$CH = DH$ và $AH = EH$

do đó:

$$AC = AH - CH = EH - DH = ED.$$

Mặt khác, ta có:

$$\widehat{ACB} = 90^0 \Leftrightarrow BC \perp AC \Rightarrow BC \,//\, OH \Rightarrow \frac{AC}{CH} = \frac{AB}{BO} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow AC = 2CH = CD.$$

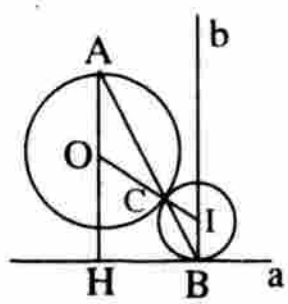
Vậy, ta đã chứng minh được $AC = CD = DE$.

Bài tập 9. Nhận xét rằng:

OA // IB, vì cùng vuông góc với a

$$\Rightarrow \Delta OAC \backsim \Delta IBC \Rightarrow \frac{OA}{IB} = \frac{OC}{IC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{IB}{IC} = \frac{OA}{OC} = 1 \Leftrightarrow IB = IC.$$

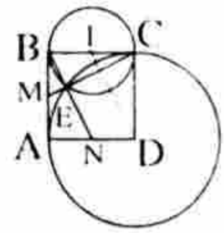


Khi đó:

Vì $IB \perp a$ nên (I, IB) tiếp xúc với a.

Vì $IO = IC + OC = OC + IB$ nên (I, IB) tiếp xúc với (O).

Bài tập 10. Gọi I là trung điểm của AB.



Xét hai tam giác vuông ΔCDI và ΔBCM, ta có:

$CD = BC$, vì hai cạnh hình vuông

$\widehat{CDI} = \widehat{BCM}$, góc có cạnh tương ứng vuông góc

do đó:

$\Delta CDI = \Delta BCM$ (cạnh góc vuông và góc nhọn)

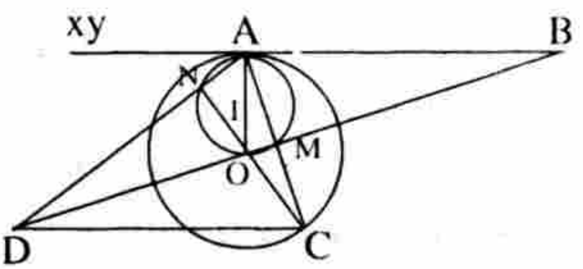
$\Rightarrow BM = CI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}AB \Leftrightarrow$ M là trung điểm AB.

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$\Delta ABN = \Delta BCM$ (cạnh góc vuông và góc nhọn)

$\Rightarrow AN = BM = \dfrac{1}{2}AD \Leftrightarrow$ N là trung điểm AD.

Bài tập 11.



a. Nhận xét rằng:

$\widehat{OMA} = 90^0 \Rightarrow OM \perp AC$

$\Rightarrow MA = MC$, đpcm.

b. Nhận xét rằng:

$\widehat{OMA} = 90^0 \Rightarrow DM \perp AC$.

$\widehat{ONA} = 90^0 \Rightarrow CN \perp AD$.

Suy ra, O là trực tâm ΔACD, do đó:

$CD \perp AO \Rightarrow CD \mathbin{//} AB$.

Xét hai tam giác vuông ΔMAB và ΔMCD, ta có:

$MA = MC$

$\widehat{MAB} = \widehat{MCD}$, so le trong

do đó:

$\Delta CDI = \Delta BCM$ (cạnh góc vuông và góc nhọn)

$\Rightarrow AB = CD$.

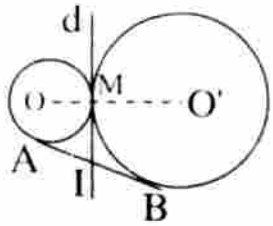
Như vậy, tứ giác ABCD có:

$AB \overset{//}{=} CD$ và $AC \perp BD$

nên nó là hình thoi.

Bài tập 12.

Phần thuận: Dựng tiếp tuyến chung d tại M của hai đường tròn, giả sử d cắt AB tại I.



Trong ΔMAB, ta có:

IA = IM, vì IA, IM đều là tiếp tuyến của (O)

IB = IM, vì IB, IM đều là tiếp tuyến của (O')

suy ra:

$$IM = \frac{1}{2}AB$$

$\Rightarrow \Delta MAB$ vuông tại M (vìcó trung tuyến bằng nửa cạnh huyền)

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn (AB).

Phần đảo: Lấy điểm M bất kì trên đường tròn (AB). Ta thực hiện dựng:

- Dựng đường thẳng m qua M và vuông góc với IM.
- Dựng tia phân giác Ix của góc $\widehat{AIM}$, tia Ix cắt m tại O. Dựng đường tròn (O, OM), ta thấy ngay:

  $$\Delta OMI = \Delta OAI \text{ (c.g.c)} \Rightarrow O\hat{A}I = O\widehat{M}I = 90^0 \Leftrightarrow OA \perp AB$$

  $\Leftrightarrow$ (O, OM) tiếp xúc với AB tại A.
- Dựng tia phân giác Iy của góc $\widehat{BIM}$, tia Iy cắt m tại O'. Dựng đường tròn (O', O'M), ta thấy ngay:

  $$\Delta O'MI = \Delta O'BI \text{ (c.g.c)} \Rightarrow O'\hat{B}I = O'\widehat{M}I = 90^0 \Leftrightarrow OB \perp AB$$

  $\Leftrightarrow$ (O', O'M) tiếp xúc với AB tại B.

Trong cách dựng trên, ta thấy ngay (O) và (O') tiếp xúc với nhau.

Kết luận: Quỹ tích của điểm M là đường tròn (AB).

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. CÁC HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Ôn tập các kiến thức trong chương theo các câu hỏi sau:

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa đường tròn.

Câu hỏi 2: Phát biểu quỹ tích các điểm M mà $\widehat{AMB} = 90^0$ trong đó A, B là hai điểm cố định.

Câu hỏi 3: Thế nào là đường tròn ngoại tiếp một tam giác? Nêu cách xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Câu hỏi 4: Phát biểu các định lí về đường kính và dây cung.

Câu hỏi 5: Phát biểu các định lí về dây cung và khoảng cách đến tâm.

Câu hỏi 6: Nêu các vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Viết các hệ thức giữa d (khoảng cách từ tâm đến đường thẳng) và R (bán kính của đường tròn) ứng với mỗi vị trí đó.

Câu hỏi 7: Phát biểu định nghĩa tiếp tuyến của đường tròn, các tính chất của tiếp tuyến. Nêu dấu hiệu nhận biết một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn.

Câu hỏi 8: Thế nào là đường tròn nội tiếp một tam giác ? Nêu cách xác định tâm của đường tròn nội tiếp tam giác.

Câu hỏi 9: Nêu các vị trí tương đối của hai đường tròn. Viết các hệ thức giữa đoạn nối tâm d và các bán kính R, r ứng với mỗi vị trí đó.

II. BÀI TẬP ÔN TẬP

Bài tập 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AD. Dựng điểm I thuộc đường thẳng AD sao cho $\widehat{BIC} = 90^0$.

Bài tập 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Chứng minh rằng cát tuyến MAN (M và N thuộc đường tròn) song song với đường nối tâm là cát tuyến có độ dài lớn nhất.

Bài tập 3.

a. Cho hai đường thẳng g_1 và g_2 tạo thành một góc 40^0. Hãy dựng một đường tròn có đường kính 3cm tiếp xúc với cả hai đường thẳng trên. Có bao nhiêu đường tròn thoả mãn điều kiện đó?

b. Tìm điều kiện về hai đường thẳng g_1 và g_2 để bài toán có vô số nghiệm hình.

Bài tập 4. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn (A; AH). Gọi HD là đường kính của đường tròn đó. Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

a. Chứng minh rằng ΔBEC là tam giác cân.

b. Gọi I là hình chiếu của A trên BE. Chứng minh rằng AI = AH.

c. Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A).

d. Chứng minh rằng BE = BH + DE.

Bài tập 5. Cho ΔABC vuông tại A.

a. Nêu cách dựng đường tròn (O) qua A và tiếp xúc BC tại B. Nêu cách dựng đường tròn (O') qua A và tiếp xúc BC tại C.

b. Hai đường tròn (O) và (O') có vị trí nào đối với nhau?

c. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

d. Cho AB = 36cm, AC = 48cm. Tính độ dài BC và các bán kính của các đường tròn (O), (O').

Bài tập 6. Cho đường tròn tâm O đường kính AB, dây CD vuông góc với OA tại điểm H nằm giữa O và A. Gọi E là điểm đối xứng với A qua H.

a. Tứ giác ACED là hình gì? Chứng minh

b. Gọi I là giao điểm của DE và BC. Chứng minh rằng điểm I thuộc đường tròn (O') có đường kính là EB.

c. Chứng minh rằng HI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

d. Tính độ dài HI biết đường kính các đường tròn (O) và (O') nói trên theo thứ tự bằng 5cm và 3cm.

Bài tập 7. Cho đường tròn tâm O bán kính 15cm, dây BC = 24cm. Các tiếp tuyến của đườn tròn tại B và tại C cắt nhau ở A.

a. Tính khoảng cách OH từ O đến dây BC,

b. Chứng minh rằng ba điểm O, H, A thẳng hàng.

c. Tính độ dài AB, AC.

d. Gọi M là giao điểm của AB và CO, gọi N là giao điểm của AC và BO. Chứng minh rằng BCNM là hình thang cân.

Bài tập 8. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 4cm. Kẻ các tiếp tuyến Ax, By cùn phía với nửa đường tròn đối với AB. Gọi C là một điểm thuộc tia Ax. Kẻ tiếp tuyến CE với nửa đường tròn (E là tiếp điểm), CE cắt By ở D.

a. Chứng minh rằng $\widehat{COD} = 90^0$.

b. Chứng minh rằng ΔAEB và ΔCOD đồng dạng

c. Gọi I là trung điểm của CD. Vẽ đường tròn tâm I bán kính IC. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn (I).

d. Xác định vị trí của C trên tia Ax để CD có độ dài nhỏ nhất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa Toán 9 - Nhà xuất bản Giáo dục
2. Sách giáo khoa Bài tập Toán 9 - Nhà xuất bản Giáo dục.
3. Vũ Hữu Bình - Toán cơ bản và nâng cao Hình học 9 - Nhà xuất bản Đà Nẵng.
4. Vũ Hữu Bình - Toán cơ bản và nâng cao Đại số 9 - Nhà xuất bản Giáo dục.
5. Vũ Hữu Bình, Bùi Văn Tuyên - Ôn tập và kiểm tra Hình học 9 - Nhà xuất bản Giáo dục.
6. Vũ Hữu Bình (Chủ biên) - Ôn tập Hình học 9 - Nhà xuất bản Giáo dục.