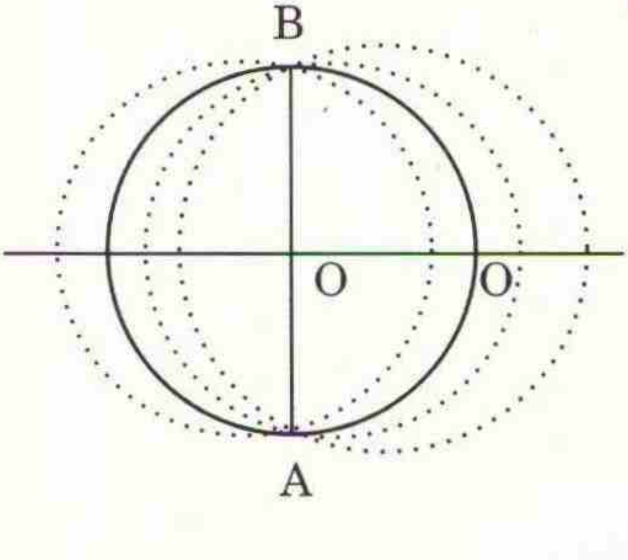
Th.s Toán học - Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC - Chủ biên
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIỆN KHẢI
LÊ BÍCH NGỌC
LÊ HỮU TRÍ

Để học tốt TOÁN 9

TẬP 2



- Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.
- Với Thầy, Cô giáo và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.s Toán học – Ks Tin học LÊ HỒNG ĐỨC – Chủ biên
Nhà giáo ưu tú ĐÀO THIỆN KHẢI
LÊ BÍCH NGỌC
LÊ HỮU TRÍ

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 9

TẬP 2

- *Với Học sinh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo trình hoàn chỉnh về mặt kiến thức, dễ đọc, dễ hiểu.*
- *Với Thầy, Cô và Phụ huynh cuốn sách này cung cấp một bộ giáo án hoàn chỉnh về mặt kiến thức và có tính sư phạm để giảng dạy cơ bản và nâng cao theo tư tưởng đổi mới phương pháp dạy học*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới các Thầy, Cô giáo, các Phụ huynh, cùng toàn thể các Em học sinh bộ sách:

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN THCS

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên.

Bộ tài liệu gồm 9 cuốn :

Cuốn 1: Toán 6 - Tập 1
Cuốn 2: Toán 6 - Tập 2
Cuốn 3: Toán 7 - Tập 1
Cuốn 4: Toán 7 - Tập 2
Cuốn 5: Toán 8 - Tập 1
Cuốn 6: Toán 8 - Tập 2
Cuốn 7: Toán 9 - Tập 1
Cuốn 8: Toán 9 - Tập 2

Bộ sách được viết theo chương trình sách giáo khoa mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo dựa trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp giải Toán THCS.

Mục tiêu của bộ sách:

1. *Cung cấp cho các Thầy, Cô giáo, các Phụ huynh một bộ giáo án có chất lượng về mặt sư phạm và chứa đựng đầy đủ kiến thức cơ bản cũng như chuyên sâu, để sau khi tham khảo có thể chuyển đổi ngay thành giáo án mang đi giảng dạy cho học sinh của mình.*
2. *Cung cấp cho các em học sinh THCS yêu thích môn Toán một bộ sách tự học tập dễ hiểu và bổ ích. Nó chắc chắn sẽ trở thành người bạn đồng hành để giúp các Em chủ động hơn trong việc học Toán theo chương trình sách giáo khoa và mở mang kiến thức Toán THCS của bản thân.*

Các cuốn Toán 6, Toán 7, Toán 8, Toán 9 đều có chung một cấu trúc, bao gồm hai phần:

Phần I – Số học hoặc đại số
Phần II – Hình học

Mỗi phần chứa đựng các chương (chương I, chương II, ...). Ở mỗi chương chứa đựng các chủ đề (chủ đề 1, chủ đề 2, ...) theo nội dung của sách giáo khoa.

Mỗi chủ đề đều được chia thành 5 mục:

I. *Kiến thức cơ bản*

Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan (trong hầu hết các trường hợp chúng được bắt đầu bằng phương pháp đặt vấn đề) cùng với những thí dụ minh họa ngay sau đó.

II. ***Các ví dụ minh họa***

Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kỹ năng giải Toán.

III. ***Câu hỏi ôn tập lý thuyết***

IV. ***Bài tập đề nghị***

V. ***Hướng dẫn - Đáp số***

Như vậy, ở mỗi chủ đề:

1. *Với việc trình bày kiến thức cơ bản theo kiểu đặt vấn đề, cũng như thí dụ minh họa ngay sau đó, sẽ giúp tăng chất lượng bài giảng cho các Thầy, Cô giáo. Và với các em học sinh sẽ thấy dễ hiểu kiến thức mới để rồi biết cách trình bày bài. Điều này phù hợp với xu hướng giáo dục mới trong công cuộc cải cách phương pháp dạy và học theo hướng "* ***Lấy học trò làm trung tâm*** *"*
2. *Tiếp đó, tới các ví dụ minh hoạ có chọn lọc, sẽ giúp các Thầy, Cô giáo dẫn dắt các em học sinh hoàn thiện kiến thức.*
3. *Đặc biệt là nội dung của các* ***chú ý, nhận xét*** *và* ***yêu cầu*** *sau mỗi kiến thức cùng với một vài thí dụ và ví dụ sẽ giúp các Thầy, Cô giáo củng cố những hiểu biết chưa thật thấu đáo cho các em học sinh, cùng với cách nhìn nhận vấn đề đặt ra cho các em học sinh, để trả lời một cách thoả đáng câu hỏi "* ***Tại sao lại nghĩ và làm như vậy ?*** *".*
4. *Ngoài ra, còn có rất nhiều bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Chúng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã nhận lời đọc bản thảo, nhận lời tới dự giờ trong các tiết giảng thử của chúng tôi theo giáo trình này ở trên các lớp 6, 7, 8, 9 tại một số trường THCS của Hà Nội và từ đó đóng góp những nhận xét quý báu để giúp chúng tôi tới ngày hôm nay hoàn thiện được bộ sách này.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

MỤC LỤC

PHẦN I – ĐẠI SỐ

CHƯƠNG I
SỐ THỰC CĂN BẬC HAI

Chủ đề 1: Nhắc lại về hàm số 7
Chủ đề 2: Hàm số bậc nhất – Định nghĩa – Tính chất 29
Chủ đề 3: Đồ thị của hàm số bậc nhất 35
Chủ đề 4: Hệ số góc của đường thẳng.
Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau 45
Chủ đề 5: Phương trình bậc nhất hai ẩn số 62
Chủ đề 6: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số 73
Chủ đề 7: Hệ phương trình tương đương 81
Chủ đề 8: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng 92
Chủ đề 9: Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế 104
Chủ đề 10: Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình 117
Ôn tập cuối chương I 136

CHƯƠNG II
HÀM SỐ $y = ax^2$, VỚI $a \neq 0$
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN SỐ

Chủ đề 1: Hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$ 144
Chủ đề 2: Đồ thị của hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$ 149
Chủ đề 3: Phương trình bậc hai một ẩn số 156
Chủ đề 4: Công thức nghiệm của phương trình bậc hai 168
Chủ đề 5: Hệ thức Viét và các ứng dụng 196
Chủ đề 6: Phương trình quy về phương trình bậc hai 230
Chủ đề 7: Giải bài toán bằng cách phương trình 269
Ôn tập cuối chương II 279

PHẦN II – HÌNH HỌC

CHƯƠNG I
CHU VI ĐƯỜNG TRÒN VÀ DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

Chủ đề 1: Đa giác đều 283
Chủ đề 2: Chu vi đường tròn 291
Chủ đề 3: Diện tích hình tròn 295
Ôn tập cuối chương I 301
TÀI LIỆU THAM KHẢO 284

Phần 1

Đại số

CHƯƠNG I - HÀM SỐ $y = ax + b$
HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH
BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

Chương này, bao gồm:

1. **Nhắc lại về hàm số**
2. **Hàm số bậc nhất – Định nghĩa – Tính chất**
3. **Đồ thị của hàm số bậc nhất**
4. **Hệ số góc của đường thẳng. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau**
5. **Phương trình bậc nhất hai ẩn số**
6. **Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số**
7. **Hệ phương trình tương đương**
8. **Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng**
9. **Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế**
10. **Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình**

CHỦ ĐỀ 1

NHẮC LẠI VỀ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHÁI NIỆM HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Chúng ta đã được làm quen với khái niệm hàm số ở lớp 7, cụ thể:

> *Một hàm số f từ tập hợp số X đến tập hợp số Y là một quy tắc cho tương ứng <u>mỗi giá trị</u> $x \in X$ với <u>một và chỉ một giá trị</u> $y \in Y$.* Kí hiệu là f(x), x là biến số, y = f(x) là giá trị của hàm số f tại x.

<u>Thí dụ 1:</u> Chúng ta đã được làm quen với các hàm số:

$y = kx$, *x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau.*

$y = \frac{k}{x}$, *x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau.*

<u>Thí dụ 2:</u> Với hàm số y = 2x, ta nhận thấy:

a. Nó là một quy tắc cho tương ứng với mỗi $x \in \mathbf{R}$ một số duy nhất $y = 2x \in \mathbf{R}$. Vậy y = 2x là một hàm số từ tập hợp **R** đến tập hợp **R**.

b. Bảng một số cặp giá trị tương ứng của chúng là:

x	– 4	– 2	0	1	3	5	7
y	– 8	– 4	0	2	6	10	14

Trên mặt phẳng toạ độ, mỗi cặp số trên (thí dụ (1, 2)) được biểu diễn bởi một điểm, tập hợp tất cả các điểm (x, y = 2x) với $x \in \mathbf{R}$ gọi là *đồ thị* của hàm số y = 2x

> **<u>Chú ý:</u>** Qua hai thí dụ trên chúng ta đã thấy lại được rằng " *Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức*". Và một câu hỏi thường được đặt ra là " *Mối quan hệ f cho trước có phải là hàm số không ?*", khi đó, chúng ta thường dựa vào định nghĩa để trả lời câu hỏi này.

<u>Thí dụ 3:</u> Cho f là một quan hệ từ tập **R** đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không nếu:

a. Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	– 4	– 2	0	1	3	5	7
f(x)	– 9	– 5	1	1	5	9	13

b. Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

x	−6	−2	−1	0	1	1	3
f(x)	8	4	2	−1	1	6	8

c. Có công thức $y^2 = 4x$.

Giải

a. Có là hàm số, bởi với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng.

b. Không là hàm số, vì với x = 1 ta xác định được hai giá trị khác nhau của f(x) là 1 và 6.

c. Không là hàm số, vì với x = 4 ta được: $y^2 = 4.4 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$

tức là, với x = 4 ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 4 và −4.

2. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Chúng ta sẽ bắt đầu với các hàm số:

1. Với hàm số y = 8x, ta nhận thấy với $\forall x \in \mathbf{R}$ luôn tìm được giá trị tương ứng của y. Khi đó, ta nói hàm số y = 8x có tập xác định là **R**.

2. Với hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$, ta nhận thấy:

   - Với x = 1 thì $y = \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0}$ không xác định.
   - Với $\forall x \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$ luôn tìm được giá trị tương ứng của y.

   Khi đó, ta nói hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$ có tập xác định là $\mathbf{R}\backslash\{1\}$.

3. Với hàm số $y = \sqrt{2-x}$, ta nhận thấy nó chỉ có nghĩa khi $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

   Khi đó, ta nói hàm số $y = \sqrt{2-x}$ có tập xác định là các số thực $x \leq 2$.

Từ đó, ta thấy:

> ***Tập xác định** của hàm số là tập hợp các giá trị của x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.*

Và xuất phát từ định nghĩa trên ta có quy tắc:

> ***Muốn tìm tập xác định của hàm số y = f(x) ta phải đi tìm tất cả các giá trị của x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.***

Thí dụ 4: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = 6x^2$.

b. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

c. $y = \sqrt{2x-3}$.

Giải

a. Ta có ngay, hàm số $y = 6x^2$ có tập xác định là **R**.

b. Điều kiện: $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.

Vậy, hàm số có tập xác định là $\mathbf{R}\backslash\{-2\}$.

c. Điều kiện: $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

Vậy, hàm số có tập xác định là các số thực $x \geq \frac{3}{2}$.

Chú ý: Chúng ta sẽ có riêng một bài toán tìm tập xác định của hàm số.

3. HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN

Chúng ta sẽ bắt đầu với hàm số: $y = x^2$, có tập xác định là **R**.

1. Trong khoảng (0, 4) cho x các giá trị tăng dần tuỳ ý, chẳng hạn $x = 0, 1, \frac{3}{2}$, 2, ..., khi đó ta có bảng:

X	0	1	3/2	2	...
Y	0	1	9/4	4	...

và nhận thấy rằng các giá trị y của hàm số cũng tăng.

Khi đó, ta nói rằng hàm số $y = x^2$ *đồng biến* trong khoảng (0, 4).

2. Trong khoảng (−6, −2) cho x các giá trị tăng dần tuỳ ý, chẳng hạn $x = -5$, $-4, -\frac{3}{2}, -1, \ldots$, khi đó ta có bảng:

X	−5	−4	−3/2	−1	...
Y	25	16	9/4	1	...

và nhận thấy rằng các giá trị y của hàm số giảm.

Khi đó, ta nói rằng hàm số $y = x^2$ *nghịch biến* trong khoảng (−6, −2).

Từ đó, ta có định nghĩa:

1. ***Hàm số đồng biến:*** *Hàm số $y = f(x)$ là đồng biến trong khoảng (a, b) nếu với mọi x_1, x_2 thuộc khoảng (a, b) mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.*
2. ***Hàm số nghịch biến:*** *Hàm số $y = f(x)$ là nghịch biến trong khoảng (a, b) nếu với mọi x_1, x_2 thuộc khoảng (a, b) mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.*

Thí dụ 5: Xét tính chất biến thiên của hàm số $y = 2x + 1$.

Giải

Hàm số xác định trong **R**.

Cho x các giá trị thực bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét: $f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 + 1) - (2x_2 + 1) = 2(x_1 - x_2) < 0$

$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

Chú ý:

1. Trong định nghĩa trên, nếu (a, b) là tập xác định của hàm số, ta nói rằng hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trong tập xác định của nó.
2. Chúng ta sẽ có riêng một bài toán xét tính đồng biến, nghịch biến (gọi chung là sự biến thiên) của hàm số.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Các dạng toán liên quan tới kiến thức của chủ đề này, bao gồm:

Dạng 1: Sự xác định một hàm số.

Dạng 2: Tìm tập xác định của hàm số.

Dạng 3: Xét sự biến thiên của hàm số.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu khái niệm hàm số. Thế nào là hàm hằng ?

Câu hỏi 2: Hàm số có thể được cho bằng những cách gì ? Cho ví dụ.

Câu hỏi 3: Phát biểu định nghĩa đồ thị hàm số.

Câu hỏi 4: Nêu định nghĩa tập xác định của hàm số và quy tắc để tìm tập xác định của hàm số.

Câu hỏi 5: Phát biểu định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến và cho ví dụ.

Câu hỏi 6: Phát biểu định nghĩa hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trong tập xác định của nó khi nào ?

Bài toán 1 SỰ XÁC ĐỊNH MỘT HÀM SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Muốn xét xem mối quan hệ f từ tập X vào tập Y có phải là hàm số không, chúng ta thường sử dụng định nghĩa hàm số để đưa ra lời kết luận.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho X = {−2, 0, 1, 3, 6}, f là một quan hệ từ tập X đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu:

a. Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

X	−2	0	1	3	6
f(x)	3	9	4	8	9

b. Bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

X	−2	0	1	−2	6
f(x)	8	2	6	4	0

Giải

a. Có là hàm số, bởi với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng f(x).

b. Không là hàm số, vì với x = −2 ta xác định được hai giá trị khác nhau của f(x) là 8 và 4.

Ví dụ 2: Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = \frac{12}{x}$.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

x	−6	−4	2	3	
y = f(x)					1

b. Xác định f(−12), f(24).

Giải

a. Ta có được kết quả:

x	−6	−4	2	3	12
$y = \frac{12}{x}$	−2	−3	6	4	1

b. Ta có: $f(-12) = \frac{12}{-12} = -1$, $f(24) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 3: Cho hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = |2x - 3|$.

a. Tính $f(-2)$, $f(8)$.

b. Tính các giá trị của x ứng với $y = -1$, $y = 3$.

Giải

a. Ta lần lượt có:

$$f(-2) = |2(-2) - 3| = |-4 - 3| = |-7| = 7,$$
$$f(8) = |2x - 3| = |2.8 - 3| = |16 - 3| = 13.$$

b. Ta lần lượt có:

- Với $y = -1$ thì: $|2x - 3| = -1$, vô nghiệm bởi $|2x - 3| \ge 0$.
- Với $y = 3$ thì: $|2x - 3| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 3 \\ 2x - 3 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = 3x - 1$. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị âm.

b. y nhận giá trị lớn hơn 5.

Giải

a. Để y nhận giá trị âm điều kiện là: $3x - 1 < 0 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$.

Vậy, với $x < \frac{1}{3}$ thì y nhận giá trị âm.

b. Để y nhận giá trị lớn hơn 5 điều kiện là: $3x - 1 > 5 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy, với $x > 2$ thì y nhận giá lớn hơn 5.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho $X = \{-3, -2, -1, 0, 3\}$, f là một quan hệ từ tập X đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

X	−3	−2	−1	0	3
f(x)	−6	−4	−2	0	6

Bài tập 2. Cho $X = \{-4, 3, 5, 7\}$, f là một quan hệ từ tập X đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

X	−4	3	5	7
Y	8	8	8	8

Bài tập 3. Cho $X = \{-4, -2, 0\}$, f là một quan hệ từ tập X đến tập **R**. Hỏi f có phải là hàm số không, nếu bảng các giá trị tương ứng của chúng là:

X	−4	−4	−2	0
Y	4	12	6	1

Bài tập 4. Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = \frac{36}{x}$.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

x	– 9	– 6	3	12	
y = f(x)					1

b. Xác định f(–12), f(72).

Bài tập 5. Hàm số y = f(x) được cho bởi công thức f(x) = 2x + 9.

a. Hãy điền các giá trị tương ứng của hàm số y = f(x) vào bảng sau:

x	– 3	– 1	2	6	
y = f(x)					27

b. Xác định f(– 8), f(7).

Bài tập 6. Cho hàm số y = f(x) được cho bởi công thức $f(x) = x^2 - 9$.

a. Tính f(– 4), f(– 2), f(0), f(1), f(5).

b. Tính các giá trị của x ứng với y = – 8, y = – 5, y = 0, y = – 10.

Bài tập 7. Cho hàm số y = 2x – 6. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị dương.

b. y nhận giá trị nhỏ hơn 3.

Bài tập 8. Cho hàm số y = 6 – 5x. Tìm các giá trị của x sao cho:

a. y nhận giá trị âm.

b. y nhận giá trị lớn hơn 1.

Bài tập 9. Cho các hàm số: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ và $g(x) = x^2 - 1$.

a. Tính f(–1) và $g(\frac{1}{2})$.

b. Tìm số a để f(a) = g(a)

IV. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Có là hàm số.

Bài tập 2. Có là hàm số và đây là hàm hằng y = 8.

Bài tập 3. Không là hàm số, vì với x = – 4 ta xác định được hai giá trị khác nhau của y là 4 và 12.

Bài tập 4.

a. Ta có được kết quả:

x	– 9	– 6	3	12	36
$y = \frac{36}{x}$	– 4	– 6	12	3	1

b. Ta có f(–12) = – 3, $f(72) = \frac{1}{2}$.

Bài tập 5. *Học sinh tự làm.*

Bai tập 6.

a. Ta lần lượt có:

$f(-4) = (-4)^2 - 9 = 16 - 9 = 7,$

$f(-2) = (-2)^2 - 9 = 4 - 9 = -5,$

$f(0) = 0 - 9 = -9,\ f(1) = 1^2 - 9 = 1 - 9 = -8,$

$f(5) = 5^2 - 9 = 25 - 9 = 16.$

b. Ta lần lượt có:

- Với $y = -8$ thì: $x^2 - 9 = -8 \Leftrightarrow x^2 = -8 + 9 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$
- Với $y = -5$ thì: $x^2 - 9 = -5 \Leftrightarrow x^2 = -5 + 9 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$
- Với $y = 0$ thì: $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$
- Với $y = -10$ thì: $x^2 - 9 = -10 \Leftrightarrow x^2 = -1$, không tồn tại x.

Bài tập 7.

a. Để y nhận giá trị dương điều kiện là: $2x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3.$
Vậy, với $x > 3$ thì y nhận giá trị dương.

b. Để y nhận giá trị nhỏ hơn 3 điều kiện là: $2x - 6 < 3 \Leftrightarrow 2x < 9 \Leftrightarrow x < \frac{9}{2}.$

Vậy, với $x < \frac{9}{2}$ thì y nhận giá nhỏ hơn 3.

Bài tập 8.

a. Để y nhận giá trị âm điều kiện là: $6 - 5x < 0 \Leftrightarrow 5x > 6 \Leftrightarrow x > \frac{6}{5}.$

Vậy, với $x > \frac{6}{5}$ thì y nhận giá trị âm.

b. Để y nhận giá trị lớn hơn 1 điều kiện là: $6 - 5x > 1 \Leftrightarrow 5x < 5 \Leftrightarrow x < 1.$
Vậy, với $x < 1$ thì y nhận giá trị lớn hơn 1.

Bài tập 9.

a. Ta có: $f(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = 6.$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}.$$

b. Ta có: $f(a) = 2a^2 - 3a + 1$

$g(a) = a^2 - 1.$

Suy ra: $f(a) = g(a) \Leftrightarrow 2a^2 - 3a + 1 = a^2 - 1 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a - a + 2 = 0 \Leftrightarrow a(a-2) - (a-2) = 0$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, với $a = 2$ hoặc $a = 1$ thì $f(a) = g(a)$.

Bài toán 2 TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Để tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$, ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1. Tìm tập D của x để f(x) có nghĩa, tức là tìm: $D = \{x \in R \mid f(x) \in R\}$

Phương pháp 2. Tìm tập E của x để f(x) không có nghĩa, khi đó tập xác định của hàm số là $D = R \setminus E$.

Chú ý: Thông thường f(x) cho bởi biểu thức đại số thì:

1. Với $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ điều kiện là : $\begin{cases} f_1(x), f_2(x) \text{ có nghĩa} \\ f_2(x) \neq 0 \end{cases}$.

2. Với $f(x) = \sqrt[2k]{f_1(x)}$ $(k \in Z)$ điều kiện là : $\begin{cases} f_1(x) \text{ có nghĩa} \\ f_1(x) \geq 0 \end{cases}$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. b. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$. c. $y = \dfrac{x}{x^2 - 2x}$.

Giải

a. Hàm số xác định khi: $x^2 + 1 \neq 0$ luôn đúng.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}$.

b. Hàm số xác định khi: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

c. Hàm số xác định khi: $x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$.

Nhận xét: 1. Các hàm số trong câu a), b), c) đều có tử số luôn có nghĩa, do đó chỉ cần thiết lập điều kiện cho MS $\neq 0$.

2. Trong câu c), nếu các em học sinh biến đổi hàm số về dạng: $y = \dfrac{1}{x - 2}$.

rồi khẳng định hàm số xác định khi : $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

và do đó tập $D = \mathbf{R}\backslash\{2\}$. Đây là lời giải sai vì phép biến đổi hàm số không phải là phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{2 - x}$. b. $y = \sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x}$.

Giải

a. Hàm số xác định khi: $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, 2]$.

b. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} 3 + x \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6.$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-3, 6]$.

Nhận xét: Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ việc tìm tập xác định của hàm số có chứa căn bậc hai dạng đơn giản (gồm việc giải các bất phương trình bậc nhất). Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ cho các biểu thức phức tạp hơn, và ở đây chúng ta cần sử dụng:

- Tính chất : $A.B \geq 0 \Leftrightarrow$ A, B cùng dấu.

  $A.B \leq 0 \Leftrightarrow$ A, B trái dấu.
- Hoặc lập bảng xét dấu.

Ví dụ 3: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$. b. $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Giải

a. Hàm số xác định khi: $-x^2 + 4x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 3 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [1, 3]$.

b. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x - 1)(x - 2) \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array}\right..$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-1, 1] \cup [2, +\infty)$.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên, để giải các bất phương trình bậc hai chúng ta sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử và vận dụng các điều kiện để $A.B \geq 0$, $A.B \leq 0$. Các em học sinh hãy kiểm tra lại kết quả đó bằng việc lập bảng xét dấu.

Ví dụ 4: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{|x| - 4}$. b. $y = \sqrt{x + 3 + 2\sqrt{x+2}} + \sqrt{2 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}}$.

Giải

a. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x \geq 0 \\ |x| - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 4$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [0, +\infty) \backslash \{4\}$.

b. Biến đổi tương đương hàm số về dạng:

$$y = \sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+2} + 1} + \sqrt{1 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2} + 1}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x+2} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{1 - x^2} + 1)^2}$$

$$= |\sqrt{x+2} + 1| + |\sqrt{1-x^2} + 1| = \sqrt{x+2} + \sqrt{1-x^2} + 2.$$

Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 + x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - x \leq 0 \\ 1 + x \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-1, 1]$.

Nhận xét: Như vậy:

1. Trong lời giải của câu a), ngoài điều kiện để MS $\neq 0$ chúng ta còn cần tới điều kiện để $\sqrt{x}$ có nghĩa. Và trong hệ bất phương

trình điều kiện, sơ dĩ ta có biến đổi $|x| - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x - 4 \neq 0$ là do điều kiện ở trên ta có $x \geq 0$.

2. Trong lời giải của câu a), với các em học sinh chưa có kinh nghiệm sẽ thiết lập ngay điều kiện có nghĩa là:

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \\ x + 3 + 2\sqrt{x+2} \geq 0 \\ 2 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \geq 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 5: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$. b. $y = \dfrac{\sqrt{4 - x}}{(x - 3)\sqrt{x - 1}}$.

Giải

a. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-3)(x+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, 3)$.

b. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x - 3 \neq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \neq 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 4 \\ x \neq 3 \end{cases}.$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (1, 4] \setminus \{3\}$.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên, đối với các biểu thức $x^2 - 9$ và $x - 1$ ngoài điều kiện để nó có nghĩa trong căn bậc hai chúng ta còn ghép thêm điều kiện để nó có nghĩa khi là mẫu của một hàm phân thức, do đó phải thiết lập $x^2 - 9 > 0$ và $x - 1 > 0$.

Ví dụ 6: Cho hàm số: $y = \dfrac{x + 1}{x - m + 2}$. Tìm m để hàm số xác định trên $[-1, 1)$.

Giải

Hàm số xác định khi: $x - m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m - 2$.

Do đó tập xác định của hàm số là $D = R\setminus\{m - 2\}$.

Để hàm số xác định trên $[-1, 1)$ điều kiện là:

$$m - 2 \notin [-1, 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 2 < -1 \\ m - 2 \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$$

Vậy, với $m < 1$ hoặc $m \geq 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 7: Cho hàm số: $y=\dfrac{x+1}{x^2-2(m-1)x+m^2-2m}$.

Tìm m để hàm số xác định trên (0, 1).

Giải

Hàm số xác định khi:

$$x^2-2(m-1)x+m^2-2m \neq 0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2+2x-2m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)(x-m+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-m \neq 0 \\ x-m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ x \neq m-2 \end{cases}.$$

Do đó tập xác định của hàm số là $D = R\backslash\{m-2, m\}$.

Để hàm số xác định trên (0, 1) điều kiện là:

$$m-2, m \notin (0, 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m-2 \geq 1 \\ m-2 \leq 0 < 1 \leq m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \geq 3 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m \leq 2$ hoặc $m \geq 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên, để $m-2, m \notin (0, 1)$ ta xác định được ba trường hợp là do đánh giá được $m-2 < m$ với mọi m, từ đó thiết lập:

- Hai điểm $m-2$ và m nằm bên trái (0, 1) và trong trường hợp này chỉ cần $m \leq 0$.
- Hai điểm $m-2$ và m nằm bên phải (0, 1) và trong trường hợp này chỉ cần $m-2 \geq 0$.
- Điểm $m-2$ nằm bên trái (0, 1) và điểm m nằm bên phải (0, 1) vì khoảng cách giữa hai điểm $m-2$ và m bằng 2 đơn vị.

Ví dụ 8: Cho hàm số: $y = \sqrt{-x+2m-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x-m+2}}$.

Tìm m để hàm số xác định trên (0, 1].

Giải

Hàm số xác định khi: $\begin{cases} -x+2m-1 \geq 0 \\ x-m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2m-1 \\ x > m-2 \end{cases} \Leftrightarrow m-2 < x \leq 2m-1.$

Do đó tập xác định của hàm số là $D = (m-2, 2m-1]$.

Để hàm số xác định trên (0, 1] điều kiện là:

$$(0, 1] \subseteq (m-2, 2m-1] \Leftrightarrow m-2 \leq 0 < 1 \leq 2m-1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

Vậy, với $1 \leq m \leq 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

b. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - x + 3}$.

Bài tập 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x - 1}{2x - 6}$.

b. $y = \dfrac{2x + 1}{2x^2 - x - 1}$.

Bài tập 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x + 2}$.

b. $y = \sqrt{2 - x} + \sqrt{7 + x}$.

Bài tập 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$.

b. $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Bài tập 5. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{1 - x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

b. $y = \dfrac{\sqrt{5 - 2x}}{(x - 2)\sqrt{x - 1}}$.

Bài tập 6. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x|x| - 1}}$.

b. $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt[3]{x + 1}}$.

Bài tập 7. Cho hàm số: $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$.

a. Tìm tập xác định của hàm số.

b. Tính $f(4 + 2\sqrt{3})$, $f(a^2)$ với $a < -2$.

c. Tìm x để $f(x) = \sqrt{3}$.

d. Tìm x để $f(x) = f(x^2)$.

Bài tập 8. Tìm m để hàm số sau xác định trên $[0, 1)$: $y = \dfrac{x + 1}{x - 2m + 1}$.

Bài tập 9. Tìm m để hàm số sau xác định trên $(1, 3)$:

$$y = \sqrt{-x + 2m - 1} - \frac{1}{\sqrt{2x - m}}.$$

IV. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Hàm số xác định khi: $x^2 + 1 \neq 0$, luôn đúng.
Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b. Hàm số xác định khi: $x^2 - x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \neq 0$, luôn đúng.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}$.

Bài tập 2.

a. Hàm số xác định khi: $2x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}\backslash\{3\}$.

b. Hàm số xác định khi: $2x^2 - x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + x - 1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ 2x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}\backslash\{1, -\frac{1}{2}\}$.

Bài tập 3.

a. Hàm số xác định khi: $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-2, +\infty)$.

b. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 7 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 2$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-7, 2]$.

Bài tập 4.

a. Hàm số xác định khi: $-x^2 + 5x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [2, 3]$.

b. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x^2 - x + 1 \geq 0 \\ x + \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x < 0 \\ \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x \leq 0 \end{array}\right., \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $\mathbf{R}$.

Bài tập 5.

a. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ (x-2)(x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, -2)$.

b. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5/2 \\ x \neq 2 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq \dfrac{5}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (1, \frac{5}{2}] \setminus \{2\}$.

Bài tập 6.

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x|x|-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x.x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)(x+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (1, +\infty)$.

b. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) \leq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-2, 2] \setminus \{-1\}$.

Bài tập 7.

a. Hàm số xác định khi: $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 1.$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

b. Ta có: $f(4 + 2\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-1}k = \dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}+1}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1+1}{\sqrt{3}+1-1} = \dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}$.

$$f(a^2) = \frac{\sqrt{a^2}+1}{\sqrt{a^2}-1} = \frac{|a|+1}{|a|-1} \overset{a<-2}{=} \frac{-a+1}{-a-1} = \frac{a-1}{a+1}.$$

c. Để $f(x) = \sqrt{3}$, điều kiện là: $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \sqrt{3}.\sqrt{x} - \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}-1)\sqrt{x} = \sqrt{3}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow x = \frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}.$$

d. Để $f(x) = f(x^2)$, điều kiện là: $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{x+1}$

$$\Leftrightarrow x + 1 = (\sqrt{x}-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bài tập 8. Hàm số có nghĩa khi: $x - 2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2m - 1$.

Để hàm số xác định trên $[0, 1)$ điều kiện là:

$$2m-1 \notin [0, 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m-1<0 \\ 2m-1 \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{array}\right..$$

Bài tập 9. Hàm số có nghĩa khi: $\begin{cases} -x+2m-1 \geq 0 \\ 2x-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2m-1 \\ x>\dfrac{m}{2} \end{cases}$.

Để hàm số xác định trên (1, 3) điều kiện là:

$$\frac{m}{2} \leq 1<3 \leq 2m-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Bài toán 3 XÉT TÍNH CHẤT BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Để xét tính chất biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trong (a, b), ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa.

Phương pháp 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy $x_1, x_2 \in (a, b)$ với $x_1 \neq x_2$ ta thiết lập tỉ số: $A=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $A > 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$ và $x_1 \neq x_2$ thì hàm số đồng biến trong (a, b).
- Nếu $A < 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$ và $x_1 \neq x_2$ thì hàm số nghịch biến trong (a, b).

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

<u>Ví dụ 1:</u> Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = x - 2$.

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Hàm số xác định trong **R**.

Cho x các giá trị thực bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét: $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - 2) - (x_2 - 2) = x_1 - x_2 < 0$

$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

Cách 2: Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có: $A = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{(x_1 - 2) - (x_2 - 2)}{x_1 - x_2} = 1 > 0.$

Vậy, hàm số đồng biến trên **R**.

Tổng quát: Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = ax + b$, với $a \neq 0$.

Giải

Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = a.$$

Khi đó:

- Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên **R**.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên **R**.

Ví dụ 2: Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = x^2$.

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Hàm số xác định trong **R**.

Cho x các giá trị thực bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét: $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$.

Khi đó:

- Nếu $x_1, x_2 > 0$ (tức là $x \in (0, +\infty)$) thì : $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$

  $\Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

  $\Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong $(0, +\infty)$.

- Nếu $x_1, x_2 < 0$ (tức là $x \in (-\infty, 0)$) thì: $x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$

  $\Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

  $\Leftrightarrow$ hàm số nghịch biến trong $(-\infty, 0)$.

Cách 2: Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có: $A = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$.

Khi đó:

- Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.
- Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.

Tổng quát: Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = ax^2$, với $a \neq 0$.

Giải

Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1^2 - ax_2^2}{x_1 - x_2} = a(x_1 + x_2).$$

Khi đó:

1. Với $a > 0$
   - Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.
   - Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.
2. Với $a < 0$
   - Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0, +\infty)$
   - Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(-\infty, 0)$.

Ví dụ 3: Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = -x^3$.

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Hàm số xác định trong **R**.

Cho x các giá trị thực bất kì x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = (-x_1^3) - (-x_2^3) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) > 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số nghịch biến trong tập xác định của nó.

Cách 2: Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-x_1^3) - (-x_2^3)}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 - x_2}$$

$$= -\frac{(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{x_1 - x_2} = -(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) < 0.$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên **R**.

Tổng quát: Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = ax^3$, với $a \neq 0$.

Giải

Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1^3 - ax_2^3}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{x_1 - x_2} = a(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2).$$

Khi đó:

- Nếu a > 0 thì hàm số đồng biến trên **R**.
- Nếu a < 0 thì hàm số nghịch biến trên **R**.

Ví dụ 4: Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ trong $(0, +\infty)$.

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Cho x các giá trị thực bất kì $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$) ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1} = \frac{(\sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1})(\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1})}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}}$$

$$= \frac{(x_1^2 + 1) - (x_2^2 + 1)}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} < 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

Cách 2: Với $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1^2 + 1) - (x_2^2 + 1)}{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1})} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} > 0$$

Vậy, hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.

Chú ý: Trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng điều kiện $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ để nhận được kết quả $x_1 + x_2 > 0$.

Ví dụ 5: Xét sự biến thiên của hàm số: $y = f(x) = \frac{x}{x - 1}$ trong $(1, +\infty)$.

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Cho x các giá trị thực bất kì $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1 - 1} - \frac{x_2}{x_2 - 1} = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} > 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số nghịch biến trong $(1, +\infty)$.

Cách 2: Với $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{x_1}{x_1 - 1} - \dfrac{x_2}{x_2 - 1}}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0.$$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(1, +\infty)$.

Chú ý: Trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng điều kiện $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ để nhận được kết quả $x_1 - 1 > 0$, $x_2 - 1 > 0$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = 2x + 3$.

b. $y = f(x) = 1 - 3x$.

c. $y = f(x) = (m^2 + 1)x - 2$.

d. $y = f(x) = mx + 4$, với $m \neq 0$.

Bài tập 2. Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = 2x^2$ trong $(0, +\infty)$.

b. $y = f(x) = -6x^2$ trong $(0, +\infty)$.

c. $y = f(x) = x^2 + 2x + 3$.

d. $y = f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

Bài tập 3. Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ trong $(1, +\infty)$.

b. $y = f(x) = \dfrac{x}{2x + 3}$ trong $(-\infty, -2)$.

Bài tập 4. Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = \sqrt{x - 1}$.

b. $y = f(x) = \sqrt{2 - x}$.

Bài tập 5. Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 3n}$ trong $(0, +\infty)$.

b. $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ trong $(-\infty, -2)$.

Bài tập 6. Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. $y = f(x) = 3x^3$.

b. $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$.

c. $y = f(x) = x^3 + x + 1$.

d. $y = f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$.

IV. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Hàm số đồng biến trên **R**.

b. Hàm số nghịch biến trên **R**.

c. Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in$ **R** và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{[(m^2+1)x_1 - 2] - [(m^2+1)x_2 - 2]}{x_1 - x_2} = \frac{(m^2+1)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$= m^2 + 1 > 0$. Vậy, hàm số đồng biến trên **R**.

d. Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có: $A = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{(mx_1 + 4) - (mx_2 + 4)}{x_1 - x_2} = m.$

Khi đó:

- Nếu $m > 0$ thì hàm số đồng biến trên **R**.
- Nếu $m < 0$ thì hàm số nghịch biến trên **R**.

Bài tập 2.

a. Hàm số đồng biến trong $(0, +\infty)$.

b. Hàm số nghịch biến trong $(0, +\infty)$.

c. Hàm số đồng biến trên $(-1, +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty, -1)$.

d. Hàm số đồng biến trên $(-\infty, 2)$ và nghịch biến trên $(2, +\infty)$.

Bài tập 3.

a. Hàm số nghịch biến trên trong $(1, +\infty)$.

b. Hàm số đồng biến trên trong $(-\infty, -2)$.

Bài tập 4.

a. Hàm số có nghĩa khi: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [1, +\infty)$.

Cho x các giá trị thực bất kì $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$ (ta được $x_1 - x_2 < 0$), ta đi so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$ bằng cách xét:

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{x_2 - 1} = \frac{(\sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{x_2 - 1})(\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1})}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}}$$

$$= \frac{(x_1 - 1) - (x_2 - 1)}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}} < 0$$

$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$ hàm số đồng biến trong tập xác định của nó.

b. Hàm số có nghĩa khi: $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, 2]$.

Với $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{2 - x_1} - \sqrt{2 - x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{(\sqrt{2 - x_1} - \sqrt{2 - x_2})(\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2})}{(x_1 - x_2)((\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2}))}$$

$$= \frac{(2 - x_1) - (2 - x_2)}{(x_1 - x_2)(\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2})} = -\frac{1}{\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2}} < 0$$

Vậy, hàm số nghịch biến trong tập xác định của nó.

Bài tập 5.

a. Hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.

b. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty, -2)$.

Bài tập 6.

a. Hàm số đồng biến trên **R**.

b. Hàm số đồng biến trên **R**.

c. Hàm số đồng biến trên **R**.

d. Hàm số xác định trong **R**.

Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^3 - 3x_1^2 + 6x_1 + 1) - (x_2^3 - 3x_2^2 + 6x_2 + 1)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(x_1^3 - x_2^3) - 3(x_1^2 - x_2^2) + 6(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3(x_1 + x_2) + 6$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - 3(x_1 + x_2) + 6$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 - 6(x_1 + x_2) + 9] + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 3)^2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{3}{2} > 0.$$

Vậy hàm số đồng biến trên R.

CHỦ ĐỀ 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT
ĐỊNH NGHĨA – TÍNH CHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Để xây dựng định nghĩa hàm số, chúng ta sẽ bắt đầu với bài toán sau:

Bài toán: Một ôtô từ Hải Phòng đi Hà Nội với vận tốc 60km/h. Ôtô khởi hành ở một địa điểm cách Hải Phòng 8km về phía Hà Nội. Hỏi sau x giờ, ôtô cách Hải Phòng bao nhiêu kilômet ?

Giải

Gọi y là khoảng cách từ ôtô tới Hải Phòng sau x giờ.

Ta có: $y = 60x + 8$.

Như vậy, ta được một tương quan hàm số $y = 60x + 8$, trong đó x là biến số, y là hàm số. Và biểu thức mô tả hàm số này là bậc nhất đối với biến x nên ta gọi đó là *hàm số bậc nhất*.

Từ đó, ta có định nghĩa:

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức: $y = ax + b$, với $a \neq 0$, trong đó a và b là các số thực xác định.

Thí dụ 1: Với các hàm số:

- $y = 3x - 2$ là một hàm số bậc nhất.
- $y = -6x$ là một hàm số bậc nhất.
- $y = (m - 1)x - 5$ là một hàm số bậc nhất khi $m \neq 1$.
- $y = x^2 + x + 1$ không phải là một hàm số bậc nhất.

Chú ý: Nếu $b = 0$, hàm số có dạng $y = ax$ là hàm số biểu thị sự tương quan tỉ lệ thuận.

2. TÍNH CHẤT

- Hàm số $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị $x \in \mathbf{R}$.
- Trong tập xác định **R**, hàm số $y = ax + b$
  - Đồng biến nếu $a > 0$.
  - Nghịch biến nếu $a < 0$.

Thí dụ 2: Cho hàm số: $y = mx - m^2 - x + 1$.

a. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Tìm m để hàm số nghịch biến trên **R**.

c. Tìm m để đồ thị hàm số đi qua gốc toạ độ.

Giải

Viết lại hàm số dưới dạng: $y = (m - 1)x - m^2 + 1$.

a. Hàm số trên là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi: $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Vậy, với $m \neq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Hàm số trên nghịch biến trên **R** khi và chỉ khi: $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Vậy, với $m < 1$ hàm số nghịch biến trên **R**.

c. Ta biết gốc toạ độ $O(0, 0)$, do đó đồ thị hàm số đi qua gốc toạ độ khi

$$0 = (m - 1).0 - m^2 + 1 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy, với $m = \pm 1$ đồ thị hàm số đi qua gốc toạ độ.

Chú ý: Trong lời giải câu c), khi $m = 1$ hàm số không còn là hàm số bậc nhất.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hàm số : $y = 3x - 2$.

a. Tìm tập xác định của hàm số.

b. Xét tính biến thiên của hàm số trong tập xác định của nó.

Giải

a. Hàm số xác định trong **R**.

b. Vì $a = 3 > 0$ nên hàm số đồng biến trong **R**.

Ví dụ 2: Cho hàm số: $y = mx - \sqrt{1-m}$.

a. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Tìm m để hàm số đồng biến trên **R**.

Giải

a. Hàm số trên là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m \leq 1. \qquad (*)$$

Vậy, với $0 \neq m \leq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Hàm số trên đồng biến trên **R** khi: $m > 0$.

Kết hợp với điều kiện (*), ta được $0 < m \leq 1$.

Vậy, với $0 < m \leq 1$ hàm số đồng biến trên **R**.

Nhận xét: Trong lời giải trên:

- Ở câu a), nhiều em học sinh mắc sai lầm khi chỉ thiết lập điều kiện $m \neq 0$.
- Ở câu b), nhiều em học sinh mắc sai lầm khi thiết lập điều kiện $m > 0$ nhưng lại không kết hợp với (*).

Ví dụ 3: Cho hàm số: $y = f(x) = ax$, với $a \neq 0$.

a. Chứng minh rằng $f(kx_1) = kf(x_1)$ và $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

b. Các hệ thức trong câu a) còn đúng với hàm số:

$$y = g(x) = ax + b, \text{ với } b \neq 0 \text{ hay không ?}$$

Giải

a. Ta có: $f(kx_1) = a(kx_1) = akx_1 = k(ax_1) = kf(x_1)$, đpcm.

$f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$, đpcm.

b. Ta lần lượt xét:

- Với hệ thức: $g(kx_1) = kg(x_1) \Leftrightarrow a(kx_1) + b = k(ax_1 + b)$

$$\Leftrightarrow akx_1 + b = akx_1 + bk \Leftrightarrow b(k-1) = 0 \overset{b \neq 0}{\Leftrightarrow} k = 1.$$

Vậy, hệ thức $g(kx_1) = kg(x_1)$ chỉ đúng với $k = 0$.

- Với hệ thức: $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2) \Leftrightarrow a(x_1 + x_2) + b = (ax_1 + b) + (ax_2 + b)$

$$\Leftrightarrow ax_1 + ax_2 + b = ax_1 + ax_2 + 2b \Leftrightarrow b = 0, \text{ loại.}$$

Vậy, hệ thức $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$ không đúng.

Ví dụ 4: Cho hai hàm số: $f(x) = (m^2 + 1)x - 4$ và $g(x) = mx + 2$, với $m \neq 0$.

Chứng minh rằng:

a. Các hàm số $f(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ là các hàm đồng biến.

b. Hàm số $g(x) - f(x)$ là hàm nghịch biến.

Giải

a. Ta lần lượt xét:

- Hàm số $f(x)$ có hệ số $a = m^2 + 1 > 0$ do đó nó là hàm đồng biến.
- Hàm số: $f(x) + g(x) = (m^2 + 1)x - 4 + mx + 2 = (m^2 + m + 1)x - 2$.

  có hệ số: $a = m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

  do đó nó là hàm đồng biến.
- Hàm số: $f(x) - g(x) = (m^2 + 1)x - 4 - (mx + 2) = (m^2 - m + 1)x - 6$.

  có hệ số: $a = m^2 - m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

  do đó nó là hàm đồng biến.

b. Hàm số: $g(x) - f(x) = mx + 2 - [(m^2 + 1)x - 4] = -(m^2 - m + 1)x + 6$.

có hệ số: $a = -(m^2 - m + 1) = -\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] < 0$

do đó nó là hàm nghịch biến.

Ví dụ 5: Cho hàm số: $y = f(x) = ax + b$, với $a \neq 0$.

a. Chứng minh rằng với một giá trị x_0 tuỳ ý cho trước, bao giờ cũng tìn được hai số m và n sao cho $f(m) < f(x_0) < f(n)$.

b. Chứng minh rằng hàm số bậc nhất không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhít.

Giải

a. Ta biết rằng với mỗi x_0 tuỳ ý cho trước, bao giờ cũng có: $x_0 - 1 < x_0 < x_0 + 1$.

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp1: Với $a > 0$, khi đó hàm số đồng biến, do đó: $f(x_0 - 1) < f(x_0) < f(x_0 + 1)$

từ đó, ta chọn $m = x_0 - 1$ và $n = x_0 + 1$.

Trường hợp 2: Với $a < 0$, khi đó hàm số nghịch biến, do đó:

$f(x_0 - 1) > f(x_0) > f(x_0 + 1)$ từ đó, ta chọn $m = x_0 + 1$ và $n = x_0 - 1$.

b. Giả sử trái lại hàm số có:

- Giá trị lớn nhất $f(x_1)$ ứng với x_1.
- Giá trị nhỏ nhất $f(x_2)$ ứng với x_2.

Theo kết quả câu a), luôn tìm được hai số m và n sao cho:

$f(x_1) < f(n) \Rightarrow f(x_1)$ không phải là giá trị lớn nhất.

$f(x_2) > f(m) \Rightarrow f(x_2)$ không phải là giá trị nhỏ nhất.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu định nghĩa hàm số bậc nhất và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Nêu các tính chất của hàm số bậc nhất. Cho ví dụ về một hàm số bậc nhất đồng biến và một hàm số bậc nhất nghịch biến.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng trong tập xác định **R**, hàm số $y = ax + b$ đồng biến nếu $a > 0$ và nghịch biến nếu $a < 0$.

Câu hỏi 4: Chứng minh rằng hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) không có giá trị lớn nhat và nhỏ nhất.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Một ôtô vận tốc 50km/h khởi hành từ bến xe phía Nam cách Hà Nội 5km và đi về phía Nghệ An (bến xe nằm trên đường Hà Nội - Nghệ An). Hỏi sau khi khởi hành x giờ, xe cách Hà Nội bao nhiêu ?

Bài tập 2. Cho các hàm số:

a. $y = 5x + \sqrt{3}$.

b. $y = 2 - \sqrt[3]{5}\,x$.

c. $y = -\dfrac{1}{2}x + 6$.

d. $y = 3(x - 2) + x$.

e. $y = -\dfrac{1}{x} + 3$.

f. $y = 2\sqrt{x} + 8$.

Trong các hàm số trên hàm số nào là hàm số bậc nhất? Xét sự biến thiên của các hàm sô bậc nhất đó.

Bài tập 3. Cho hàm số: $y = (m - 1)x + \sqrt{m}$.

a. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Tìm m để hàm số nghịch biến trên **R**.

Bài tập 4. Tìm m để các hàm số sau là hàm số bậc nhất:

a. $y = mx + 6$.

b. $y = m^2x + \sqrt{3} - x$.

c. $y = mx + \sqrt{m+2}$.

d. $y = (m^2 - m)x^2 + mx + 8$.

Bài tập 5. Cho hai hàm số: $f(x) = (m^2 + 5)x - 3$ và $g(x) = 2mx + 1$, với $m \neq 0$.

Chứng minh rằng:

a. Các hàm số $f(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ là các hàm đồng biến.

b. Hàm số $g(x) - f(x)$ là hàm nghịch biến.

Bài tập 6. Cho hàm số : $y = (m - 1)x + 2m - 3$.

a. Tìm m để hàm số là đồng biến, nghịch biến, không đổi.

b. Chứng tỏ rằng khi m thay đổi đồ thị hàm số luôn đi qua 1 điểm cố định.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Gọi y là khoảng cách từ ôtô tới Hà Nội sau x giờ. Ta có: $y = 50x + 5$.

Bài tập 2.

a. Hàm số $y = 5x + \sqrt{3}$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = 5 > 0$ nên nó là hàm số đồng biến.

b. Hàm số $y = 2 - \sqrt[3]{5}\,x$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = -\sqrt[3]{5} < 0$ nên nó là hàm số nghịch biến.

c. Hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x + 6$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = -\dfrac{1}{2} < 0$ nên nó là hàm số nghịch biến.

d. Hàm số $y = 3(x - 2) + x = 4x - 6$ là hàm số bậc nhất và vì nó có $a = 4 > 0$ nên nó là hàm số đồng biến.

e. Không là hàm số bậc nhất. f. Không là hàm số bậc nhất.

Bài tập 3.

a. Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \neq 1. \qquad (*)$$

Vậy, với $0 \leq m \neq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. Hàm số đã cho nghịch biến trên **R** khi: $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Kết hợp với điều kiện (*), ta được $0 \leq m < 1$.

Vậy, với $0 \leq m < 1$ hàm số nghịch biến trên **R**.

Bài tập 4.

a. $m \neq 0$. b. $m \neq \pm 1$. c. $-2 \leq m \neq 0$.

d. Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2 - m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m - 1) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right. \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

Bài tập 5. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 6.

a. Ta có:

- Hàm số là đồng biến khi và chỉ khi: $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.
- Hàm số là nghịch biến khi và chỉ khi: $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.
- Hàm số là hàm hằng khi và chỉ khi: $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

b. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua, khi đó:

$y_0 = (m - 1)x_0 + 2m - 3$, với $\forall m \Leftrightarrow (x_0 + 2)m - x_0 - y_0 - 3 = 0$, với $\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ x_0 + y_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -1 \end{cases}.$$

Vậy, đồ thị hàm số luôn đi qua điểm cố định $M(-2, -1)$.

CHỦ ĐỀ 3 ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax, a \neq 0$

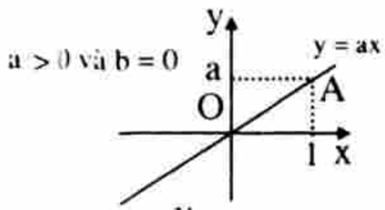
Ở lớp 7, chúng ta đã biết đến kết quả:

Đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng đi qua gốc độ và điểm $A(1, a)$.

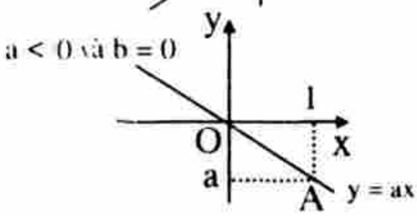
Như vậy, để vẽ đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$), ta thực hiện:

- Xác định vị trí điểm $A(1, a)$.
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số $y = ax$.

Ta có minh hoạ:



Đường thẳng $y = ax$ nằm trong góc phần tư (I) và phần tư (III)



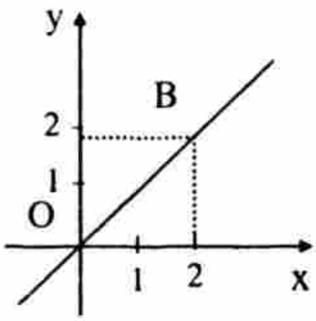
Đường thẳng $y = ax$ nằm trong góc phần tư (II) và phần tư (IV)

Thí dụ 1: Vẽ đồ thị hàm số $y = x$.

Giải

Để vẽ đồ thị hàm số $y = x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm $A(1, 1)$ (hoặc có thể $B(2, 2)$).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số $y = x$.



Nhận xét: 1. Đồ thị hàm số $y = x$ chính là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III.

2. Đồ thị hàm số $y = -x$ chính là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax + b, a \neq 0$

Chúng ta sẽ bắt đầu với thí dụ sau:

Thí dụ 2: Cho các hàm số: $y = f(x) = 2x$, $y = g(x) = 2x - 1$, $y = h(x) = 2x + 2$.

a. Với $x = -2; 0; 1; 2; 3$ hãy tính các giá trị tương ứng $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$.

b. Có nhận xét gì về giá trị của các hàm số f(x), g(x), h(x) ứng với cùng một giá trị của biến số x, từ đó đưa ra kết luận về đồ thị các hàm số y = g(x) và y = h(x).

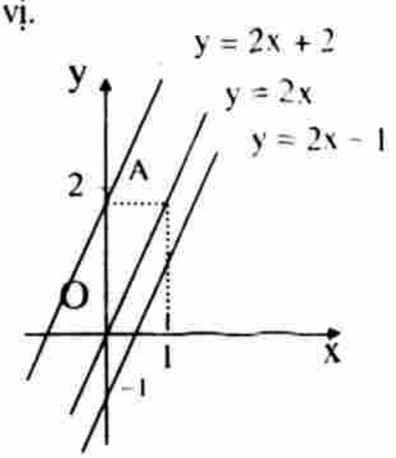
Giải

a. Ta lập bảng:

x	−2	0	1	2	3
f(x)	−4	0	2	4	6
g(x)	−5	−1	1	3	5
h(x)	−2	2	4	6	8

b. Từ bảng, ta nhận thấy với bất kì hoành độ nào thì

- Tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số y = 2x − 1 cũng nhỏ hơn tung độ tương ứng của điểm trên đường thẳng y = 2x là 1 đơn vị.
- Tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số y = 2x + 2 cũng lớn hơn tung độ tương ứng của điểm trên đường thẳng y = 2x là 2 đơn vị.



Vậy, ta thấy:

- Đồ thị hàm số y = 2x − 1 là một đường thẳng song song với đường thẳng y = 2x và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng −1.
- Đồ thị hàm số y = 2x + 2 là một đường thẳng song song với đường thẳng y = 2x và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Vậy, ta có kết quả:

> ***Đồ thị của hàm số y = ax + b (a ≠ 0) là một đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b. Đường thẳng này***
> – *Song song với đường thẳng* ***y = ax*** *nếu* ***b ≠ 0.***
> – *Trùng với đường thẳng* ***y = ax*** *nếu* ***b = 0.***

Từ kết quả trên ta thấy "*Nếu đã có đồ thị hàm số y = ax* " thì đồ thị hàm số y = ax + b (b ≠ 0) được suy ra bằng cách:

- Xác định vị trí điểm M(0, b).
- Đường thẳng qua M song song với đường thẳng y = ax chính là đồ thị hàm số y = ax + b.

3. CÁCH VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC NHẤT

Vì đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng nên muốn vẽ ta chỉ cần xác định hai điểm phân biệt bất kì trên đường thẳng đó.

Thí dụ 3: Cho hàm số: $y = 2x + 1$.

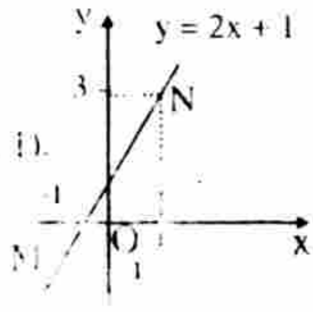
a. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Tìm tung độ giao điểm của trục Oy với đồ thị hàm số.

c. Tìm hoành độ giao điểm của trục Ox với đồ thị hàm số.

Giải

a. Ta lấy hai điểm thuộc đồ thị hàm số là $M(-1, -1)$ và $N(1, 3)$. Khi đó đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua M và N (hình vẽ).



b. Đồ thị cắt trục Oy tại A có: $x = 0 \Rightarrow y = 2.0 + 1 = 1 \Rightarrow A(0, 1)$.

c. Đồ thị cắt trục Ox tại B có:

$y = 0 \Rightarrow 0 = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow B(-\frac{1}{2}, 0)$

Chú ý: Khi vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$, $a \neq 0$

1. Ta nên chọn hai điểm có toạ độ chẵn.

2. Thông thường, ta chọn hai điểm $A(0 ; b)$ và $B(-\frac{b}{a} ; 0)$ theo thứ tự là giao điểm của đồ thị với trục Oy và Ox nếu hai điểm đó không nằm quá xa gốc toạ độ (thí dụ $y = x + 2005$) hoặc toạ độ của chúng không quá phức tạp trong tính toán (thí dụ $y = \sqrt[3]{2}x + \sqrt{89}$).

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hàm số: $y = -\frac{1}{2}x$.

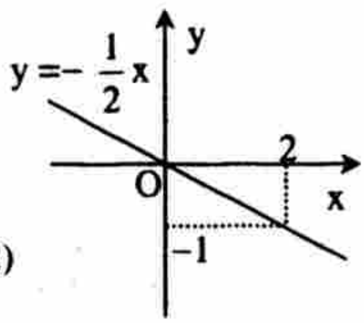
a. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Xác định toạ độ điểm B thuộc đồ thị hàm số sao cho $x_B = 4y_B + 2$.

Giải

a. Ta lấy thêm điểm A có:

$$x = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}.2 = -1.$$



b. B thuộc đồ thị hàm số, suy ra: $y_B = -\frac{1}{2}x_B$ (1)

Thay $x_B = 4y_B + 2$ vào (1), ta được: $y_B = -\frac{1}{2}(4y_B + 2)$

$\Leftrightarrow y_B = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_B = 4(-\frac{1}{3}) + 2 = -\frac{1}{3}$.

Vậy, điểm $B(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 1: Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy đồ thị của các hàm số:

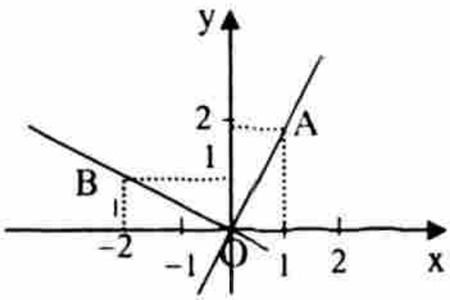
$$y = 2x \text{ và } y = -\frac{1}{2}x.$$

Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này ?

Giải

Để vẽ đồ thị hàm số y = 2x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(1, 2).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số y = 2x.



Để vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm B(− 2, 1).
- Nối O với B ta được đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x$.

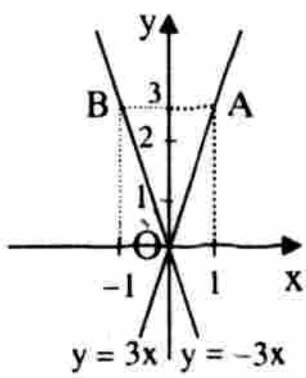
Nhận xét rằng, đồ thị của hai hàm số này vuông góc với nhau.

Ví dụ 2: Vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy đồ thị của các hàm số:

$$y = 3x \text{ và } y = -3x.$$

Có nhận xét gì về đồ thị của hai hàm số này ?

Giải



Để vẽ đồ thị hàm số y = 3x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm A(1, 3).
- Nối O với A ta được đồ thị hàm số y = 3x.

Để vẽ đồ thị hàm số y = −3x, ta thực hiện:

- Xác định thêm một điểm B(−1, 3).
- Nối O với B ta được đồ thị hàm số y = − 3x.

Nhận xét rằng, đồ thị của hai hàm số này đối xứng với nhau qua Oy.

Nhận xét:

1. Ta biết rằng: $|3x| = \begin{cases} 3x & \text{khi } x \geq 0 \\ -3x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

   Do đó, nếu lấy hai phần đồ thị là:
   - Phần đồ thị của hàm số y = 3x trong góc phần tư thứ I.
   - Phần đồ thị của hàm số y = −3x trong góc phần tư thứ II.

   ta nhận được đồ thị của hàm số $y = |3x|$.
2. Từ đó, để vẽ đồ thị hàm số $y = |ax|$ ta thực hiện như sau:
   - Vẽ tia OA, với $A(x_A, ax_A)$, $x_A > 0$.
   - Vẽ tia OB, với $B(-x_A, ax_A)$.

hoặc chỉ cần vẽ tia OA sau đó lấy đối xứng OA qua Oy.

Ví dụ 3: Cho hàm số y = ax. Hãy xác định hệ số a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(3, 2).

b. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

Giải

a. Vì điểm A(3, 2) thuộc đồ thị hàm số nên: $2 = a.3 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$.

Vậy hàm số có dạng $y = \frac{2}{3}x$.

b. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV, ta có ngay a = −1.

Ví dụ 4: Đồ thị của hàm số y = ax nằm ở những góc phần tư nào của mặt phẳng toạ độ Oxy, nếu:

a. a > 0.   b. a < 0.

Giải

a. Với a > 0, ta có nhận xét rằng với điểm $A(x_A, y_A)$ thuộc đồ thị thì:

$y_A = ax_A \Rightarrow x_A$ và y_A cùng dấu

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ I, III.

b. Với a < 0, ta có nhận xét rằng với điểm $A(x_A, y_A)$ thuộc đồ thị thì:

$y_A = ax_A \Rightarrow x_A$ và y_A trái dấu

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số thuộc góc phần tư thứ II, IV.

Ví dụ 5: Cho hàm số: y = −x + 3.

a. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung và trục hoành. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Gọi A và B theo thứ tự là hai giao điểm nói trên. Tính diện tích ΔOAB (O là gốc toạ độ).

c. Gọi α là góc nhọn tạo bởi đồ thị hàm số với trục Ox. Tính tgα, suy ra số đo góc α.

d. Bằng đồ thị tìm x để y > 0, y ≤ 0.

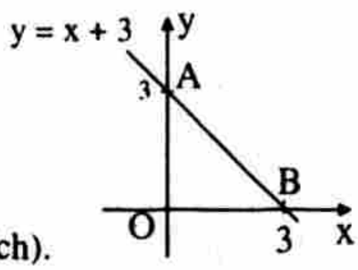
Giải

a. Đồ thị cắt trục Oy tại A có:

$x = 0 \Rightarrow y = -0 + 3 = 3 \Rightarrow A(0, 3)$.

Đồ thị cắt trục Ox tại B có:

$y = 0 \Rightarrow 0 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow B(3, 0)$.



b. Ta có: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.3.3 = \frac{9}{2}$ (đơn vị diện tích).

c. Trong ΔOAB, ta có $\widehat{ABO} = \alpha$, suy ra: $tg\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0$.

d. Từ đồ thị suy ra:

- $y > 0 \Leftrightarrow x < 3$, ứng với phhần đồ thị phía trên trục Ox.
- $y \le 0 \Leftrightarrow x \ge 3$, ứng với phhần đồ thị phía dưới trục Ox.

Ví dụ 6: Cho các hàm số: $y = 2x - 1$, $y = 2 - x$, $y = 3 - 2x$.

a. Vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục toạ độ.

b. Có nhận xét gì về đồ thị của các hàm số này ?

Giải

a. Ta lần lượt vẽ:

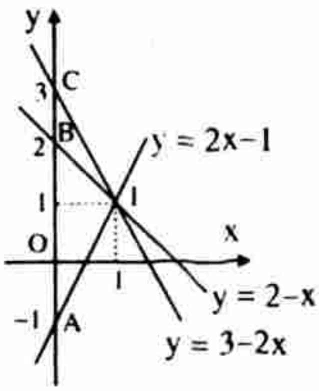
- Với đồ thị $y = 2x - 1$ lấy hai điểm $A(0, -1)$ và $A_0(\frac{1}{2}, 0)$.

  Nối A và A_0 được đồ thị cần dựng.

- Với đồ thị $y = 2 - x$ lấy hai điểm $B(0, 2)$ và $B_0(2, 0)$. Nối B và B_0 được đồ thị cần dựng.

- Với đồ thị $y = 3 - 2x$ lấy hai điểm $C(0, 3)$ và $C_0(\frac{3}{2}, 0)$.

  Nối C và C_0 được đồ thị cần dựng.



b. Đồ thị của các hàm số này đồng quy tại điểm I(1, 1).

Ví dụ 7: Cho hàm số: $y = ax - 3a$.

a. Xác định giá trị của a để đồ thị hàm số đi qua điểm A(0, 4). Vẽ đồ thị hàm số với a vừa tìm được.

b. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng tìm được trong a).

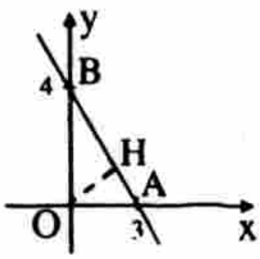
Giải

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(0, 4) khi và chỉ khi:

$$4 = a.0 - 3a \Leftrightarrow 3a = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}.$$

Vậy, hàm số có dạng $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

Để vẽ đồ thị hàm số ta lấy thêm điểm B(3, 0).



b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng.

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

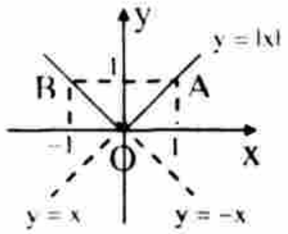
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}] \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{4.3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}.$$

Vậy, khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng bằng $\frac{12}{5}$.

Ví dụ 8: Vẽ đồ thị các hàm số sau:

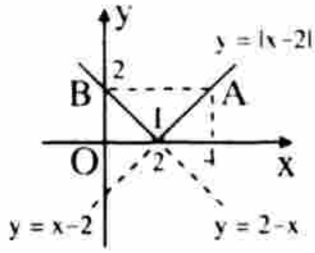
a. $y = |x|$. b. $y = |x - 2|$. c. $y = |x - 1| + 2$.

Giải



a. Ta biến đổi: $y = |x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \ge 0 \\ -x \text{ nếu } x \le 0 \end{cases}$.

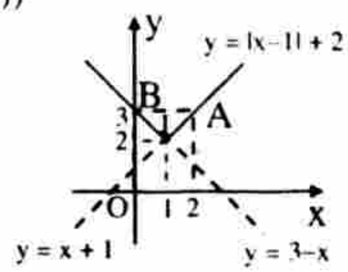
Do đó, đồ thị hàm số là hai tia OA (với A(1, 1)) và OB (với B(−1, 1)).



b. Ta biến đổi: $y = |x - 2|$

$$= \begin{cases} x - 2 & \text{nếu } x \ge 2 \\ -(x-2) & \text{nếu } x \le 2 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 & \text{nếu } x \ge 2 \\ 2 - x & \text{nếu } x \le 2 \end{cases}$$

Do đó, đồ thị hàm số là hai tia IA (với I(2, 0) và A(4, 2)) và IB (với B(0, 2)).



c. Ta biến đổi: $y = |x - 1| + 2$

$$= \begin{cases} x - 1 + 2 & \text{nếu } x \ge 1 \\ -(x-1) + 2 & \text{nếu } x \le 1 \end{cases} = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \ge 1 \\ 3 - x & \text{nếu } x \le 1 \end{cases}$$

Do đó, đồ thị hàm số là hai tia IA (với I(1, 2) và A(2, 3)) và IB (với B(0, 3)).

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Đồ thị hàm số $y = ax$ $(a \ne 0)$ được vẽ như thế nào ?

Câu hỏi 2: Đồ thị của hàm số $y = ax$ nằm ở những góc phần tư nào của mặt phẳng toạ độ Oxy, nếu:

a. $a > 0$. b. $a < 0$.

Câu hỏi 3: Nêu vị trí tương đối của đồ thị hàm số $y = ax + b$ với đồ thị hàm số $y = ax$ $(a \ne 0)$?

Câu hỏi 4: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số bậc nhất.

Câu hỏi 5: Nêu cách vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = |x|$. b. $y = |x - a|$. c. $y = |x| + b$.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = 4x$.

b. $y = x + 3$.

c. $y = -x + 6$.

d. $y = -3x - 3$.

e. $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = ax$. Hãy xác định hệ số a, biết:

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1, 8).

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm B($\frac{3}{4}$, −3).

c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ I, III.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = (2a - 3)x$. Hãy xác định a, để:

a. Hàm số luôn đồng biến ? Nghịch biến ?

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(2, 3).

c. Đồ thị hàm số đi qua điểm B($\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{2}$).

d. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV.

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp b), c), d).

Bài tập 4. Cho hàm số $y = 2ax - 3a$.

a. Xác định a biết rằng đồ thị hàm số trên đi qua điểm M(2; 3)

b. Vẽ đồ thị hàm số tìm được trong a)

c. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng tìm được trong a)

Bài tập 5. Cho hàm số : $y = ax + b$

a. Xác định a và b biết rằng đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng −4 và cắt trục hoành tại điểm có tung độ bằng 1.

b. Vẽ đồ thị hàm số tìm được trong a)

c. Tính diện tích tam giác được tạo bởi đồ thị hàm số trong a) và các trục tọa độ

Bài tập 6. Cho hàm số $y = |a - 1|x$. Hãy xác định a biết :

a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1, 3).

b. Đồ thị hàm số đi qua điểm B ($-\frac{1}{2}$, 8).

Vẽ đồ thị của hàm số trong mỗi trường hợp.

Bài tập 7. Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a. $y = |x|$

b. $y = |2x - 1|$

c. $y = |x| + 2$.

d. $y = \left|\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right|$

e. $y = \left|-\frac{x}{2} + 2\right|$

Bài tập 8. Tìm tập hợp các điểm M(x, y) sao cho :

a. $y < x + 2$

b. $y \le -x + 1$

c. $y \ge -2x + 2$

d. $\begin{cases} y \le x \\ y \le -2x + 4 \\ y \ge -x + 1 \end{cases}$

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Học sinh tự làm.

Bài tập 2. (Học sinh tự vẽ hình)

a. Vì điểm A(1, 8) thuộc đồ thị hàm số nên : $8 = a.1 \Leftrightarrow a = 8$

Vậy hàm số có dạng $y = 8x$

b. Vì điểm B($\frac{3}{4}$, –3) thuộc đồ thị hàm số nên : $-3 = a.\frac{3}{4} \Leftrightarrow a = -4$

Vậy hàm số có dạng $y = -4x$

c. Đồ thị hàm số là đường phân giác của gốc phần tư thứ I, III, ta có ngay a = 1

Bài tập 3. *(Học sinh tự vẽ hình)*

a. Hàm số luôn đồng biến khi và chỉ khi : $2a - 3 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$

Hàm số luôn nghịch biến khi và chỉ khi : $2a - 3 < 0 \Leftrightarrow a < \frac{3}{2}$

b. Vì điểm A(2, 3) thuộc đồ thị hàm số nên : $3 = (2a - 3)2 \Leftrightarrow 4a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{13}{10}$

c. Vì điểm B($\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{2}$) thuộc đồ thị hàm số nên:

$-\frac{1}{2} = (2a - 3).\frac{5}{4} \Leftrightarrow 10a = 13 \Leftrightarrow a = \frac{13}{10}$. Vậy hàm số có dạng $y = -\frac{2}{5}x$.

d. Đồ thị hàm số là đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV, ta có:

$2a - 3 = -1 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$. Vậy hàm số có dạng $y = -x$.

Bài tập 4.

a. Vì điểm M(2; 3) thuộc đồ thị hàm số nên: $3 = 2a.2 - 3a \Leftrightarrow a = 3$.

Do đó, hàm số có dạng $y = 6x - 9$.

b. Ta lấy hai điểm A(0, –9) và B($\frac{3}{2}$, 0) *(Học sinh tự vẽ hình)*

c. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng.

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{9.\frac{3}{2}}{\sqrt{9^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{27}{\sqrt{333}} = \frac{9}{\sqrt{37}}.$$

Vậy, khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng bằng $\frac{9}{\sqrt{37}}$.

Bài tập 5. (*Học sinh tự làm*)

Bài tập 6. (*Học sinh tự vẽ hình*)

a. Vì điểm A(1, 3) thuộc đồ thị hàm số nên: $3 = |a - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 1 = 3 \\ a - 1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = -2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số có dạng y = 3x.

b. Vì điểm $B(-\frac{1}{2}, 8)$ thuộc đồ thị hàm số nên: $8 = |a - 1|.(-\frac{1}{2})$ vô nghiệm.

Vậy, không tồn tại a.

Bài tập 7. Tham khảo ví dụ 8.

Bài tập 8. (*Học sinh tự vẽ hình*)

d. Thực hiện vẽ đồ thị hàm số y = x + 2. Khi đó, tập hợp các điểm M(x, y) thoả mãn y < x + 2 nằm phía dưới đồ thị hàm số.

e. Thực hiện vẽ đồ thị hàm số y = –x + 1. Khi đó, tập hợp các điểm M(x, y) thoả mãn y ≤ –x + 1 nằm phía dưới đồ thị hàm số kể cả đồ thị hàm số.

f. Thực hiện vẽ đồ thị hàm số y = –2x + 2. Khi đó, tập hợp các điểm M(x, y) thoả mãn y ≥ –2x + 2 nằm phía trên đồ thị hàm số kể cả đồ thị hàm số.

g. Thực hiện vẽ đồ thị các hàm số y = x, y = –2x + 4, y = –x + 1. Khi đó, tập hợp các điểm M(x, y) thoả mãn hệ thuộc phần mặt phẳng giới hạn bởi ba đồ thị trên.

CHỦ ĐỀ 4

HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

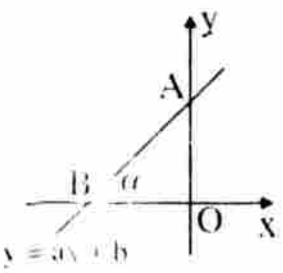
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Cho đường thẳng $y = ax + b$, với $a \neq 0$.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng với tia Ox. Ta có hai trường hợp:

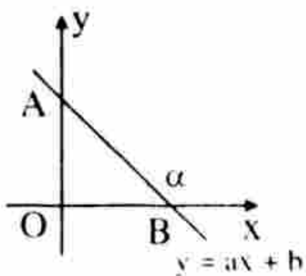
Với $a > 0$



Trong ΔOAB, ta có:

$$tg\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{|b|}{\left|\frac{-b}{a}\right|} = a.$$

Với $a < 0$



Trong ΔOAB, ta có:

$$tg\alpha = -tg\widehat{ABO} = -\frac{OA}{OB} = -\frac{|b|}{\left|\frac{-b}{a}\right|} = a.$$

Như vậy, ta thấy được mối liên quan giữa hệ số a với góc tạo bởi đường thẳng và tia Ox, nên ta gọi *a là hệ số góc* của đường thẳng $y = ax + b$.

Ta có kết quả:

> *Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc là a và:*
> - *Nếu $a > 0$ thì $\alpha < 90^0$.*
> - *Nếu $a < 0$ thì $\alpha > 90^0$ (khi đó $\alpha = 180^0 - \widehat{ABO}$)*

Thí dụ 1: Lập phương trình đường thẳng có hệ số góc bằng 6 và đi qua điểm M(1, 9).

Giải

Đường thẳng có hệ số góc bằng 6 nên có dạng $y = 6x + b$.

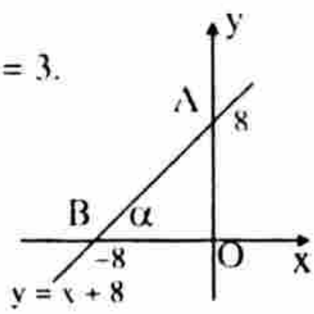
Vì đường thẳng đi qua điểm M(1, 9) nên: $9 = 6.1 + b \Leftrightarrow b = 3$.

Vậy, đường thẳng có phương trình $y = 6x + 3$.

Thí dụ 2: Cho đường thẳng: (d): $y = x + 8$.

a. Vẽ đường thẳng (d).

b. Tính số đo góc tạo bởi đường thẳng (d) với tia Ox:



Giải

a. Ta lấy hai điểm thuộc (d) là A(0, 8) và B(−8, 0).
   Nối A và B ta nhận được đồ thị của (d).

b. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng với tia Ox.

   Xét ΔOAB vuông tại O, ta có: $\text{tg}\,\widehat{ABO} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{8}{8} = 1 \Rightarrow \widehat{ABO} = 45^0$

   $\alpha = \widehat{ABO} = 45^0$.

2. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Dựa trên kết quả đã biết:

> *Đồ thị của hai hàm số y = ax + b và y = ax (a ≠ 0) là:*
> - *Song song với nhau nếu b ≠ 0.*
> - *Trùng nhau nếu b = 0.*

Chúng ta, thu được kết quả sau:

> *Hai đường thẳng y = ax + b (a ≠ 0) và y = a'x + b (a' ≠ 0) là:*
> - *Song song với nhau nếu a = a' và b ≠ b'.*
> - *Trùng nhau nếu a = a' và b = b'.*

<u>Thí dụ 3:</u> Cho hàm số: y = ax + 2.

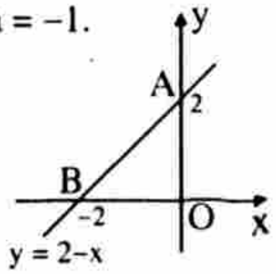
a. Xác định a, biết đồ thị hàm số song song với đường thẳng y = −x.

b. Vẽ đồ thị hàm số tìm được trong a). Tính diện tích tam giác được tạo bởi đồ thị hàm số trong a) và các trục toạ độ.

Giải

a. Vì đồ thị hàm số song song với đường thẳng y = −x nên a = −1.
   Vậy, hàm số có dạng y = −x + 2.

b. Để vẽ đồ thị hàm số ta lấy hai điểm A(0, 2) và B(2, 0).
   Nối A và B ta được đồ thị cần vẽ.



   Khi đó: $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}.OA.OB = \dfrac{1}{2}.2.2 = 2$.

<u>Chú ý:</u> Ta có, các kết quả:

1. Với điểm $A(0, y_A)$ thì $OA = |y_A|$.
2. Với điểm $A(x_A, 0)$ thì $OA = |x_A|$.
3. Với điểm $A(x_A, y_A)$ thì $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$.

3. ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

Dựa trên kết quả đã biết:

> *Hai đường thẳng y = ax và y = a'x với a ≠ a' luôn cắt nhau tại gốc toạ độ O.*

Chúng ta, thu được kết quả sau:

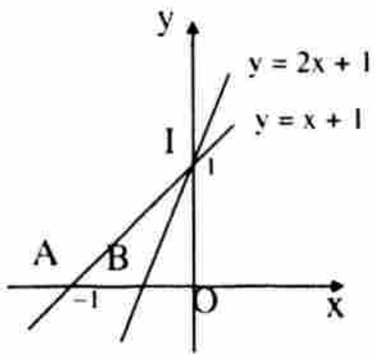
> *Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b$ cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$.*
>
> *Đặc biệt nếu $a \neq a'$ và $b = b'$, chúng cắt nhau tại một điểm trên Oy.*

Thí dụ 4: Cho hai đường thẳng: (d_1): $y = 2x + 1$ và (d_2): $y = x + 1$.

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng và vẽ hai đường thẳng này trên cùng một hệ trục toạ độ.

b. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua I và có hệ số góc bằng –4.

c. Lập phương trình đường thẳng (d') đi qua I và song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 9$.



Giải

a. Nhận xét rằng:

- Đường thẳng (d_1) có $a_1 = 2$ và $b_1 = 1$.
- Đường thẳng (d_2) có $a_2 = 1$ và $b_2 = 1$.

Suy ra: $a_1 \neq a_2$ và $b_1 = b_2$

$\Rightarrow (d_1)$ và (d_2) cắt nhau tại điểm I trên Oy.

Giả sử giao điểm của hai đường thẳng có toạ độ $I(0, y_0)$, vì I thuộc (d_1) (hoặc (d_2)) nên: $y_0 = 2.0 + 1 \Leftrightarrow y_0 = 1 \Rightarrow I(0, 1)$.

b. Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng –4, có phương trình: (d): $y = -4x + b$.

Vì I thuộc đường thẳng (d) nên: $1 = -4.0 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d): $y = -4x + 1$.

c. Đường thẳng (d') song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 9$, có phương trình:

$$(d'): y = \frac{1}{2}x + b, \text{ với } b \neq 9.$$

Vì I thuộc đường thẳng (d') nên: $1 = \frac{1}{2}.0 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d'): $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Nhận xét: Trong lời giải của thí dụ trên:

1. Ở câu a), dựa trên nhận xét (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm I trên Oy nên ta mới giả sử $I(0, y_0)$.

   Trong trường hợp tổng quát, với hai đường thẳng:

   (d_1): $y = a_1x + b_1$ và (d_2): $y = a_2x + b_2$ $(a_1 \neq a_2)$

   ta giả sử toạ độ giao điểm $I(x_0, y_0)$, rồi nhận xét:

$$I \in (d_1) \Rightarrow y_0 = a_1x_0 + b_1. \qquad (1)$$
$$I \in (d_2) \Rightarrow y_0 = a_2x_0 + b_2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $a_1x_0 + b_1 = a_2x_0 + b_2 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$

Thay x_0 và (1) (hoặc (2)) ta nhận được giá trị của y_0, từ đó suy ra toạ độ điểm I.

2. Ở câu b) và câu c), ta có thể khẳng định được $b = 1$ thông qua nhận định " *đường thẳng (d) và (d') luôn cắt (d_1) tại điểm I thuộc Oy* ".

4. VỊ TRÍ CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRÊN MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

Cho hai đường thẳng: (d_1): $y = a_1x + b_1$, (d_2): $y = a_2x + b_2$ ta có các kết quả sau:

- $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$.
- $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 \neq b_2$.
- $(d_1) \cap (d_2) = \{A\} \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$.
- $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow a_1.a_2 = -1$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hai điểm A (2 ; 3) và B (5 ; 8) thuộc đường thẳng (d).

a. Tính hệ số góc của đường thẳng (d). b. Xác định đường thẳng (d) đó.

Giải

a. Giả sử phương trình của đường thẳng (d) có dạng: (d): $y = ax + b$.

Ta có: $A(2 ; 3) \in (d) \Rightarrow 2 = 3a + b.$ (1)

$B(5 ; 8) \in (d) \Rightarrow 8 = 5a + b.$ (2)

Lấy (2) trừ (1) suy ra: $2a = 6 \Rightarrow a = 3$. Vậy, hệ số góc của (d) bằng 3.

b. Thay $a = 3$ vào (1) ta được: $3.3 + b = 2 \Leftrightarrow b = -7$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d): $y = 3x - 7$.

Tổng quát: Cho hai điểm A $(x_1 ; y_1)$ và B $(x_2 ; y_2)$ thuộc đường thẳng (d), trong đó $x_1 \neq x_2$. Ta dễ dàng chứng minh được:

- Hệ số góc của đường thẳng (d) là: $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- Phương trình (d) được xác định bởi công thức:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (*)$$

Trong nhiều bài toán việc sử dụng công thức (*) để xác định đường thẳng (d) dễ dàng hơn nhiều.

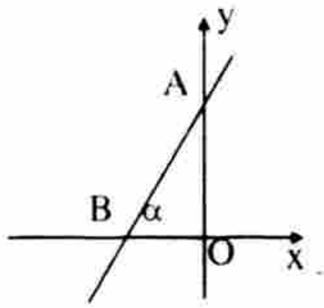
Ví dụ 2: Tính số đo góc tạo bởi các đường thẳng sau với tia Ox:

a. $y = \sqrt{3}x + 3$.

b. $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 1$.

Giải

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng với tia Ox.

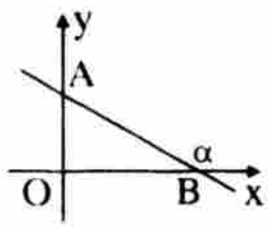


a. Đường thẳng $y = \sqrt{3}x + 3$ cắt các trục Oy, Ox theo thứ tự tại $A(0, 3)$ và $B(-\sqrt{3}, 0)$.

Ta có ngay: $\text{tg}\,\widehat{ABO} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ABO} = 60^0$

Từ đó, ta được: $\alpha = \widehat{ABO} = 60^0$.

b. Đường thẳng $y = -\dfrac{3}{\sqrt{3}}x + 1$ cắt các trục Oy, Ox theo thứ tự tại $A(0, 1)$ và $B(\sqrt{3}, 0)$.



Ta có ngay: $\text{tg}\,\widehat{ABO} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ABO} = 30^0$

Từ đó, ta được:

$$\alpha = 180^0 - \widehat{ABO} = 180^0 - 30^0 = 150^0.$$

Nhận xét: Lời giải của ví dụ trên, minh hoạ phương pháp tìm số đo của góc tạo bởi một đường thẳng với tia Ox trong các trường hợp $a > 0$ và $a < 0$.

Ví dụ 3: Lập phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\dfrac{4}{3}$ và:

a. Đi qua điểm $M(-1, -1)$.

b. Chắn trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 24.

c. Khoảng cách từ O đến (d) bằng $\dfrac{12}{5}$.

Giải

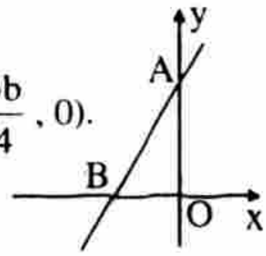
Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $\dfrac{4}{3}$ có phương trình: (d): $y = \dfrac{4}{3}x + b$.

a. Vì $M(-1, -1)$ thuộc (d) nên: $-1 = \dfrac{4}{3}.(-1) + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy, ta được (d): $y = \dfrac{4}{3}x + 1$.

b. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}.0 + b = b$, do đó $A(0, b)$.



- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{4}{3}.x + b \Leftrightarrow x = -\frac{3b}{4}$, do đó $B(-\frac{3b}{4}, 0)$.

Diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2}.|b|.\left|-\frac{3b}{4}\right| = \frac{3b^2}{8} \Leftrightarrow b^2 = 64 \Leftrightarrow b = \pm 8.$$

Khi đó:

- Với $b = 8$, ta được đường thẳng (d_1): $y = \frac{4}{3}x + 8$.
- Với $b = -8$, ta được đường thẳng (d_2): $y = \frac{4}{3}x - 8$.

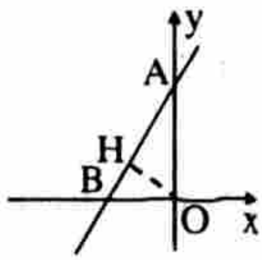
Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}.0 + b = b$, do đó $A(0, b)$.
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{4}{3}.x + b \Leftrightarrow x = -\frac{3b}{4}$, do đó $B(-\frac{3b}{4}, 0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).
Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}$$



$$\Leftrightarrow \frac{12}{5} = \frac{|b|.\left|-\frac{3b}{4}\right|}{\sqrt{b^2 + \left(-\frac{3b}{4}\right)^2}} = \frac{3|b|}{5} \Leftrightarrow |b| = 4 \Leftrightarrow b = \pm 4.$$

Khi đó:

- Với $b = 4$, ta được đường thẳng (d_3): $y = \frac{4}{3}x + 4$.
- Với $b = -4$, ta được đường thẳng (d_4): $y = \frac{4}{3}x - 4$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_3) và (d_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: Qua lời giải của ví dụ trên, ta ghi nhận kết quả " *Mọi đường thẳng có hệ số góc k luôn có phương trình y = kx + b* ". Khi đó, để xác định phương trình đường thẳng chúng ta chỉ cần xác định b.

Ví dụ 4: Cho đường thẳng: (Δ): $y = x + 6$.

Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và:

a. Đi qua điểm M(1, 2).

b. Chắn trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 2.

c. Khoảng cách từ O đến (d) bằng $2\sqrt{2}$.

Giải

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) có phương trình: (d): $y = x + b$.

a. Vì M(1, 2) thuộc (d) nên: $2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

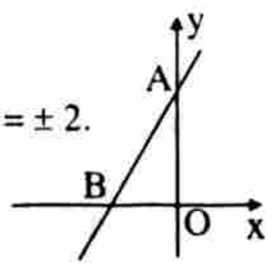
Vậy, ta được (d): $y = x + 1$.

b. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = x + b \Leftrightarrow x = -b$, do đó B(−b, 0).

Diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2}.|b|.|-b| = \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = \pm 2.$$



Khi đó:

- Với $b = 2$, ta được đường thẳng (d_1): $y = x + 2$.
- Với $b = -2$, ta được đường thẳng (d_2): $y = x - 2$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

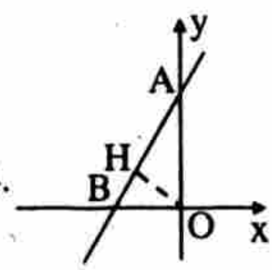
- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó A(0, b).
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = x + b \Leftrightarrow x = -b$, do đó B(−b, 0).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \frac{|b|.|-b|}{\sqrt{b^2 + (-b)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |b| = 4 \Leftrightarrow b = \pm 4.$$



Khi đó:

- Với $b = 4$, ta được đường thẳng (d_3): $y = x + 4$.
- Với $b = -4$, ta được đường thẳng (d_4): $y = x - 4$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_3) và (d_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: Qua lời giải của ví dụ trên, ta ghi nhận kết quả " *Mọi đường thẳng song song với đường thẳng $y = ax + m$ luôn có phương trình $y = ax + \underline{b}$* ". Khi đó, để xác định phương trình đường thẳng chúng ta chỉ cần xác định b.

Ví dụ 5: Lập phương trình đường thẳng (d), biết (d) đi qua điểm M(1, 2) và chắn trên hai trục toạ độ những đoạn bằng nhau.

Giải

Đường thẳng (d) có phương trình: (d): $y = ax + b$.

Vì M(1, 2) thuộc (d) nên: $2 = a + b \Leftrightarrow a = 2 - b$. (1)

Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được A(0, b) và $B(-\frac{b}{a}, 0)$.

Với điều kiện OA = OB, suy ra: $|b| = \left|-\frac{b}{a}\right| \Leftrightarrow |b| = \left|\frac{b}{b-2}\right| \Leftrightarrow |b(b-2)| = |b|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 - 2b = b \\ b^2 - 2b = -b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 - 3b = 0 \\ b^2 - b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 3 \\ b = 1 \end{array}\right. .$$

Khi đó:

- Với $b = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} a = 2$, ta được đường thẳng (d_1): $y = 2x$.
- Với $b = 3 \overset{(1)}{\Rightarrow} a = -1$, ta được đường thẳng (d_2): $y = -x + 3$.
- Với $b = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} a = 1$, ta được đường thẳng (d_3): $y = x + 1$.

Vậy, tồn tại ba đường thẳng (d_1), (d_2) và (d_3) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Tổng quát: Cho điểm A $(x_0 ; y_0)$, ta dễ dàng chứng minh được rằng mọi đường thẳng (d) đi qua A luôn có phương trình:

$$(d): y = a(x - x_0) + y_0.$$

Ví dụ 6: Lập phương trình đường thẳng (d), biết (d) cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A(a, 0), B(0, b) với $a, b \neq 0$.

Giải

Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = kx + m$.

- Vì B(0, b) thuộc (d) nên: $b = k.0 + m \Leftrightarrow m = b$.
- Vì A(a, 0) thuộc (d) nên: $0 = ka + m \Leftrightarrow ka = -m = -b \Leftrightarrow k = -\frac{b}{a}$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = -\frac{b}{a}x + b \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Nhận xét: Qua lời giải của ví dụ trên, ta ghi nhận kết quả " *Mọi đường thẳng đi qua hai điểm A(a, 0) và B(0, b) với a, b ≠ 0 luôn có phương trình* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$".

Phương trình trên được gọi là phương trình đoạn chắn.

Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng phương trình đoạn chắn để giải toán.

Ví dụ 7: Trên mặt phẳng toạ độ, cho điểm M(4, 1). Một đường thẳng (d) luôn đi qua M cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A(a, 0), B(0, b) với a, b > 0. Lập phương trình đường thẳng (d) sao cho:

a. Diện tích ΔOAB nhỏ nhất. b. OA + OB nhỏ nhất.

c. $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Giải

Từ giả thiết, ta được: (d): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Vì M(4, 1) thuộc (d) nên: $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{4b}{b-1}$, với b > 1. (*)

a. Diện tích ΔOAB được cho bởi: $S = \frac{1}{2}.OA.OB = \frac{ab}{2}$.

Từ (*), sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$1 = \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{4}{a}.\frac{1}{b}} = \frac{4}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 16 \Leftrightarrow S \geq 8.$$

Suy ra, ta được $S_{Min} = 8$, đạt được khi: $\frac{4}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): \frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow (d): y = -\frac{1}{4}x + 2.$$

b. Ta có: $OA + OB = |a| + |b| = \frac{4b}{b-1} + b = \frac{4}{b-1} + b + 4$

$$= \frac{4}{b-1} + b - 1 + 5 \geq 2\sqrt{\frac{4}{b-1}.(b-1)} + 5 = 9.$$

Suy ra, ta được $(OA + OB)_{Min} = 9$, đạt được khi: $\frac{4}{b-1} = b - 1 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow (d): y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

c. Ta có: $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$(4^2+1^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geq\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=1\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{1}{17}.$$

Suy ra, ta được $\left(\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}\right)_{Min}=\dfrac{1}{17}$, đạt được khi: $\begin{cases}\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}=1\\4a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{17}{4}\\b=17\end{cases}$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): \frac{x}{17/4}+\frac{y}{17}=1\Leftrightarrow(d): y=-\frac{1}{4}x+17.$$

Chú ý: Sai lầm thường gặp của học sinh trong câu b) là dùng lập luận:

$$OA+OB=a+b\geq 2\sqrt{ab}\geq 8.$$

Khi đó $(OA+OB)_{Min}=8$ đạt được khi $a=b\xrightarrow{(*)}a=b=5$.

Ví dụ 8:

a. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(−5, 5) sao cho (d) tạo với tia Ox một góc α có tg$\alpha=\dfrac{1}{2}$.

b. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M, y_M)$ sao cho $x_M^2+y_M^2$ nhỏ nhất.

Giải

a. Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng: (d): y = ax + b.

- (d) tạo với tia Ox một góc α có tg$\alpha=\dfrac{1}{2}$ nên: a = tg$\alpha=\dfrac{1}{2}$.
- Vì A(−5, 5) thuộc (d) nên: $5=a(-5)+b=\dfrac{1}{2}(-5)+b\Leftrightarrow b=\dfrac{15}{2}$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d) có dạng: (d): $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{2}$.

b. Vì $M(x_M, y_M)$ thuộc (d) nên: $y_M=\dfrac{1}{2}x_M+\dfrac{15}{2}\Leftrightarrow x_M=2y_M-15$.

Khi đó: $x_M^2+y_M^2=(2y_M-15)^2+y_M^2=5y_M^2-60y_M+225=5(y_M-6)^2+45\geq 45$

Suy ra, ta được $(x_M^2+y_M^2)_{Min}=45$ đạt được khi: $y_M=6\Rightarrow x_M=2.6-15=-3$.

Vậy ta tìm được M(−3, 6).

Nhận xét: Trong lời giải của ví dụ trên:

1. Ở câu a), ta sử dụng kết quả " *Nếu đường thẳng (d): y = ax + b tạo với tia Ox một góc α thì a = tgα* ".
2. Điểm M được tìm trong câu b) chính là toạ độ hình chiếu vuông góc của O lên (d).

Ví dụ 9: Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình:

$$(d_m): y = -\frac{m-1}{2m-3}x + \frac{m+1}{2m-3}.$$

1. Xác định m để:

   a. (d_m) đi qua A(2, 1).

   b. (d_m) có hướng đi lên (hàm số đồng biến).

   c. (d_m) song song với đường thẳng (Δ): $x - 2y + 12 = 0$.

2. Tìm điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua.

Giải

Viết lại phương trình họ đường thẳng (d_m) dưới dạng:

$$(d_m): (m-1)x + (2m-3)y - m - 1 = 0.$$

1. Ta lần lượt có:

   a. (d_m) đi qua A(2, 1) khi và chỉ khi: $2(m-1) + (2m-3) - m - 1 = 0$

   $$\Leftrightarrow 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

   b. (d_m) có hướng đi lên khi và chỉ khi nó có hệ số góc dương

$$\Leftrightarrow -\frac{m-1}{2m-3} > 0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{2m-3} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-1>0\\2m-3<0\end{cases}\\ \begin{cases}m-1<0\\2m-3>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>1\\m<3/2\end{cases}\\ \begin{cases}m<1\\m>3/2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < m < \frac{3}{2}.$$

   c. (d_m) song song với đường thẳng (Δ)khi và chỉ khi: $-\frac{m-1}{2m-3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}$.

2. Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua, khi đó:

$$(m-1)x_0 + (2m-3)y_0 - m - 1 = 0, \text{ với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 2y_0 - 1)m - x_0 - 3y_0 - 1 = 0, \text{ với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0 + 2y_0 - 1 = 0\\x_0 + 3y_0 + 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0 = 5\\y_0 = -2\end{cases}.$$

Vậy, (d_m) luôn đi qua điểm cố định M(5, −2).

Chú ý: Với bài toán về sự đồng quy của ba đường thẳng

$$(d_1): y = a_1x + b_1,\ (d_2) : y = a_2x + b_2,\ (d_3) : y = a_3x + b_3,$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ giao điểm I của hai đường thẳng (d_1), (d_2).

Bước 2: Với yêu cầu :

- Để chứng minh (d_1), (d_2), (d_3) đồng quy ta đi chứng minh $I \in (d_3)$.
- Để nhận được giá trị của tham số để ba đường thẳng đồng quy ta thiết lập điều kiện $I \in (d_3)$.

Ví dụ 10: Cho ba đường thẳng:

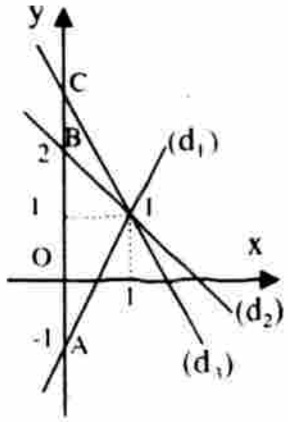
(d_1): $y = 2x - 1$,

(d_2): $y = 2 - x$,

(d_3): $y = ax + 3$.

Xác định a để ba đường thẳng trên đồng quy, rồi vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục toạ độ.

Giải



Giả sử giao điểm I của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có toạ độ $I(x_0, y_0)$, khi đó:

- Vì I thuộc (d_1) nên $y_0 = 2x_0 - 1$. (1)
- Vì I thuộc (d_2) nên $y_0 = -x_0 + 2$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $2x_0 - 1 = -x_0 + 2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$.

Vậy (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm $I(1, 1)$.

Để (d_1), (d_2), (d_3) đồng quy điều kiện là:

$I \in (d_3) \Leftrightarrow 1 = a + 3 \Leftrightarrow a = -2$.

Vậy, với $a = -2$ thì (d_1), (d_2), (d_3) đồng quy và khi đó (d_3): $y = -2x + 3$.

Vẽ đồ thị:

- Để vẽ đồ thị của (d_1) ta lấy thêm điểm $A(0, -1)$.
- Để vẽ đồ thị của (d_2) ta lấy thêm điểm $B(0, 2)$.
- Để vẽ đồ thị của (d_3) ta lấy thêm điểm $C(0, 3)$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu định nghĩa hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$. Giải thích tại sao lại có được định nghĩa này ?

Câu hỏi 2: Nêu điều kiện để hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b$ $(a' \neq 0)$ là:

a. Trùng nhau.

b. Song song với nhau.

c. Cắt nhau.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng mọi đường thẳng (d) đi qua điểm $A(x_0, y_0)$ luôn có phương trình $y = a(x - x_0) + y_0$.

Câu hỏi 4: Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua hai điểm $A(a, 0)$ và $B(0, b)$ với $a, b \neq 0$ luôn có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Câu hỏi 5: Chứng minh rằng đường thẳng (d) đi qua hai điểm A $(x_1 ; y_1)$ và B $(x_2 ; y_2)$ với $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ có hệ số góc $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Câu hỏi 6: Cho hai đường thẳng : (d_1): $y = a_1x + b_1$, (d_2): $y = a_2x + b_2$

Chứng minh rằng $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow a_1.a_2 = -1$.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Lập phương trình đường thẳng (d), biết (d):

a. Đi qua điểm M (1, 2) có hệ số góc bằng 3.

b. Đi qua điểm A (−3, 2) và tạo với tia Ox một góc 45^0.

c. Đi qua điểm B (3, 2) và tạo với trục Ox một góc 60^0.

Bài tập 2. Lập phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $-\dfrac{4}{3}$ và:

a. Đi qua điểm M(1, −1).

b. Chắn trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 54.

c. Khoảng cách từ O đến (d) bằng $\dfrac{3}{5}$.

Bài tập 3. Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ): $y = -3x$ và đi qua điểm M(1; 3). Vẽ đồ thị của (d).

Bài tập 4. Cho đường thẳng: (Δ): $y = -x + 2$.

Lập phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) và:

a. Đi qua điểm M(1, −2).

b. Chắn trên hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 8.

c. Khoảng cách từ O đến (d) bằng $9\sqrt{2}$.

Bài tập 5. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

a. (d_1): $x + y + 1 = 0$; (d_2): $2x + 2y + 3 = 0$.

b. (d_1): $3x - y + 1 = 0$; (d_2): $4x - y + 1 = 0$.

c. (d_1): $x + 2y + 1 = 0$; (d_2): $x + 4y + 3 = 0$.

d. (d_1): $2x + 3y + 1 = 0$; (d_2): $4x + 6y + 2 = 0$.

trong trường hợp cắt nhau hãy tìm toạ độ giao điểm.

Bài tập 6. Cho hai đường thẳng: (d_1): $y = 2x - 1$ và (d_2): $y = -x + 2$.

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau. Xác định toạ độ giao điểm I của chúng và vẽ hai đường thẳng này trên cùng một hệ trục toạ độ.

b. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua I và có hệ số góc bằng 3.

c. Lập phương trình đường thẳng (d') đi qua I và song song với đường thẳng $y = 5x + 7$.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Giả sử đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$.

a. Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 3 nên $a = 3$.

Vì $M(1, 2)$ thuộc (d) nên: $2 = a.1 + b = 3.1 + b \Leftrightarrow b = -1$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d): $y = 3x - 1$.

b. Đường thẳng (d) tạo với tia Ox một góc 45^0 nên: $a = tg45^0 = 1$.

Vì $A(-3, 2)$ thuộc (d) nên: $2 = a.(-3) + b = 1.(-3) + b \Leftrightarrow b = 5$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d): $y = x + 5$.

c. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Đường thẳng (d) tạo với tia Ox một góc 60^0, ta được: $a = tg60^0 = \sqrt{3}$.

Vì $B(3, 2)$ thuộc (d) nên: $2 = a.3 + b = \sqrt{3}.3 + b \Leftrightarrow b = 2 - 3\sqrt{3}$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d_1): $y = \sqrt{3}x + 2 - 3\sqrt{3}$.

Trường hợp 2: Đường thẳng (d) tạo với tia đối của tia Ox một góc 60^0, ta được:

$$a = -tg60^0 = -\sqrt{3}.$$

Vì $B(3, 2)$ thuộc (d) nên: $2 = a.3 + b = -\sqrt{3}.3 + b \Leftrightarrow b = 2 + 3\sqrt{3}$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d_2): $y = -\sqrt{3}x + 2 + 3\sqrt{3}$.

Kết luận, có hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 2. Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng $-\frac{4}{3}$ có phương trình:

$$(d): y = -\frac{4}{3}x + b.$$

a. Vì $M(1, -1)$ thuộc (d) nên: $-1 = -\frac{4}{3}.1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy, ta được (d): $y = -\frac{4}{3}x + 1$.

b. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}.0 + b = b$, do đó $A(0, b)$.
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{4}{3}.x + b \Leftrightarrow x = \frac{3b}{4}$, do đó $B(\frac{3b}{4}, 0)$.

Diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 54 = \frac{1}{2}.|b|.\left|\frac{3b}{4}\right| = \frac{3b^2}{8} \Leftrightarrow b^2 = 144 \Leftrightarrow b = \pm 12.$$

Khi đó:

- Với $b = 12$, ta được đường thẳng (d_1): $y = -\frac{4}{3}x + 12$.
- Với $b = -12$, ta được đường thẳng (d_2): $y = -\frac{4}{3}x - 12$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}.0 + b = b$, do đó $A(0, b)$.
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{4}{3}.x + b \Leftrightarrow x = \frac{3b}{4}$, do đó $B(\frac{3b}{4}, 0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}$

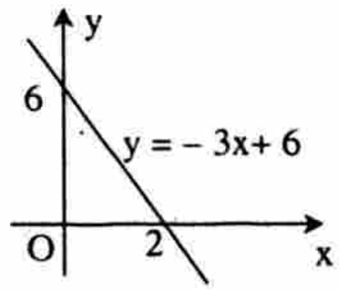
$$\Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{|b|.\left|\frac{3b}{4}\right|}{\sqrt{b^2 + \left(\frac{3b}{4}\right)^2}} = \frac{3|b|}{5} \Leftrightarrow |b| = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1.$$

Khi đó:

- Với $b = 1$, ta được đường thẳng (d_3): $y = -\frac{4}{3}x + 1$.
- Với $b = -1$, ta được đường thẳng (d_4): $y = -\frac{4}{3}x - 1$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_3) và (d_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 3.



a. Vì (d) song song với (Δ) nên có phương trình:

(d): $y = -3x + b$.

Vì $M(1, 3)$ thuộc (d) nên: $3 = -3.1 + b \Leftrightarrow b = 6$.

Vậy, ta được (d): $y = -3x + 6$.

b. Vẽ đồ thị của (d), ta lựa chọn hai điểm $A(0, 6)$ và $B(2, 0)$.

Nối A và B ta được đồ thị của (d).

Bài tập 4. Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (Δ) có phương trình:

(d): $y = -x + b$.

a. Vì $M(1, -2)$ thuộc (d) nên: $-2 = -1 + b \Leftrightarrow b = -1$.

Vậy, ta được (d): $y = -x - 1$.

b. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó $A(0, b)$.
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = -x + b \Leftrightarrow x = b$, do đó $B(b, 0)$.

Diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{2}.|b|.|b| = \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = \pm 4.$$

Khi đó:

- Với $b = 4$, ta được đường thẳng (d_1): $y = -x + 4$.
- Với $b = -4$, ta được đường thẳng (d_2): $y = -x - 4$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$, do đó $A(0, b)$.
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow 0 = -x + b \Leftrightarrow x = b$, do đó $B(b, 0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}}$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{2} = \frac{|b|.|-b|}{\sqrt{b^2 + (-b)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |b| = 18 \Leftrightarrow b = \pm 18.$$

Khi đó:

- Với $b = 18$, ta được đường thẳng (d_3): $y = -x + 18$.
- Với $b = -18$, ta được đường thẳng (d_4): $y = -x - 18$.

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_3) và (d_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 5. *Hướng dẫn*: Chuyển các cặp đường thẳng về dạng (d_1): $y = a_1x + b_1$ và (d_2): $y = a_2x + b_2$, từ đó xác định a_1, b_1, a_2, b_2 và đưa ra lời kết luận.

Bài tập 6.

a. Nhận xét rằng:

- Đường thẳng (d_1) có $a_1 = 2$ và $b_1 = -1$.
- Đường thẳng (d_2) có $a_2 = -1$ và $b_2 = 2$.

Suy ra: $a_1 \neq a_2$ và $b_1 \neq b_2 \Rightarrow (d_1)$ và (d_2) cắt nhau tại điểm I.

Giả sử giao điểm của hai đường thẳng có toạ độ $I(x_0, y_0)$, khi đó:

- Vì I thuộc (d_1) nên $y_0 = 2x_0 - 1$. (1)
- Vì I thuộc (d_2) nên $y_0 = -x_0 + 2$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $2x_0 - 1 = -x_0 + 2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$.

Vậy hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm $I(1, 1)$.

b. Đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 3, có phương trình: (d): $y = 3x + b$.

Vì I thuộc đường thẳng (d) nên: $1 = 3.1 + b \Leftrightarrow b = -2$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d): $y = 3x - 2$.

c. Đường thẳng (d') song song với đường thẳng $y = 5x + 7$, có phương trình:

(d'): $y = 5x + b$, với $b \neq 7$.

Vì I thuộc đường thẳng (d') nên: $1 = 5.1 + b \Leftrightarrow b = -4$.

Vậy, phương trình đường thẳng (d'): $y = 5x - 4$.

CHỦ ĐỀ 5 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Xét các phương trình: $2x + y = 8$, $3x - y = 0$, $0x + 6y = 12$, $6x - 0y = 0$.

Nhận xét rằng, các phương trình trên:

- Gồm *hai ẩn* x, y có *bậc nhất*
- Các hệ số của x và y không đồng thời bằng 0

và các phương trình đó đều được gọi là *phương trình bậc nhất hai ẩn*.

Từ đó, ta có định nghĩa sau:

> **Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng: $ax + by = c$**
> **trong đó:**
> - **a, b, c là hằng số và a, b không đồng thời bằng không.**
> - **x, y là hai ẩn số.**

Thí dụ 1: Xét phương trình: $2x + y = 8$

Nhận thấy rằng, các cặp số (0, 8), (1, 6), (5, –2), ... đều thoả mãn:

$2.0 + 8 = 8$, luôn đúng

$2.1 + 6 = 8$, luôn đúng

$2.5 - 3 = 8$, luôn đúng

Khi đó, ta nói các cặp số (0, 8), (1, 6), (5, –2),... là nghiệm của phương trình đã cho.

Từ đó, ta có định nghĩa sau:

> **Nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn là các cặp giá trị (x_1, y_1), (x_2, y_2),... của hai ẩn số x và y thoả mãn tính chất " *khi thay vào phương trình thì giá trị tương ứng của hai biểu thức ở hai vế của phương trình bằng nhau*".**

2. CÁCH GIẢI

Để làm quen với phương pháp giải một phương trình bậc nhất hai ẩn chúng ta sẽ bắt đầu bằng ba thí dụ cho ba dạng phương trình.

Thí dụ 2: Giải phương trình: $x - 2y = 6$.

Giải

Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng: $x = 2y + 6$.

Tới đây, cho y các giá trị tuỳ ý chúng ta sẽ tính được giá trị tương ứng của x, cụ thể:

- Với $y = -4 \Rightarrow x = 2.(-4) + 6 = -2 \Rightarrow$ cặp $(-2, -4)$ là một nghiệm.

- Với $y = 0 \Rightarrow x = 2.0 + 6 = 6 \Rightarrow$ cặp (6, 0) là một nghiệm.
- ...

Vì y có thể lấy giá trị tuỳ ý, nên phương trình có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là $(x = 2y + 6, y \in \mathbf{R})$ hoặc viết $(2y + 6, y)$.

Nhận xét: 1. Vì vai trò của x, y trong phương trình là như nhau nên có thể giải phương trình theo cách:

Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng:

$$y = \frac{x-6}{2}.$$

Tới đây, cho x các giá trị tuỳ ý chúng ta sẽ tính được giá trị tương ứng của y, cụ thể:

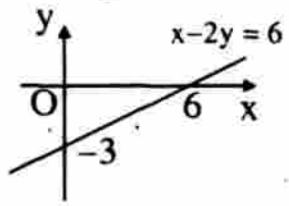
- Với $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow$ cặp (0, −3) là một nghiệm.
- Với $x = 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow$ cặp (2, −2) là một nghiệm.
- ...

Vì x có thể lấy giá trị tuỳ ý, nên phương trình có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là $(x, \frac{x-6}{2})$.

2. Tập các nghiệm của phương trình:

$x - 2y = 6$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 3$ là một đường thẳng.



Thí dụ 3: Giải phương trình: $0x + 2y = 12$.

Giải

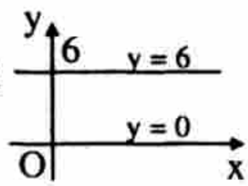
Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng: $2y = 12 \Leftrightarrow y = 6$

Tới đây, cho x các giá trị tuỳ ý ta luôn nhận được $y = 6$, do đó các cặp số (−81, 6), (33, 6), ... đều là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là $(x \in \mathbf{R}, y = 6)$ hoặc viết (x, 6).

Nhận xét: 1. Vì hệ số của x trong phương trình bằng 0 nên không thể giải phương trình theo x được.

2. Tập các nghiệm của phương trình: $0x + 2y = 12$ $\Leftrightarrow y = 6$ là một đường thẳng song song với Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 6.



***Tổng quát*:** Phương trình y = m có vô số nghiệm dạng (x, m), biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ là đường thẳng song song với Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng m nếu $m \neq 0$, trùng với Ox nếu $m = 0$.

Thí dụ 4: Giải phương trình: $6x - 0y = 18$.

Giải

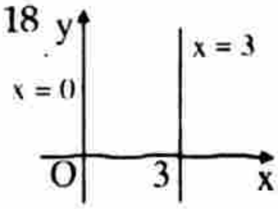
Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng: $6x = 18 \Leftrightarrow x = 3$.

Tới đây, cho y các giá trị tuỳ ý ta luôn nhận được $x = 3$, do đó các cặp số (3, 2005), (3, 1989), ... đều là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là $(3, y \in \mathbf{R})$ hoặc viết $(3, y)$.

Nhận xét:

1. Vì hệ số của y trong phương trình bằng 0 nên không thể giải phương trình theo y được.
2. Tập các nghiệm của phương trình: $6x - 0y = 18 \Leftrightarrow x = 3$ là một đường thẳng song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 3.



Tổng quát. Phương trình $x = n$ có vô số nghiệm dạng (n, y), biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ là đường thẳng song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng n nếu $n \neq 0$, trùng với Oy nếu $n = 0$.

Qua ba thí dụ trên, chúng ta đưa ra được kết luận sau:

Mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn đều có vô số nghiệm. Tập hợp các nghiệm của phương trình được biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ là một đường thẳng, gọi là đường thẳng $ax + by = c$ (mỗi điểm của đường thẳng $ax + by = c$ biểu diễn một cặp nghiệm (x, y) của phương trình).

- *Nếu $a \neq 0, b \neq 0$ thì đường thẳng đó là đồ thị hàm số bậc nhất:*

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

- *Nếu $a = 0, b \neq 0$ thì đường thẳng đó là đồ thị hàm số: $y = \frac{c}{b}$*

  đó là đường thẳng song song với Ox nếu $c \neq 0$, trùng với Ox nếu $c = 0$.

- *Nếu $a \neq 0, b = 0$ thì đường thẳng đó có dạng: $x = \frac{c}{b}$*

  đó là đường thẳng song song với Oy nếu $c \neq 0$, trùng với Oy nếu $c = 0$.

Lưu ý:

1. Đường thẳng $x = \frac{c}{b}$ không phải là đồ thị hàm số.
2. Với yêu cầu giải phương trình $ax + by = c$, ta thường thực hiện ba công việc:
   - Biến đổi để chỉ ra một vài nghiệm cụ thể của phương trình.

- Viết được công thức nghiệm tổng quát của phương trình.
- Biểu diễn nghiệm của phương trình trên mặt phẳng toạ độ.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a. $x + 8y = 2$.
b. $2x - y = 0$.
c. $0x - 6y = 18$.
d. $7x - 0y = 14$.

Giải

a. Biến đổi phương trình về dạng: $x = 2 - 8y$

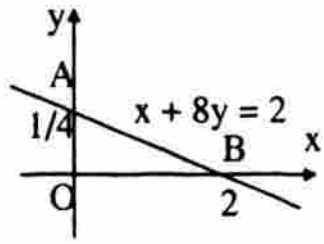
suy ra, các cặp số $(2, 0)$, $(-6, 1)$, … là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(2 - 8y, y)$.

- Biểu diễn nghiệm trên mặt phẳng toạ độ, ta chọn hai điểm

A: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$, tức là $A(0, \frac{1}{4})$.

B: $y = 0 \Rightarrow x = 2$, tức là $B(2, 0)$.

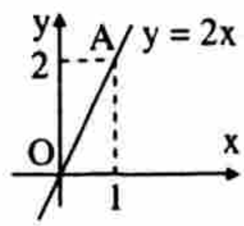


b. Biến đổi phương trình về dạng: $y = 2x$

suy ra, các cặp số $(0, 0)$, $(1, 2)$, … là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(x, 2x)$.

- Biểu diễn nghiệm trên mặt phẳng toạ độ, ta chọn hai điểm
  Gốc toạ độ O.
  A: $x = 1 \Rightarrow y = 2$, tức là $A(1, 2)$.

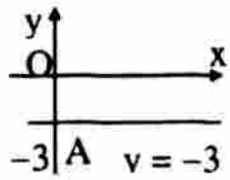


c. Biến đổi phương trình về dạng: $-6y = 18 \Leftrightarrow y = -3$

suy ra, các cặp số $(0, -3)$, $(81, -3)$, …là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(x, -3)$.

- Biểu diễn nghiệm trên mặt phẳng toạ độ, nó là đường thẳng song song với Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng -3.

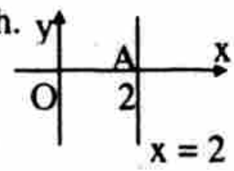


d. Biến đổi phương trình về dạng: $7x = 14 \Leftrightarrow x = 2$

suy ra, các cặp số $(2, 33)$, $(2, 89)$, …là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(2, y)$.

- Biểu diễn nghiệm trên mặt phẳng toạ độ, nó là đường thẳng song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 2.



Nhận xét: Như vậy, ví dụ trên ngoài việc ôn lại phương pháp giải phương trình dạng $ax + by = c$, chúng ta còn biết cách vẽ các đường thẳng có phương trình $ax + by = c$, cụ thể:

- Với phương trình $ax + by = c$, với $a, b \neq 0$, ta đi lấy hai điểm bất kì thuộc đường thẳng rồi nối lại.

- Với phương trình y = m thì đó là đường thẳng song song với Ox nếu $m \neq 0$, trùng với Ox nếu m = 0.
- Với phương trình x = n thì đó là đường thẳng song song với Oy nếu $n \neq 0$, trùng với Oy nếu n = 0.

Chúng ta sử dụng nhận xét này để thực hiện yêu cầu "*Vẽ các đường thẳng ax + by = c*" trong phần Bài tập đề nghị.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng: (d): mx − (m + 4)y = m.

1. Tìm m để đường thẳng (d):
   a. Cắt hai trục toạ độ tại hai điểm phân biệt.
   b. Song song với Ox.
   c. Song song với Oy.
   d. Song song với đường thẳng (Δ): x + y = 6.
2. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

1. Với đường thẳng (d), ta có a = m, b = −(m + 4) và c = m.

a. Để (d) cắt cả hai trục toạ độ điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -(m+4) \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -4 \end{cases}.$$

Vậy, với $m \neq 0$ và $m \neq -4$, thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Để (d) song song với Ox điều kiện là: $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -(m+4) \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$, vô nghiệm.

Vậy, không tồn tại m để (d) song song với Ox.

c. Để (d) song song với Oy điều kiện là: $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -(m+4) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4.$

Vậy, với m = −4, thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Viết lại phương trình hai đường thẳng (d) và (Δ) dưới dạng:

$$(d): y = \frac{m}{m+4}x - \frac{m}{m+4}, \text{ với } m \neq -4$$

$$(\Delta): y = -x + 6$$

Khi đó, để (d) song song với đường thẳng (Δ) điều kiện là:

$$\frac{m}{m+4} = -1 \Leftrightarrow m = -m - 4 \Leftrightarrow 2m = -4 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy, với m = −2, thoả mãn điều kiện đầu bài.

2. Giả sử $M(x_0 ; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua

$$\Leftrightarrow mx_0 - (m+4)y_0 = a, \forall m \Leftrightarrow m(x_0 - y_0 - 1) - 4y_{0h} = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = 0 \\ -4y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}.$$

Vậy, đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định M(1 ; 0).

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a. $x - 3y = 4$. b. $3x + y = 6$. c. $4x - 5y = 8$.

Giải

a. Biến đổi phương trình về dạng: $x = 3y + 4$.

Nhận xét rằng, với $\forall y \in \mathbf{Z}$, ta luôn có $x = 3y + 4 \in \mathbf{Z}$.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm nguyên thoả mãn $(3y + 4, y)$ với $y \in \mathbf{Z}$.

b. Biến đổi phương trình về dạng: $y = -3x + 6$.

Nhận xét rằng, với $\forall x \in \mathbf{Z}$, ta luôn có $y = -3x + 6 \in \mathbf{Z}$.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm nguyên thoả mãn $(x, 6 - 3x)$ với $x \in \mathbf{Z}$.

c. Biến đổi phương trình về dạng: $4x = 5y + 8 \Leftrightarrow x = \frac{5y}{4} + 2 = y + 2 + \frac{y}{4}$. (1)

Đặt $k = \frac{y}{4}, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow y = 4k, k \in \mathbf{Z}$.

Thay $y = 4k$ vào (1), ta được: $x = (4k + 2) + k = 5k + 2$.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm nguyên thoả mãn $(5k + 2, 4k)$ với $k \in \mathbf{Z}$.

Nhận xét: Như vậy, qua ví dụ trên chúng ta đã biết được phương pháp tìm nghiệm nguyên của một phương trình bậc nhất hai ẩn.

Nếu các em học sinh muốn có được kiến thức tương đối đầy đủ về việc tìm nghiệm nguyên của phương trình hãy tham khảo phần chủ đề mở rộng ở cuối chương này.

Ví dụ 4: Cho hai đường thẳng:

(d_1): $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $(a_1, b_1 \neq 0)$.

(d_2): $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $(a_2, b_2 \neq 0)$.

Chứng minh rằng:

a. (d_1) và (d_2) cắt nhau khi $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

b. (d_1) và (d_2) song song với nhau khi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

c. (d_1) và (d_2) trùng nhau khi $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Giải

Như ta đã học ở phần trước, với hai đường thẳng:

(d_1): $y = m_1x + n_1$ và (d_2): $y = m_2x + n_2$

ta có, các kết quả:

- $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$ và $n_1 \neq n_2$.
- $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$ và $n_1 = n_2$.
- $(d_1) \cap (d_2) = \{A\} \Leftrightarrow m_1 \neq m_2$.

Viết lại các đường thẳng dưới dạng:

$$(d_1): y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \text{ và } (d_2): y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}$$

a. (d_1) và (d_2) cắt nhau khi: $-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, đpcm.

b. (d_1) và (d_2) song song với nhau khi:

$$\begin{cases} -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \\ \frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \\ \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}, \text{ đpcm.}$$

c. (d_1) và (d_2) trùng nhau khi:

$$\begin{cases} -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \\ \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}, \text{ đpcm.}$$

<u>Ví dụ 5:</u>

a. Lập công thức tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng $ax + by + c = 0$

b. Áp dụng, tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng $3x - 4y = 10$.

Giải

a. Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$.

Khi đó, đường thẳng có dạng: $by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}$

do đó, khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng bằng $\left|-\frac{c}{b}\right| = \left|\frac{c}{b}\right|$.

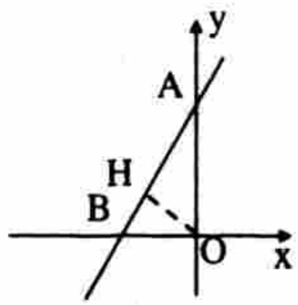
Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$.

Khi đó, đường thẳng có dạng: $ax + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{a}$

do đó, khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng bằng $\left|-\frac{c}{a}\right| = \left|\frac{c}{a}\right|$.

Trường hợp 3: Nếu $a, b \neq 0$.

Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:



- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$, do đó $A(0, \frac{c}{b})$.
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$, do đó $B(-\frac{c}{a}, 0)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{\left|\frac{c}{b}\right|.\left|-\frac{c}{a}\right|}{\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(-\frac{c}{a}\right)^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (*)$$

b. Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng, ta có ngay: $h = \frac{|-10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2$.

Nhận xét: Công thức (*) vẫn đúng trong trường hợp 1 và trường hợp 2.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu định nghĩa phương trình bậc nhất hai ẩn và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Nêu định nghĩa nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn và cho ví dụ.

Câu hỏi 3: Với yêu cầu giải phương trình $ax + by = c$, ta thường thực hiện những công việc gì ?

Câu hỏi 4: Nêu cách giải các phương trình:

a. $ax + by = c$, với $a, b \neq 0$.

b. $0x + by = c$, với $b \neq 0$.

c. $ax + 0y = c$, với $a \neq 0$.

Câu hỏi 5: Nêu kết luận về nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn.

Câu hỏi 6: Lập công thức tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng $ax + by + c = 0$.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. $4x - y = 1$.

b. $x + 2y = 0$.

c. $0x + 2y = 6$.

d. $3x - 0y = 12$.

Bài tập 2. Vẽ các đường thẳng có phương trình sau:

a. $3x - 4y = 12$.

b. $3x - 2y = 0$.

c. $0x - y = 2$.

d. $2x - 0y = -4$.

Bài tập 3. Kiểm tra xem trong các cặp số : $(3, -1)$, $(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$, $(81, -80)$, $(2, 1)$. Cặp số nào là nghiệm của phương trình $x + y = 1$.

Bài tập 4. Đường thẳng $2x - y = -4$ đi qua điểm nào trong các điểm sau:

$$A(2, 4),\ B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 4 + \sqrt{2}\right), C(1, -2), D\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 2}, -2\sqrt{3}\right).$$

Bài tập 5. Cho đường thẳng: (d): $mx + 2y = 4$.

1. Vẽ đường thẳng khi $m = 2$.
2. Tìm m để đường thẳng (d):
   a. Cắt hai trục toạ độ tại hai điểm phân biệt.
   b. Song song với Ox.
   c. Song song với Oy.
   d. Song song với đường thẳng (Δ): $x + y = 6$.
   e. Có hướng đi lên.
   f. Có hướng đi xuống.
3. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 6. Chứng minh rằng khi m thay đổi, các đường thẳng sau luôn đi qua một điểm cố định.

a. $3x + m(y - 1) = 2$.

b. $mx + (m - 2)y = m$.

c. $m(x - 5) - 2y = 6$.

d. $mx - 2y = 6$.

Bài tập 7. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a. $2x + y = 4$.

b. $x - 7y = 9$.

c. $x - 2y = 3$.

d. $3x - 2y = 4$.

e. $3x + y = 8$.

f. $x - 2y = 3$.

Bài tập 8. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến các đường thẳng:

a. $4x + 3y + 20 = 0$.
c. $3x = 2$.

b. $2x - y = 4$.
d. $-2y = 1$.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Đề nghị học sinh tự làm phần biểu diễn bằng đồ thị.*

a. Biến đổi phương trình về dạng: $y = 4x - 1$

suy ra, các cặp số $(1, 3)$, $(0, -1)$, ... là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(x, 4x - 1)$.

b. Biến đổi phương trình về dạng: $x = -2y$

suy ra, các cặp số $(0, 0)$, $(-4, 2)$, ... là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(-2y, y)$.

c. Biến đổi phương trình về dạng: $2y = 6 \Leftrightarrow y = -3$

suy ra, các cặp số $(0, 3)$, $(81, 3)$, ... là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(x, 3)$.

d. Biến đổi phương trình về dạng: $3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

suy ra, các cặp số $(4, 33)$, $(4, 89)$, ...là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(4, y)$.

Bài tập 2. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 3. Ta lần lượt xét:

- Thay $(3, -1)$ vào phương trình, ta được: $3 + (-1) = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$, mâu thuẫn.

Vậy, cặp $(3, -1)$ không phải là nghiệm của phương trình.

- Thay $(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ vào phương trình, ta được:

$$\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1, \text{ đúng.}$$

Vậy, cặp $(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ là nghiệm của phương trình.

- Thay $(81, -80)$ vào phương trình, ta được: $81 + (-80) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$, đúng.

Vậy, cặp $(81, -80)$ là nghiệm của phương trình.

- Thay $(2, 1)$. vào phương trình, ta được: $2 + 1 = 1 \Leftrightarrow 3 = 1$, mâu thuẫn.

Vậy, cặp $(2, 1)$ không phải là nghiệm của phương trình.

Bài tập 4. Ta lần lượt xét:

- Thay $A(2, 4)$ vào phương trình đường thẳng, ta được:

$$2.2 - 4 = -4 \Leftrightarrow 0 = -4, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, đường thẳng không đi qua điểm A.

- Thay B($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $4 + \sqrt{2}$) vào phương trình đường thẳng, ta được:

$$2.\frac{1}{\sqrt{2}} - (4 + \sqrt{2}) = -4 \Leftrightarrow -4 = -4, \text{ đúng.}$$

Vậy, đường thẳng đi qua điểm B.

- Thay C(1, –2) vào phương trình đường thẳng, ta được:

$$2.1 - (-2) = -4 \Leftrightarrow 4 = -4, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, đường thẳng không đi qua điểm C.

- Thay D($\frac{1}{\sqrt{3}-2}$, $-2\sqrt{3}$) vào phương trình đường thẳng, ta được:

$$2.\frac{1}{\sqrt{3}-2} - (-2\sqrt{3}) = -4 \Leftrightarrow 2.\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} + 2\sqrt{3} = -4$$

$$\Leftrightarrow -2(\sqrt{3} + 2) + 2\sqrt{3} = -4 \Leftrightarrow -4 = -4, \text{ đúng.}$$

Vậy, đường thẳng đi qua điểm D.

Bài tập 5.

1. *Học sinh tự làm.*
2. *Học sinh tự làm.*
3. Giả sử M (x_0 ; y_0) là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua

$$\Leftrightarrow mx_0 + 2y_0 = 4, \forall m \Leftrightarrow mx_0 + 2y_0 - 4 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2y_0 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \end{cases}.$$

Vậy, đường thẳng luôn đi qua điểm cố định M(0 ; 2).

Bài tập 6. Tham khảo câu 3) bài tập 5.

Bài tập 7. Tham khảo ví dụ 3.

Bài tập 8. Sử dụng công thức trong câu a) của ví dụ 5.

CHỦ ĐỀ 6 HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Xét hệ: $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

nhận xét rằng, hệ gồm hai phương trình bậc nhất hai ẩn (tương ứng với phương trình của hai đường thẳng). Những hệ như vậy, được gọi là *hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.*

Như vậy, ta có định nghĩa:

> Hệ nai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình là tìm tất cả các cặp số (x; y) là nghiệm chung của hai phương trình.

2. NGHIỆM VÀ SỐ CÁC NGHIỆM CỦA HỆ – MINH HOẠ BẰNG ĐỒ THỊ

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \quad (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 \quad (2) \end{cases}$. (I)

Nhận xét rằng:

1. Mỗi phương trình (1) hoặc (2) là phương trình của một đường thẳng trên mặt phẳng toạ độ.
2. Có ba vị trí tương đối của hai đường thẳng trong mặt phẳng, đó là:
   - Hai đường thẳng cắt nhau, khi đó chúng có một điểm chung duy nhất.
   - Hai đường thẳng trùng nhau, khi đó chúng có vô số điểm chung.
   - Hai đường thẳng song song với nhau, khi đó chúng không có điểm chung.
3. Cặp (x, y) là nghiệm của hệ khi và chỉ khi nó đồng thời thoả mãn phương trình (1) và phương trình (2).

Tức là, số nghiệm của hệ phương trình chính bằng số điểm chung của hai đường thẳng có phương trình (1) và (2) được vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ.

Chúng ta cần nhớ lại kết quả:

> Với hai đường thẳng: (d_1): $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và (d_2): $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
>
> - $(d_1) \cap (d_2) = \{A\} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

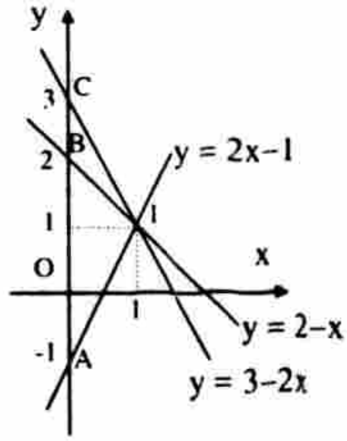
- $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.
- $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Thí dụ 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

Giải

Trước tiên, ta vẽ hai đường thẳng $2x - y = 1$ và $x + y = 2$, như sau:

- Với đường thẳng $2x - y = 1$ lấy hai điểm $A(0, -1)$ và $A_0(\frac{1}{2}, 0)$. Nối A và A_0 được đồ thị cần dựng.
- Với đường thẳng $x + y = 2$ lấy hai điểm $B(0, 2)$ và $B_0(2, 0)$. Nối B và B_0 được đồ thị cần dựng.



Hai đường thẳng có hệ số góc ($a_1 = 2$ và $a_2 = -1$) khác nhau nên chúng cắt nhau tại một điểm I(1, 1).

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Nhận xét: Như vậy, với hệ (I) ta nhận được kết quả đầu tiên là:

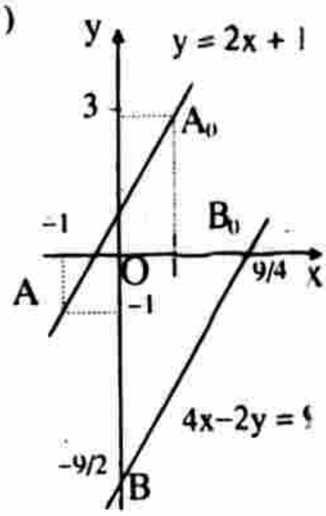
$$\text{Hệ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Thí dụ 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4x - 2y = 9 \end{cases}$.

Giải

Trước tiên, ta vẽ hai đường thẳng $2x - y = -1$ và $4x - 2y = 9$, như sau:

- Với đường thẳng $2x - y = -1$ lấy hai điểm $A(-1, -1)$ và $A_0(1, 3)$. Nối A và A_0 được đồ thị cần dựng.
- Với đường thẳng $4x - 2y = 9$ lấy hai điểm $B(0, -\frac{9}{2})$ và $B_0(\frac{9}{4}, 0)$. Nối B và B_0 được đồ thị cần dựng.



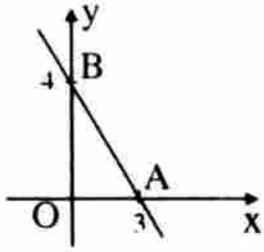
Hai đường thẳng có hệ số góc ($a_1 = 2$ và $a_2 = 2$) bằng nhau và $c_1 \neq c_2$ nên chúng song song với nhau.

Vậy, hệ vô nghiệm.

Nhận xét: Như vậy, với hệ (I) ta nhận được kết quả thứ hai là:

$$\text{Hệ vô nghiệm} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}..$$

Thí dụ 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ 8x + 6y = 24 \end{cases}$.



Giải

Trước tiên, ta vẽ hai đường thẳng $4x + 3y = 12$ và $8x + 6y = 24$, đó chính là đồ thị của hàm số $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

Để vẽ đồ thị hàm số ta lấy hai điểm A(0, 4) và B(3, 0).

Hai đường thẳng trùng nhau nên có vô số điểm chung. Vậy, hệ có vô số nghiệm, mỗi nghiệm là toạ độ (x, y) của một điểm trên đường thẳng $4x + 3y = 12$.

Nhận xét: Như vậy, với hệ (I) ta nhận được kết quả thứ ba là:

$$\text{Hệ có vô số nghiệm} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Qua ba thí dụ trên, chúng ta có tổng kết:

Với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

- Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.
- Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.
- Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh hoạ bằng đồ thị):

a. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x - y = 8 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 4 \end{cases}$.

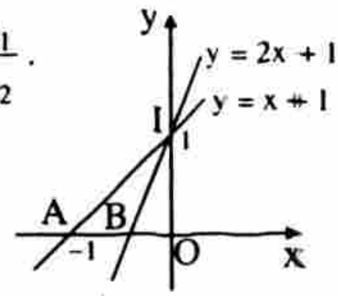
c. $\begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

d. $\begin{cases} 4x + 0y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

e. $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 0x - y = -2 \end{cases}$.

Giải

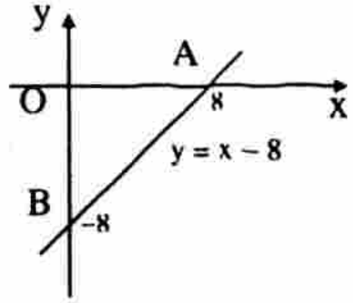
a. Nhận xét rằng: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$ và $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.



Vậy, hệ có nghiệm duy nhất.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hệ có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

b. Nhận xét rằng:

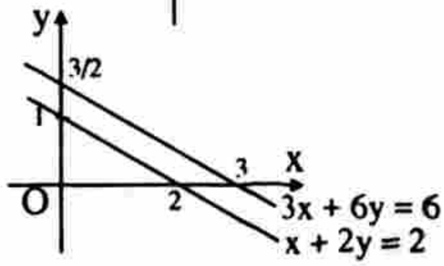


$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1/2} = 2 \text{ và } \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-1/2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = 2 = \frac{c_1}{c_2}.$$

Vậy, hệ có vô số nghiệm.

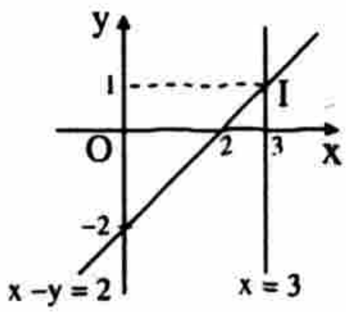
c. Nhận xét rằng: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{1} = 3$ và $\frac{b_1}{b_2} = \frac{6}{2} = 3$



$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = 3 \neq \frac{c_1}{c_2} = 2.$$

Vậy, hệ vô nghiệm.

d. Nhận xét rằng:



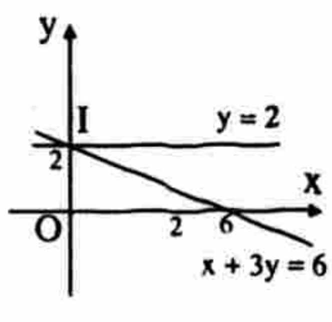
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{1} = 4 \text{ và } \frac{b_1}{b_2} = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hệ có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$$

e. Nhận xét rằng: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{0} = \infty$ và $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.



Vậy, hệ có nghiệm duy nhất.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hệ có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$$

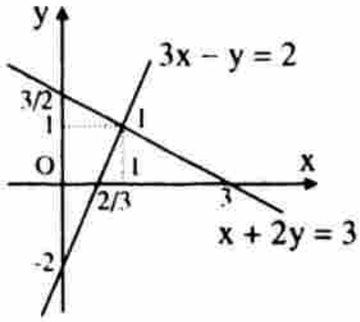
<u>Ví dụ 2:</u> Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng hệ phương trình: $\begin{cases} ax - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

a. Có nghiệm duy nhất với a = 3.

b. Vô nghiệm với $a = -\frac{1}{2}$.

Giải

a. Với a = 3, hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.



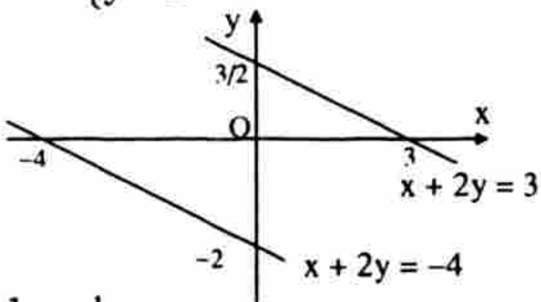
Nhận xét rằng:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{1} = 3 \text{ và } \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hệ có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

b. Với $a = -\frac{1}{2}$, hệ phương trình có dạng:



$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}.$$

Nhận xét rằng: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{-1/2}{1} = -\frac{1}{2}$ và $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = -\frac{1}{2} \neq \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{3}.$$

Vậy, hệ vô nghiệm.

Ví dụ 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} a_1x + y = b \\ a_2x + y = b \end{cases}$.

a. Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi a_1, a_2, b bất kì.

b. Hệ có thể có vô số nghiệm được không ?

Giải

a. Biến đổi hệ về dạng: $\begin{cases} y = -a_1x + b & (d_1) \\ y = -a_2x + b & (d_2) \end{cases}$

Nhận xét rằng, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ứng với hai phương trình trong hệ luôn cắt trục Oy (vì có hệ số tự do bằng nhau) tại điểm I(0, b).

Vậy, hệ phương trình luôn có nghiệm (0, b) với mọi a_1, a_2, b bất kì.

b. Hệ có vô số nghiệm khi: $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu định nghĩa hệ phương trình bậc nhất hai ẩn và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Thế nào là giải một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Câu hỏi 3: Hệ hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có bao nhiêu nghiệm ?

Câu hỏi 4: Tại sao có thể nói việc xác định số nghiệm của một hệ hệ phương trình bậc nhất hai ẩn được quy về việc xác định số điểm chung của hai đường thẳng trên cùng một hệ trục toạ độ.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh hoạ bằng đồ thị):

a. $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$.

Bài tập 2. Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh hoạ bằng đồ thị):

a. $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 3x - 9y = 3 \end{cases}$. b. $\begin{cases} x - y = 6 \\ 3x - 3y = 18 \end{cases}$.

Bài tập 3. Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh hoạ bằng đồ thị):

a. $\begin{cases} x - 0y = 2 \\ 0x + 4y = 8 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 0x + 6y = 24 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$.

Bài tập 4. Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - ay = -3 \end{cases}$.

a. Có nghiệm duy nhất với a = 2.

b. Vô nghiệm với $a = \dfrac{2}{3}$.

Bài tập 5. Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$.

a. Có vô số nghiệm với a = 3. b. Vô nghiệm với $a \neq 3$.

Bài tập 6. Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng các hệ phương trình sau luôn có nghiệm duy nhất:

a. $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x = n \end{cases}$. b. $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ y = m \end{cases}$.

Bài tập 7. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} a^2x - y = b \\ 2ax - y = b \end{cases}$.

a. Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi a, b bất kì.

b. Hệ có nghiệm duy nhất khi nào ?

c. Hệ có vô số nghiệm khi nào ?

Bài tập 8. Xác định a để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ ax - y = -3 \end{cases}$.

Minh hoạ bằng đồ thị.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Có nghiệm duy nhất $x = \frac{8}{7}$ và $y = -\frac{2}{7}$.

b. Có nghiệm duy nhất x = 0 và y = 0.

Bài tập 2. *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Vô nghiệm.

b. Vô số nghiệm dạng (x, x−6).

Bài tập 3. *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Có nghiệm duy nhất x = 2 và y = 2.

b. Có nghiệm duy nhất x = 9 và y = 4.

Bài tập 4. *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Với a = 2, hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - 2y = -3 \end{cases}$.

Nhận xét rằng: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}$ và $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất là $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{11}{4}$.

b. Với $a = \frac{2}{3}$, hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - \frac{2}{3}y = -3 \end{cases}$.

Nhận xét rằng: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}$ và $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-2/3} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{2} \neq \frac{c_1}{c_2} = -\frac{1}{3}$.

Vậy, hệ vô nghiệm.

Bài tập 5. Tham khảo bài tập 4.

Bài tập 6.

a. *Học sinh tự vẽ hình*, rồi đưa ra nhận xét về sự cắt nhau của hai đường thẳng x + 2y = 9 (đường xiên) và x = n (song song với Oy).

Vậy, hệ luôn có nghiệm duy nhất x = n và $y = \frac{1}{2}(9 - n)$.

b. *Học sinh tự vẽ hình*, rồi đưa ra nhận xét về sự cắt nhau của hai đường thẳng 3x − 2y = 8 (đường xiên) và y = m (song song với Ox).

Vậy, hệ luôn có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}(2m + 8)$ và y = m.

Bài tập 7.

a. Biến đổi hệ về dạng: $\begin{cases} y = a^2x + b & (d_1) \\ y = 2ax + b & (d_2) \end{cases}$.

Nhận xét rằng, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ứng với hai phương trình trong hệ luôn cắt trục Oy (vì có hệ số tự do bằng nhau) tại điểm I(0, b).

Vậy, hệ phương trình luôn có nghiệm (0, b) với mọi a, b bất kì.

b. Hệ có nghiệm duy nhất khi: (d_1) cắt (d_2) $\Leftrightarrow a^2 \neq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a(a-2) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2 \end{cases}.$$

c. Hệ có vô số nghiệm khi: $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow \Leftrightarrow a^2 = 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a(a-2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & a = 0 \\ & a - 2 = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & a = 0 \\ & a = 2 \end{aligned}\right..$$

Bài tập 8. Ta kí hiệu: $\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ x + y = 2 & (2) \\ ax - y = -3 & (3) \end{cases}$.

Xét hệ phương trình tạo bởi (1) và (2) là: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. (*)

Để hệ có nghiệm, điều kiện là (*) phải thoả mãn phương trình (3), tức là:

$a.1 - 1 = -3 \Leftrightarrow a = -2.$

Vậy, với $a = -2$ hệ có nghiệm.

CHỦ ĐỀ 7

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Chúng ta sẽ bắt đầu với ba cặp hệ phương trình.

1. Cho hai hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ (I) $\quad \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ (II)

Dễ dàng kiểm tra được rằng:

- Hệ (I) có nghiệm duy nhất (1, 2).
- Hệ (II) có nghiệm duy nhất (1, 2).

Vậy, hai hệ (I) và (II) có chung tập nghiêm. Khi đó, ta nói hai hệ (I) và (II) là *tương đương* với nhau.

2. Cho hai hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$ (III) $\quad \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ (IV)

Dễ dàng kiểm tra được rằng:

- Hệ (III) có vô số nghiệm dạng (x, 1 – x).
- Hệ (IV) có vô số nghiệm dạng (x, 1 – x).

Vậy, hai hệ (III) và (IV) có chung tập nghiêm. Khi đó, ta nói hai hệ (III) và (IV) là *tương đương* với nhau.

3. Cho hai hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$ (V) $\quad \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases}$ (VI)

Dễ dàng kiểm tra được rằng:

- Hệ (V) vô nghiệm.
- Hệ (VI) vô nghiệm.

Vậy, hai hệ (V) và (VI) có chung tập nghiêm. Khi đó, ta nói hai hệ (V) và (VI) là *tương đương* với nhau.

Từ đó, ta có được định nghĩa sau:

> 1. Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu mọi nghiệm của hệ này đều là nghiệm của hệ kia và ngược lại.
> 2. Phép biến đổi từ một hệ phương trình đến một hệ phương trình khác tương đương với nó được gọi là phép biến đổi tương đương.

2. CÁC ĐỊNH LÍ

Trong phần này chúng ta tiếp nhận ba định lí về phép biến đổi tương đương thường dùng trong quá trình giải các hệ phương trình.

Trước khi phát biểu định lí thứ nhất, chúng ta hãy nhìn lại hai hệ (I), (II) và dễ nhận thấy rằng:

" *Hệ (II) được suy ra từ hệ (I) bằng cách nhân cả hai vế của phương trình thứ nhất trong hệ (I) với 2* "

Như vậy, ta có định lí:

Định lí 1: Nếu nhân hai vế của một phương trình của hệ với một số $k \neq 0$ thì hệ phương trình mới tương đương với hệ đã cho.

Tức là, ta luôn có: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(a_1x + b_1y) = kc_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, với $k \neq 0$.

Mở rộng: Với $k_1, k_2 \neq 0$ thì: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1(a_1x + b_1y) = k_1c_1 \\ k_2(a_2x + b_2y) = k_2c_2 \end{cases}$.

<u>Thí dụ 1:</u> Tìm một hệ phương trình tương đương với hệ sau: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.

Giải

Bằng cách nhân hai vế của phương trình thứ hai trong hệ với 8, ta được hệ:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 16x - 8y = 8 \end{cases}$$

và theo định lí 1 thì hệ này tương đương với hệ đã cho.

<u>Nhận xét:</u> 1. Theo định lí 1, thì:

- Ta có thể nhân với một số bất kì $k \neq 0$.
- Có thể nhân cho phương trình thứ nhất hoặc phương trình thứ hai hoặc cả hai phương trình.

Vậy, với mỗi hệ phương trình sẽ có vô số hệ tương đương với nó.

2. Với yêu cầu "*Tìm một hệ phương trình tương đương với một hệ cho trước*" như trong thí dụ trên, mỗi chúng ta được tuỳ ý lựa chọn phép nhân riêng cho mình. Tuy nhiên, với yêu cầu "*Hãy giải thích tại sao hai hệ phương trình tương đương*" thì chúng ta cần lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chỉ ra một cách chính xác phép biến đổi tương đương (hoặc nhiều phép) đã được sử dụng để biến đổi hệ này thành hệ kia.

Cách 2: Sử dụng định nghĩa.

Thí dụ 2: Giải thích tại sao hai hệ phương trình sau tương đương:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ y - x = -2 \end{cases}.$$

Giải

Gọi hai hệ phương trình theo thứ tự là (a) và (b).

Hai hệ phương trình (a) và (b) tương đương vì khi nhân hai vế của phương trình thứ hai trong hệ (a) với −1 ta được hệ (b).

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên chúng ta đã sử dụng cách 1. Đương nhiên, cũng có thể sử dụng cách 2 để giải, xong cách giải này sẽ phức tạp hơn rất nhiều bởi chúng ta cần đi tìm nghiệm cho hai hệ phương trình.

Trước khi phát biểu định lí thứ hai, chúng ta hãy nhìn lại hai hệ (III), (IV) và dễ nhận thấy rằng:

" Hệ (IV) được suy ra từ hệ (III) bằng cách trừ theo vế hai phương trình của hệ (III) để được một phương trình mới rồi kết hợp phương trình này với phương trình thứ hai trong hệ (III) "

hoặc:

" Hệ (III) được suy ra từ hệ (IV) bằng cách cộng theo vế hai phương trình của hệ (IV) để được một phương trình mới rồi kết hợp phương trình này với phương trình thứ hai trong hệ (IV) "

Như vậy, ta có định lí:

Định lí 2: Nếu cộng hay trừ theo vế hai phương trình của hệ đã cho được một phương trình mới thì hệ phương trình lập bởi phương trình này với một trong hai phương trình cũ là tương đương với hệ đã cho.

Tức là, ta luôn có:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y - c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y - c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1x + b_1y - c_1) \pm (a_2x + b_2y - c_2) = 0 \\ a_2x + b_2y - c_2 = 0 \end{cases}.$$

Mở rộng: Với $k_1, k_2 \neq 0$ thì:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y - c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y - c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1(a_1x + b_1y - c_1) \pm k_2(a_2x + b_2y - c_2) = 0 \\ a_2x + b_2y - c_2 = 0 \end{cases}$$

Chú ý: Kết quả trong phần mở rộng, sẽ giúp chúng ta xây dựng được *phương pháp cộng* để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Thí dụ 3: Tìm một hệ phương trình tương đương với hệ sau: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.

Giải

Bằng cách cộng theo vế hai phương trình của hệ, ta được $3x + 2y = 5$, rồi kết hợp phương trình này với phương trình thứ nhất trong hệ, ta được:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

và theo định lí 2 thì hệ này tương đương với hệ đã cho.

Thí dụ 4: Giải thích tại sao hai hệ phương trình sau tương đương:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases}.$$

Giải

Ta biến đổi: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x - 2y) + (x - 3y) = 2 + 8 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5y = 10 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases}.$$

Vậy, hai hệ phương trình đã cho là tương đương.

Nhận xét: Cách làm trong thí dụ trên, chỉ có tính minh hoạ bởi rất khó có thể định hình được đầy đủ các phép biến đổi. Do đó, trong những trường hợp này chúng ta sử dụng định nghĩa, như sau

- Giải hệ thứ nhất ta được nghiệm duy nhất $(-1, -3)$.
- Giải hệ thứ hai ta được nghiệm duy nhất $(-1, -3)$.

Vậy, hai hệ phương trình tương đương với nhau.

Cuối cùng, trước khi phát biểu định lí thứ ba, chúng ta hãy xem hai hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ (c) $\qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ (d)

Nhận xét rằng, trong hệ (c) nếu thay phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất ta được: $x + 3.2 = 5 \Leftrightarrow x = -1$.

Như vậy, hai hệ (c), (d) là tương đương và phép thế hẳn cũng là một phép biến đổi tương đương.

Như vậy, ta có định lí:

Định lí 3: Nếu từ một phương trình của hệ đã cho ta biểu thị một ẩn số theo ẩn số kia, rồi thế vào phương trình thứ hai của hệ, được một phương trình mới có một ẩn số thì hệ phương trình lập bởi phương trình này với phương trình phương trình thứ nhất của hệ là tương đương với hệ đã cho.

Tức là, ta luôn có (giả sử $b_1 \neq 0$):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{b_1}(c_1 - a_1x) \\ a_2x + b_2.\dfrac{1}{b_1}(c_1 - a_1x) = c_2 \end{cases}.$$

Chú ý: Kết quả của định lí này, sẽ giúp chúng ta xây dựng được *phương pháp thế* để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Sử dụng ba định lí đã biết tìm ba hệ phương trình tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases}.$$

Giải

Ta lần lượt:

1. Sử dụng định lí 1, ta được: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = 1 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$.

2. Sử dụng định lí 2, ta được: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ (x - y) - (x - 3y) = 2 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 2y = -6 \end{cases}.$$

3. Sử dụng định lí 3, ta được: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ (y + 2) - 3y = 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ -2y = 6 \end{cases}.$$

Nhận xét: Trong lời giải trên, khi sử dụng định lí 2 và định lí 3 nếu chúng ta chỉ cần sử dụng thêm một lần nữa định lí 3 sẽ thu được nghiệm của hệ.

Ví dụ 2: Giải thích tại sao hai hệ phương trình sau tương đương:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = \dfrac{3}{5} \end{cases}.$$

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 5y = 3 \end{cases} \overset{:5}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = \dfrac{3}{5} \end{cases}.$$

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất (2, 1).
- Giải hệ thứ hai, ta được nghiệm duy nhất (2, 1).

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

Nhận xét: Tới đây, chúng ta có thể khẳng định được rằng với hai hệ phương trình tương đương trong trường hợp có nghiệm duy nhất luôn tồn tại hai cách chứng minh (sử dụng các phép biến đổi tương đương và sử dụng định nghĩa).

Ví dụ 3: Giải thích tại sao hai hệ phương trình sau tương đương:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ 4x + 8y = 8 \end{cases}.$$

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \overset{\times 3}{\underset{\times 2}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ 4x + 8y = 8 \end{cases}$.

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ có vô số nghiệm thoả mãn (2 − 2y, y).
- Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ có vô số nghiệm thoả mãn (2 − 2y, y).

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

Nhận xét: Tới đây, chúng ta có thể khẳng định được rằng với hai hệ phương trình tương đương trong trường hợp có vô số nghiệm luôn tồn tại hai cách chứng minh (sử dụng các phép biến đổi tương đương và sử dụng định nghĩa).

Ví dụ 4: Giải thích tại sao các cặp hệ phương trình sau tương đương:

a. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ và $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \underset{\times 3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$.

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ vô nghiệm.
- Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ vô nghiệm.

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

b. Ta thực hiện:

- Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ vô nghiệm.
- Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ vô nghiệm.

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

Nhận xét: Như vậy, với hai hệ phương trình tương đương trong trường hợp vô nghiệm cách tốt nhất là sử dụng định nghĩa để chứng minh.

Ví dụ 5: Tìm giá trị của m để các cặp hệ phương trình sau tương đương:

a. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ và $\begin{cases} mx - y = m \\ x - y = -1 \end{cases}$. b. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x + 8y = 5 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$.

Giải

a. Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất $x = 3$ và $y = 4$.

Do đó, muốn hai hệ tương đương thì (3, 4) cũng phải là nghiệm của hệ còn lại, tức là: $\begin{cases} m.3 - 4 = m \\ 3 - 4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 4 \\ -1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Thử lại, với $m = 2$ hệ có dạng: $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$

dễ thấy, hệ trên có nghiệm duy nhất (3, 4).

Vậy, với $m = 2$ hai hệ phương trình đã cho tương đương.

b. Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất $x = -1$ và $y = 1$.

Do đó, muốn hai hệ tương đương thì (−1, 1) cũng phải là nghiệm của hệ còn lại, tức là: $\begin{cases} -1 + 2.1 = 1 \\ 2(-1) + m.1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$.

Thử lại, với m = 4 hệ có dạng: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

dễ thấy, hệ trên có vô số nghiệm, do đó không thoả mãn.

Vậy, không tồn tại m để hai hệ phương trình đã cho tương đương.

Nhận xét: Như vậy, với yêu cầu "*Tìm điều kiện của tham số để hai hệ phương trình tương đương*" trong trường hợp có nghiệm duy nhất chúng ta nhất thiết phải thực hiện bước thử lại, bởi khi hệ thứ nhất có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) còn hệ thứ hai có vô số nghiệm và nhận (x_0, y_0) làm một nghiệm thì hai hệ không thể được gọi là tương đương.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu định nghĩa hai hệ phương trình tương đương và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Nếu cặp nghiệm (x_0, y_0) của hệ phương trình thứ nhất cũng là nghiệm của hệ thứ hai thì có thể khẳng định được rằng hai hệ đó là tương đương với nhau không ? Vì sao ?

Câu hỏi 3: Thế nào là một phép biến đổi tương đương.

Câu hỏi 4: Phát biểu định lí 1 và lấy ví dụ minh hoạ.

Câu hỏi 5: Phát biểu định lí 2 và lấy ví dụ minh hoạ.

Câu hỏi 6: Phát biểu định lí 3 và lấy ví dụ minh hoạ.

Câu hỏi 7: Nêu các cách để chứng minh 2 hệ phương trình là tương đương với nhau

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Sử dụng ba định lí đã biết tìm ba hệ phương trình tương đương với mỗi hệ sau:

a. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x + 8y = 5 \end{cases}$.   b. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$.

Bài tập 2. Giải thích tại sao các cặp hệ phương trình sau tương đương:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ y = 1 \end{cases}$.   b. $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ và $\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$.

Bài tập 3. Giải thích tại sao các cặp hệ phương trình sau tương đương:

a. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ x - \dfrac{3}{2}y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.   b. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 10x + 15y = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1 \\ 4x + 6y = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} 8x + 9y = 11 \\ 16x + 18y = 3 \end{cases}$.

Bài tập 4. Tìm giá trị của m để các cặp hệ phương trình sau tương đương:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = m \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3mx + (m^2 + 8)y = 4m + 2 \end{cases}$.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2.

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \underset{\times 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} \overset{-}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất (2, 1).
- Giải hệ thứ hai, ta được nghiệm duy nhất (2, 1).

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \underset{\times 3}{\overset{\times 2}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 6x + 9y = 18 \end{cases} \overset{-}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 7y = 14 \end{cases} \underset{:7}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất (0, 2).
- Giải hệ thứ hai, ta được nghiệm duy nhất (0, 2).

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

Bài tập 3.

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases} \underset{:6}{\overset{\times 2}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ x - \frac{3}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ có vô số nghiệm thoả mãn $(x, \frac{2x-1}{3})$.
- Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ có vô số nghiệm thoả mãn $(x, \frac{2x-1}{3})$.

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 10x+15y=2 \end{cases} \overset{\times\frac{1}{6}}{\underset{\times\frac{2}{5}}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1 \\ 4x+6y=\dfrac{4}{5} \end{cases}.$$

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ vô nghiệm.
- Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ vô nghiệm.

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

c. Ta lần lượt:

- Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ vô nghiệm.
- Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ vô nghiệm.

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

Bài tập 4.

a. Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất $x = 2$ và $y = 1$.

Do đó, muốn hai hệ tương đương thì $(2, 1)$ cũng phải là nghiệm của hệ còn lại, tức là: $\begin{cases} 2+1=3 \\ 2.2-1=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=3 \\ m=3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$

Thử lại, với $m = 2$ hệ có dạng: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

dễ thấy, hệ trên có nghiệm duy nhất $(2, 1)$.

Vậy, với $m = 3$ hai hệ phương trình đã cho tương đương.

b. Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất $x = -1$ và $y = 1$.

Do đó, muốn hai hệ tương đương thì $(-1, 1)$ cũng phải là nghiệm của hệ còn lại, tức là:

$$\begin{cases} -1+3.1=2 \\ 3m(-1)+(m^2+8).1=4m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=2 \\ m^2-7m+6=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad m^2 - m - 6m + 6 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-6) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 6 \end{array}\right.$

Thử lại:

- Với $m = 1$ hệ có dạng: $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x + 9y = 6 \end{cases}$

dễ thấy, hệ có vô số nghiệm, do đó $m = 1$ không thoả mãn..

Vậy, với $m = 3$ hai hệ phương trình đã cho tương đương.

- Với $m = 6$ hệ có dạng: $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 18x + 44y = 26 \end{cases}$

dễ thấy, hệ trên có nghiệm duy nhất $(-1, 1)$.

Vậy, với $m = 6$ hai hệ phương trình đã cho tương đương.

CHỦ ĐỀ 8

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để xây dựng được thuật toán giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng, chúng ta hãy bắt đầu với việc giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases}.$$

Lần lượt thực hiện các phép biến đổi hệ về dạng:

$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + 6y = 22 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Bước 1}}$ *Biến đổi hệ số của ẩn x trong hệ bằng nhau, bằng cách nhân phương trình thứ hai với 2.*

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -15 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Bước 2}}$ *Trừ theo vế hai phương trình để khử ẩn x và thu được một phương trình chỉ chứa y.*

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Bước 3}}$ *Giải phương trình chỉ chứa ẩn y, để tìm giá trị của y.*

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 2x + 3 = 7 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Bước 4}}$ *Thay giá trị của y vào phương trình còn lại, để được một phương trình chỉ chứa ẩn x.*

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Bước 5}}$ *Giải phương trình chỉ chứa ẩn x, rồi kết luận về nghiệm của hệ.*

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (2, 3).

Từ đó, để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi để các hệ số của một ẩn (giả sử x) có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

Bước 2: Cộng hoặc trừ từng vế của hai phương trình để khử ẩn x.

Bước 3: Giải phương trình tìm giá trị của y.

Bước 4: Thay giá trị y vừa tìm được vào một trong hai phương trình ban đầu để tìm giá trị của x.

Bước 5: Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

Chú ý: 1. Để cho gọn lời giải, thông thường các bước 3 và bước 4 được kết hợp lại với nhau.

2. Trong một vài trường hợp, bước 1 và bước 3 không cần thực hiện, thí dụ:

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 4 - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Thí dụ 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$.

Giải

Ta lựa chọn một trong hai cách khử:

Cách 1: Ta thực hiện phép khử x: $\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases} \overset{\times 4}{\underset{\times 3}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 12x + 16y = 72 \\ 12x - 9y = -3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25y = 75 \\ 12x - 9y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 12x - 9.3 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (2 ; 3).

Cách 2: Ta thực hiện phép khử 9:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases} \overset{\times 3}{\underset{\times 4}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 9x + 12y = 54 \\ 16x - 12y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x = 50 \\ 9x + 12y = 54 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 9.2 + 12y = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (2 ; 3).

Nhận xét: 1. Qua thí dụ trên, các em học sinh hiểu thêm rằng việc nhân hệ số để một ẩn trong hệ có hệ số bằng nhau hoặc đối nhau, trong nhiều trường hợp cần thực hiện phép nhân ở cả hai phương trình của hệ (trong thí dụ là 3 và 4 cho mỗi phương trình).

2. Trong thực tế, chúng ta sẽ gặp dạng toán cần thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Thiết lập hệ phương trình.

Bước 2: Giải hệ nhận được trong bước 1.

Thí dụ 2: Xác định các hệ số a, b của hàm số $y = ax + b$, biết rằng đồ thị hàm số của nó đi qua hai điểm $A(2, 1)$ và $B(1, 2)$.

Giải

Với giả thiết:

- $A(2, 1)$ thuộc đồ thị hàm số, suy ra: $1 = a.2 + b \Leftrightarrow 2a + b = 1$. (1)
- $B(1, 2)$ thuộc đồ thị hàm số, suy ra: $2 = a.1 + b \Leftrightarrow a + b = 2$. (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình: $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -1 + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$.

Vậy, hàm số có dạng $y = -x + 3$.

Chú ý: Chúng ta đều đã biết, mọi đường thẳng trong mặt phẳng đều có phương trình dạng $ax + by = c$, với a, b không đồng thời bằng 0 và một đường thẳng được hoàn toàn xác định khi biết hai điểm phân biệt thuộc nó. Thí dụ tiếp theo sẽ minh họa cách lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.

Thí dụ 3: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2, -6)$ và $B(4, 3)$.

Giải

Giả sử đường thẳng có phương trình $ax + by = c$.

Với giả thiết:

- $A(-2, -6)$ thuộc đường thẳng, suy ra: $a.(-2) + b(-6) = c \Leftrightarrow -2a - 6b = c$. (1)
- $B(4, 3)$ thuộc đường thẳng, suy ra: $a.4 + b.3 = c \Leftrightarrow 4a + 3b = c$. (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2a - 6b = c \\ 4a + 3b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 6b = c \\ 8a + 6b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 3c \\ 8a + 6b = 2c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c}{2} \\ 8.\dfrac{c}{2} + 6b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c}{2} \\ b = -\dfrac{c}{3} \end{cases}.$$

Vậy, đường thẳng có phương trình: $\dfrac{c}{2}x - \dfrac{c}{3}y = c \Leftrightarrow 3x - 2y = 6$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 1 \\ \sqrt{2}x + 3\sqrt{3}y = 4\sqrt{6} \end{cases}$.

Giải

a. Ta thực hiện:

$$\begin{cases}5x+3y=1\\2x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+3y=1\\-6x-3y=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x=4\\5x+3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\5(-4)+3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=7\end{cases}$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (– 4 ; 7).

b. Ta thực hiện:

$$\begin{cases}\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1\\\sqrt{2}x+3\sqrt{3}y=4\sqrt{6}\end{cases}\underset{\times\sqrt{3}}{\overset{\times\sqrt{2}}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}\sqrt{6}x-2y=\sqrt{2}\\\sqrt{6}x+9y=12\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}11y=11\sqrt{2}\\\sqrt{6}x-2y=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\sqrt{2}\\\sqrt{6}x-2\sqrt{2}=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=\sqrt{2}\end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất ($\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$).

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải trên:

1. Ở câu a), ta chỉ cần nhân phương trình thứ hai của hệ với –3 sẽ nhận được hệ số của y trong hệ là đối nhau.
2. Ở câu b), ta cần nhân hai phương trình của hệ theo thứ tự với $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$ mới nhận được hệ số của x trong hệ là bằng nhau.

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}\\3x-2y=5\end{cases}$. b. $\begin{cases}\dfrac{x^2+y-6}{x}=x-2\\x+3y=8\end{cases}$.

Giải

a. Điều kiện $y\neq 0$.

Ta thực hiện:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}\\3x-2y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=3y\\3x-2y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=0\\3x-2y=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x-9y=0\\6x-4y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y=10\\6x-9y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\6x-9.2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (3; 2).

b. Điều kiện $x \neq 0$.

Ta thực hiện:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + y - 6}{x} = x - 2 \\ x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y - 6 = x(x - 2) \\ x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 18 \\ x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (2; 2).

Nhận xét: Hẳn các em học sinh cũng thấy, ở dạng ban đầu cả hai hệ phương trình trong ví dụ trên đều không phải là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Tuy nhiên, chỉ cần một vài phép biến đổi đơn giản chúng ta đã chuyển được về hệ bậc nhất hai ẩn, để từ đó sử dụng phương pháp cộng tìm nghiệm.

Ví dụ 3: Xác định các hệ số a, b của phương trình: $ax^2 - x + b = 0$. Biết nó có hai nghiệm $x_1 = -2$ và $x_2 = 3$.

Giải

Với giả thiết:

- $x_1 = -2$ là nghiệm của phương trình, suy ra:

$$a(-2)^2 - (-2) + b = 0 \Leftrightarrow 4a + b = -2. \quad (1)$$

- $x_2 = 3$ là nghiệm của phương trình, suy ra: $a.3^2 - 3 + b = 0 \Leftrightarrow 9a + b = 3$. (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a + b = -2 \\ 9a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 5 \\ 9a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 9.1 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có dạng $x^2 - x - 6 = 0$.

Ví dụ 4: Cho đa thức: $f(x) = ax^3 - (2 - a)x^2 + (5 - 3b)x - 4b$.

a. Xác định các hệ số a, b của đa thức, biết nó chia hết cho $x - 3$ và $x + 1$.

b. Với a, b thìm được ở trên, hãy phân tích đa thức f(x) thành nhân tử.

Giải

a. Với giả thiết:

- f(x) chia hết $x - 3$, suy ra:

$$f(3) = 0 \Leftrightarrow a.3^3 - (2 - a).3^2 + (5 - 3b).3 - 4b = 0$$

$$\Leftrightarrow 36a - 13b = 3. \quad (1)$$

- $f(x)$ chia hết $x + 1$, suy ra:

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow a.(-1)^3 - (2 - a).(-1)^2 + (5 - 3b).(-1) - 4b = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -7. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 36a - 13b = 3 \\ b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36a - 13.(-7) = 3 \\ b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{22}{9} \\ b = -7 \end{cases}.$$

b. Với kết quả trên, $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = -\frac{22}{9}x^3 - (2 + \frac{22}{9})x^2 + (5 + 21)x + 28$$

$$= -\frac{22}{9}x^3 - \frac{40}{9}x^2 + 26x + 28 = (x-3)(x+1)\left(-\frac{22}{9}x - \frac{28}{3}\right).$$

Nhận xét: Để thực hiện được ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng tới kết quả:

"*Một đa thức f(x) chia hết cho x – a khi và chỉ khi f(a) = 0*"

Các ví dụ tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới hệ phương trình chứa tham số.

Ví dụ 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases}$.

a. Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất.

b. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm (x, y) thoả mãn $x < 1$ và $y < 1$.

c. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x và y không phụ thuộc vào m.

Giải

a. Nhận xét rằng với $m = 0$, hệ có dạng: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0$ hệ có nghiệm duy nhất.

Với $m \neq 0$, biến đổi hệ về dạng: $\begin{cases} x + my = 1 \\ m^2x - my = -m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + 1)x = 1 - m^2 \\ x + my = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1} \\ \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1} + my = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1} \\ y = \dfrac{2m}{m^2 + 1} \end{cases}.$$

Tức là, với $m \neq 0$ hệ cũng có nghiệm duy nhất.

Vậy, với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất.

b. Để nghiệm (x, y) của hệ thoả mãn x < 1 và y < 1, điều kiện là:

$$\begin{cases} \dfrac{1-m^2}{m^2+1} < 1 \\ \dfrac{2m}{m^2+1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m^2 < m^2+1 \\ 2m < m^2+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 0 \\ (m-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Vậy, với $m \neq 0$ và $m \neq 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Nhận xét rằng: $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{1-m^2}{m^2+1}\right)^2 + \left(\dfrac{2m}{m^2+1}\right)^2 = \dfrac{(1-m^2)^2+4m^2}{(m^2+1)^2}$

$$= \frac{m^4-2m^2+1+4m^2}{(m^2+1)^2} = \frac{m^4+2m^2+1}{(m^2+1)^2} = \frac{(m^2+1)^2}{(m^2+1)^2} = 1$$

Vậy, ta thu được hệ thức $x^2 + y^2 = 1$.

Chú ý:

1. Trong lời giải câu a), nếu chúng ta không xét riêng trường hợp m = 0 và m ≠ 0 sẽ vi phạm phép biến đổi tương đương.
2. Trong phạm vi kiến thức THCS, khó có thể giải thích một cách đầy đủ cho các em học sinh hiểu được tại sao lại có được nhận xét về $x^2 + y^2$. Tuy nhiên, đối với các em học sinh thực sự muốn nâng cao kiến thức thì hãy tham khảo cuốn ***Phương pháp giải toán Đại số*** của Lê Hồng Đức do NXB Hà Nội ấn hành.

Ví dụ 6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = m + 1 \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với m = 1.

b. Chứng tỏ rằng với mọi $m \neq \pm 1$ hệ luôn có nghiệm duy nhất.

c. Tìm giá trị của m để nghiệm duy nhất (x, y) của hệ thoả mãn x + y < 0.

d. Tìm m nguyên để hệ có nghiệm nguyên duy nhất.

Giải

a. Với m = 1, hệ có dạng: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm thoả mãn (x, 2 – 2).

b. Nhận xét rằng với m = 0, hệ có dạng: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$ m = 0 hệ có nghiệm duy nhất.

Với $m \neq 0$, biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} mx + m^2y = 2m \\ mx + y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 1)y = m - 1 \\ mx + y = m + 1 \end{cases}$$

$$\overset{m \neq \pm 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = \dfrac{1}{m+1} \\ mx + \dfrac{1}{m+1} = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m+2}{m+1} \\ y = \dfrac{1}{m+1} \end{cases}.$$

Tức là, với $m \neq 0$ và $m \neq \pm 1$ hệ cũng có nghiệm duy nhất.

Vậy, với mọi $m \neq \pm 1$ hệ luôn có nghiệm duy nhất.

c. Để nghiệm duy nhất của hệ thoả mãn $x + y < 0$, điều kiện là:

$$\frac{m+2}{m+1} + \frac{1}{m+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{m+3}{m+1} < 0 \Leftrightarrow -3 < m < -1,$$

thoả mãn điều kiện duy nhất nghiệm.

Vậy, với $-3 < m < -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Để nghiệm nguyên duy nhất của hệ nguyên điều kiện cần là $m + 1$ là ước của 1 (gồm có ± 1), ta lập bảng:

$m + 1$	-1	1
m	-2	0
$y = \dfrac{1}{m+1}$	-1	1
$x = \dfrac{m+2}{m+1}$	0	2

Vậy, với $m = -2$ hoặc $m = 0$ hệ có nghiệm nguyên duy nhất.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các bước cần thực hiện để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng.

Câu hỏi 2: Tại sao có thể nói việc giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn cũng chính là việc giải và biện luận một phương trình bậc nhất một ẩn.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} 2x + 7y = 9 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} 2x + 7y = 1 \\ 3x + 5y = -4 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$.

d. $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x - 4y = -5 \end{cases}$.

Bài tập 2. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ x + y = 10 \end{cases}$. b. $\begin{cases} \dfrac{y^2 + 2x - 8}{y} = y - 3 \\ x + y = 10 \end{cases}$.

Bài tập 3. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{y} = 1 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = -1 \end{cases}$. b. $\begin{cases} \dfrac{5}{x+3} - \dfrac{9}{y-2} = 100 \\ \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{7}{y-2} = 308 \end{cases}$.

Bài tập 4. Cho hàm số: $y = ax + b$.

Xác định các hệ số a, b của hàm số, biết rằng đồ thị hàm số của nó đi qua hai điểm:

a. A(1, 3) và B(3, 2). b. A(1, −1) và B(3, 3).

Bài tập 5. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm:

a. A(1, 3) và B(3, 2). b. A(1, −1) và B(3, 3).

Bài tập 6. Cho phương trình: $x^2 - ax + b = 0$.

Xác định các hệ số a, b của phương trình, biết nó có hai nghiệm:

a. $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$. b. $x_1 = -3$ và $x_2 = 2$.

Bài tập 7. Cho đa thức: $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - a$.

Xác định các hệ số a, b của đa thức, biết nó chia hết cho $x - 1$ và $x - 3$.

Bài tập 8. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 0 \\ mx + y = m + 1 \end{cases}$.

a. Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất.

b. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm (x, y) thoả mãn $x < 1$ và $y < 1$.

Bài tập 9. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m = -1$.

b. Chứng tỏ rằng với mọi $m \neq \pm 1$ hệ luôn có nghiệm duy nhất thoả mãn $x - y = 1$

c. Tìm giá trị của m để nghiệm duy nhất (x, y) của hệ thoả mãn $x^2 - y^2 < 0$.

d. Tìm m nguyên để hệ có nghiệm nguyên duy nhất.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $(1, 1)$. b. $(8, 6)$. c. $(-3, 1)$. d. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Bài tập 2.

a. $(4, 6)$. b. $(1, 2)$.

Bài tập 3.

a. Điều kiện $x, y \neq 0$.

Đặt $\frac{1}{x} = u$ và $\frac{1}{y} = v$, hệ được chuyển về dạng:

$$\begin{cases} 5u + 3v = 1 \\ 2u + v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u + 3v = 1 \\ -6u - 3v = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -u = 4 \\ 5u + 3v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -4 \\ 5(-4) + 3v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -4 \\ v = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = -4 \\ \frac{1}{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{7} \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{7})$.

b. Điều kiện $x \neq -3$ và $y \neq 2$.

Đặt $\frac{5}{x+3} = 2u$ và $\frac{9}{y-2} = 2v$, hệ được chuyển về dạng:

$$\begin{cases} 5u - 9v = 50 \\ 3u + 7v = 154 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 28 \\ v = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x+3} = 56 \\ \frac{9}{y-2} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{163}{56} \\ y = \frac{49}{20} \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm $x = -\frac{163}{56}$ và $y = \frac{49}{20}$.

Bài tập 4.

a. Với giả thiết:

- $A(1, 3)$ thuộc đồ thị hàm số, suy ra: $3 = a.1 + b \Leftrightarrow a + b = 3$. (1)
- $B(3, 2)$ thuộc đồ thị hàm số, suy ra: $2 = a.3 + b \Leftrightarrow 3a + b = 2$. (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -1 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{7}{2} \end{cases}.$$

Vậy, hàm số có dạng $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

b. Với giả thiết:

- $A(1, -1)$ thuộc đồ thị hàm số, suy ra: $-1 = a.1 + b \Leftrightarrow a + b = -1$. (1)
- $B(3, 3)$ thuộc đồ thị hàm số, suy ra: $3 = a.3 + b \Leftrightarrow 3a + b = 3$. (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2 + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}.$$

Vậy, hàm số có dạng $y = 2x - 3$.

Bài tập 5. Giả sử đường thẳng có phương trình $ax + by = c$.

a. Với giả thiết:

- $A(1, 3)$ thuộc đường thẳng, suy ra: $a.1 + b.3 = c \Leftrightarrow a + 3b = c$. (1)
- $B(3, 2)$ thuộc đường thẳng, suy ra: $a.3 + b.2 = c \Leftrightarrow 3a + 2b = c$. (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + 3b = c \\ 3a + 2b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 9b = 3c \\ 3a + 2b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7b = 2c \\ 3a + 2b = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{2c}{7} \\ 3a + 2.\dfrac{2c}{7} = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{2c}{7} \\ a = \dfrac{c}{7} \end{cases}$$

Vậy, đường thẳng có phương trình: $\frac{c}{7}x + \frac{2c}{7}y = c \Leftrightarrow x + 2y = 7$.

b. Với giả thiết:

- $A(1, -1)$ thuộc đường thẳng, suy ra: $a.1 + b.(-1) = c \Leftrightarrow a - b = c$. (1)
- $B(3, 3)$ thuộc đường thẳng, suy ra: $a.3 + b.3 = c \Leftrightarrow 3a + 3b = c$. (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a - b = c \\ 3a + 3b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 3c \\ 3a + 3b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 4c \\ 3a + 3b = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2c}{3} \\ 3.\dfrac{2c}{3} + 3b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2c}{3} \\ b = -\dfrac{c}{3} \end{cases}$$

Vậy, đường thẳng có phương trình: $\frac{2c}{3}x - \frac{c}{3}y = c \Leftrightarrow 2x - y = 3$.

Bài tập 6.

a. Với giả thiết:

- $x_1 = 1$ là nghiệm của phương trình, suy ra: $1^2 - a.1 + b = 0 \Leftrightarrow a - b = 1$. (1)
- $x_2 = 3$ là nghiệm của phương trình, suy ra: $3^2 - a.3 + b = 0 \Leftrightarrow 3a - b = 9$. (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ 3a - b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 3a - b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ 3.4 - b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có dạng $x^2 - 4x + 3 = 0$.

b. $a = -1$ và $b = -6$.

Bài tập 7. Với giả thiết:

- f(x) chia hết $x - 1$, suy ra: $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - a.1^2 + b.1 - a = 0 \Leftrightarrow 2a - b = 1$. (1)
- f(x) chia hết $x - 3$, suy ra:

$$f(3) = 0 \Leftrightarrow 3^3 - a.3^2 + b.3 - a = 0 \Leftrightarrow 10a - 3b = 27. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 10a - 3b = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 3b = 3 \\ 10a - 3b = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 24 \\ 6a - 3b = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ 6.6 - 3b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 11 \end{cases}$$

CHỦ ĐỀ 9 GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để xây dựng được thuật toán giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, chúng ta hãy bắt đầu với việc giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & (1) \\ x + 3y = 11 & (2) \end{cases}.$$

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi:

$y = 7 - 2x.$ (3) $\xrightarrow{\text{Bước 1}}$ *Chọn phương trình (1) và biểu thị ẩn y theo x.*

Thay (3) vào phương trình trên (2), ta được:

$x + 3(7 - 2x) = 11$ $\xrightarrow{\text{Bước 2}}$ *Thay biểu thức của y vào phương trình (2), rồi tìm giá trị của x.*

$\Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2.$

Thay x = 2 vào (3), ta được:

$y = 7 - 2.2 = 3.$ $\xrightarrow{\text{Bước 3}}$ *Thay giá trị của x vào biểu thức trong bước 1, để tìm y.*

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (2, 3). $\xrightarrow{\text{Bước 4}}$ *Kết luận nghiệm*

Từ đó, để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biểu thị một ẩn (giả sử x) theo ẩn kia từ một trong hai phương trình.

Bước 2: Thay biểu thức của x vào phương trình kia rồi tìm giá trị của y.

Bước 3: Thay giá trị của y vừa tìm được vào biểu thức của x để tìm giá trị của x.

Bước 4: Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

Thí dụ 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x + 3y = 1 & (1) \\ 2x + y = -1 & (2) \end{cases}.$

Giải

Ta lựa chọn một trong hai cách rút:

Cách 1: Ta thực hiện phép rút y:

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $y = -2x - 1.$ (3)

Thay (3) vào phương trình vào (1), ta được:

$5x + 3(-2x - 1) = 1 \Leftrightarrow -x = 4 \Leftrightarrow x = -4.$

Thay $x = -4$ vào (3), ta được: $y = -2.(-4) - 1 = 7.$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (–4, 7).

Cách 2: Ta thực hiện phép rút x:

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $x = \frac{1}{2}(-y - 1)$. (4)

Thay (4) vào phương trình vào (1), ta được:

$$5.\frac{1}{2}(-y-1) + 3y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y = \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = 7.$$

Thay y = 7 vào (4), ta được: $x = \frac{1}{2}(-7 - 1) = -4$.

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (−4, 7).

Nhận xét: 1. Như chúng ta đã biết , khi sử dụng phương pháp cộng chúng ta có thể lựa chọn hai cách khử. Và qua thí dụ trên, các em học sinh hiểu thêm rằng đối với phương pháp thế chúng ta cũng có thể lựa chọn việc rút x hoặc rút y. Tuy nhiên, để giảm thiểu độ phức tạp trong tính toán chúng ta thường chọn việc rút ẩn có hệ số nhỏ nhất trong hệ, cụ thể với hệ trên việc rút y từ phương trình (2) là lựa chọn tốt nhất.

2. Ưu điểm của phương pháp thế, được thể hiện nhiều trong bài toán giải và biện luận, vì ở đó số nghiệm của hệ phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình bậc nhất một ẩn thu được.

Thí dụ 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ mx + 2y = m & (2) \end{cases}$. Tìm m để:

a. Hệ có vô số nghiệm.

b. Có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

Giải

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $y = -x + 1$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (2), ta được:

$$mx + 2(-x + 1) = m \Leftrightarrow (m - 2)x = m - 2. \quad (4)$$

a. Hệ có vô số nghiệm khi: (4) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy, với m = 2 hệ có vô số nghiệm.

b. Hệ có nghiệm duy nhất khi: (4) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Vậy, với $m \neq 2$ hệ có nghiệm duy nhất và nghiệm duy nhất là

$$x = 1 \overset{(3)}{\Rightarrow} y = -1 + 1 = 0, \text{ tức là có nghiệm } (1, 0).$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 3 & (1) \\ 3x + 4y = 7 & (2) \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình.

b. Minh hoạ nghiệm của hệ bằng đồ thị.

Giải

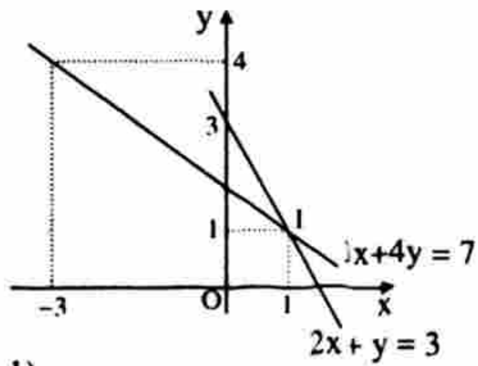
a. Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $y = -2x + 3$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (2), ta được:

$3x + 4(-2x + 3) = 7 \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Thay $x = 1$ vào (3), ta được: $y = -2.1 + 3 = 1$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (1, 1).



b. Minh hoạ nghiệm bằng đồ thị:

- Toạ độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1): $2x + y = 3$ và (d_2): $3x + 4y = 7$ là I(1 ; 1).
- Đường thẳng (d_1): $2x + y = 3$ đi qua điểm A (0 ; 3).
- Đường thẳng (d_2): $3x + 4y = 7$ đi qua điểm B (−3 ; 4).

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 3y = -2 & (1) \\ m^2x - 6y = 4 & (2) \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với m = 2.

b. Tìm giá trị của m để hệ có vô số nghiệm.

Giải

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $y = \frac{1}{3}(-mx - 2)$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (2), ta được:

$$m^2x - 6.\frac{1}{3}(-mx - 2) = 4 \Leftrightarrow (m^2 + 2m)x = 0. \quad (4)$$

a. Với m = 2, phương trình (4) có dạng: $8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Thay x = 0 và m = 2 vào (3) ta được: $y = \frac{1}{3}(-2.0 - 2) = -\frac{2}{3}$.

Vậy, với m = 2 hệ có nghiệm duy nhất $(0, -\frac{2}{3})$.

b. Hệ có vô số nghiệm khi

(4) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -2$.

Vậy, với m = 0 hoặc m = −2 hệ có vô số nghiệm.

Nhận xét: 1. Như vậy, trong lời giải trên để tận dụng phép thế trong một bài toán có hai câu hỏi chúng ta đã thực hiện theo 3 phần:

Phần I: Bằng phép thế, chuyển đổi tính chất của hệ thành tính chất của phương trình.

Phần II: Thực hiện câu a).

Phần III: Thực hiện câu b).

Đó chính là cách thể hiện rất phổ biến khi học lên cao.

2. Chúng ta đều đã được biết rằng, có thể thực hiện yêu cầu " *Tìm m để hệ có vô số nghiệm* " bằng cách dựa trên vị trí tương đối của hai đường thẳng, cụ thể:

Trường hợp 1: Với m = 0

Hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} 0.x + 3y = -2 \\ 0.x - 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ tùy ý} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$

Điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$\frac{m}{m^2} = -\frac{3}{6} = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy, với m = 0 và m = 2, hệ có vô số nghiệm.

Lưu ý: Nếu ta không xét trường hợp m = 0 mà chỉ kiểm tra điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm:

$$\frac{m}{m^2} = -\frac{3}{6} = -\frac{2}{4}$$

thì không được rút gọn m ở mẫu. Khi đó, ta phải biến đổi như sau: $\dfrac{m}{m^2} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{m}{m^2} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2m = -m^2$

$$\Leftrightarrow m(2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right..$$

Ví dụ 3: Cho hai hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$ (I) và $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ y = m \end{cases}$ (II)

Xác định m sao cho hai hệ phương trình trên tương đương.

Giải

Giải (I) bằng phương pháp thế, ta được nghiệm (3, 0).

Hệ (I) và (II) tương đương khi (3, 0) cũng là nghiệm của (II), tức là:

$$\begin{cases} 2.3 - 0 = 6 \\ 0 = m \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Thử lại, với m = 0 hệ (II) có dạng: $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy, với m = 0 hai hệ phương trình trên tương đương.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases}$.

a. Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất.

b. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm (x, y) là một điểm thuộc góc phần tư thứ I

Giải

a. Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $y = mx + m$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (1), ta được:

$$x + m(mx + m) = 1 \Leftrightarrow (m^2 + 1)x = 1 - m^2 \Leftrightarrow x = \frac{1 - m^2}{m^2 + 1}.$$

Thay $x = \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1}$ vào (3), ta được:

$$y = m.\frac{1 - m^2}{m^2 + 1} + m = \frac{m(1 - m^2) + m(m^2 + 1)}{m^2 + 1} = \frac{2m}{m^2 + 1}.$$

Vậy, với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất.

b. Để nghiệm (x, y) là một điểm thuộc góc phần tư thứ I, điều kiện là:

$$\begin{cases} \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1} > 0 \\ \dfrac{2m}{m^2 + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với $0 < m < 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: 1. Trong chủ đề 9, chúng ta đã thực hiện câu a) bằng phương pháp cộng và ở đó chúng ta cần xét hai trường hợp m = 0 và m ≠ 0. Còn đối với phương pháp thế thì không cần phải như vậy, đó chính là một trong số những ưu điểm của phương pháp thế so với phương pháp cộng.

2. Với câu b), chúng ta đã sử dụng một trong các kết quả sau:

- $M(x, y) \in P(I) \Leftrightarrow x > 0$ và $y > 0$.
- $M(x, y) \in P(II) \Leftrightarrow x < 0$ và $y > 0$.
- $M(x, y) \in P(III) \Leftrightarrow x < 0$ và $y < 0$.
- $M(x, y) \in P(IV) \Leftrightarrow x > 0$ và $y < 0$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới các hệ phương trình được giải nhờ kiến thức của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (thường được gọi là *các hệ phương trình quy về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn*).

Trước tiên, là các hệ phương trình được chuyển về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng các phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} & (1) \\ 4x - 3y = -2 & (2) \end{cases}$.

Giải

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $x = \dfrac{2y}{3}$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (2), ta được:

$$4.\frac{2y}{3} - 3y = -2 \Leftrightarrow 8y - 9y = -6 \Leftrightarrow y = 6.$$

Thay y = 6 vào (3), ta được: $x = \dfrac{2.6}{3} = 4$.

Vậy, hệ có nghiệm (4, 6).

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ |x - 2y| = 3 & (2) \end{cases}$.

Giải

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $y = -2x + 4$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (2), ta được: $|x - 2(-2x + 4)| = 3 \Leftrightarrow |5x - 8| = 3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - 8 = 3 \\ 5x - 8 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{11}{5} \end{array}\right..$$

- Với x = 1, thay vào (3), ta được $y = -2.1 + 4 = 1$.
- Với $x = \dfrac{11}{5}$, thay vào (3), ta được $y = -2.\dfrac{11}{5} + 4 = -\dfrac{2}{5}$.

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm (1, 2) và $(\dfrac{11}{5}, -\dfrac{2}{5})$.

Nhận xét: 1. Như vậy, với việc sử dụng phương pháp thế chúng ta đã chuyển được hệ phương trình về một phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.

2. Tất nhiên, chúng ta cũng có thể sử dụng phương pháp cộng để giải, bằng việc chuyển đổi hệ ban đầu thành hai hệ:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = -3 \end{cases}.$$

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y - |x| = 1 & (1) \\ 2x - y = 1 & (2) \end{cases}$.

Giải

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $y = 2x - 1$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (1), ta được: $2x - 1 - |x| = 1 \Leftrightarrow |x| = 2x - 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2x - 2 \\ x = -2x + 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Thay $x = 2$ vào (3), ta được: $y = 2.2 - 1 = 3$

Vậy, hệ có nghiệm (2, 3).

Nhận xét: Chúng ta thấy ngay, phương pháp thế được sử dụng trong lời giải trên không hề khác nếu chúng ta sử dụng phương pháp cộng

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x + 3y} = \sqrt{3x - 1} \\ 5x - y = 9 \end{cases}$.

Giải

Biến đổi hệ về dạng: $\begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ x + 3y = 3x - 1 \\ 5x - y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1/3 & (*) \\ 2x - 3y = 1 & (1) \\ 5x - y = 9 & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $y = 5x - 9$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (1), ta được:

$2x - 3(5x - 9) = 1 \Leftrightarrow 13x = 26 \Leftrightarrow x = 2$, thoả mãn (*).

Thay $x = 2$ vào (3), ta được: $y = 5.2 - 9 = 1$

Vậy, hệ có nghiệm (2, 1).

Nhận xét: Trong lời giải trên, việc biến đổi phương trình thứ nhất của hệ chúng ta đã sử dụng lại phép biến đổi tương đương đã biết là:

$$\sqrt{f} = \sqrt{g} \Leftrightarrow f = g \geq 0.$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới các hệ phương trình được chuyển về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phép đặt ẩn phụ.

Ví dụ 9: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \dfrac{6}{x-1} - \dfrac{5}{y-2} = 7 \\ \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2}{y-2} = -1 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 17 \\ 3x^2 - 2y = 6 \end{cases}$.

Giải

a. Điều kiện $x \neq 1$ và $y \neq 2$.

Đặt: $\begin{cases} u = \dfrac{1}{x-1} \\ v = \dfrac{1}{y-2} \end{cases}$.

Khi đó, hệ có dạng: $\begin{cases} 6u - 5v = 7 & (1) \\ 3u + 2v = -1 & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $v = \dfrac{1}{2}(-1 - 3u)$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (1), ta được:

$$6u - 5.\ \frac{1}{2}(-1 - 3u) = 7 \Leftrightarrow 27u = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 4.$$

Thay $u = \dfrac{1}{3}$ vào (3), ta được: $v = \dfrac{1}{2}\left(-1 - 3.\ \dfrac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y-2} = -1 \Leftrightarrow y = 1$.

Vậy, hệ có nghiệm (4, 1).

b. Đặt $u = x^2$, điều kiện $u \geq 0$.

Khi đó, hệ có dạng: $\begin{cases} 2u + 3y = 17 & (1) \\ 3u - 2y = 6 & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $u = \dfrac{1}{2}(17 - 3y)$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (2), ta được:

$$3.\ \frac{1}{2}(17 - 3y) - 2y = 6 \Leftrightarrow \frac{13y}{2} = \frac{39}{2} \Leftrightarrow y = 3.$$

Thay $y = 3$ vào (3), ta được: $u = \dfrac{1}{2}(17 - 3.3) = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm (2, 3) và (–2, 3).

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x-1| + |y-1| = 2 \\ 4|x-1| + 3|y-1| = 7 \end{cases}$.

Giải

Đặt: $\begin{cases} |x-1| = u \\ |y-1| = v \end{cases}$, điều kiện $u, v \geq 0$.

Khi đó, hệ có dạng: $\begin{cases} u + v = 2 & (1) \\ 4u + 3v = 7 & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $u = 2 - v$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (2), ta được:

$$4(2 - v) + 3v = 7 \Leftrightarrow v = 1 \Leftrightarrow |y - 1| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - 1 = 1 \\ y - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 0 \end{array}\right..$$

Thay $v = 1$ vào (3), ta được:

$$u = 2 - 1 = 1 \Leftrightarrow |x - 1| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 1 \\ x - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ có 4 cặp nghiệm (2, 2), (2, 0), (0, 2), (0, 0).

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3\sqrt{x - 1} + 2\sqrt{y} = 13 \\ 2\sqrt{x - 1} - \sqrt{y} = 4 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x - 1} \\ v = \sqrt{y} \end{cases}$, điều kiện $u, v \geq 0$.

Khi đó, hệ có dạng: $\begin{cases} 3u + 2v = 13 & (1) \\ 2u - v = 4 & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $v = 2u - 4$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (1), ta được:

$$3u + 2(2u - 4) = 13 \Leftrightarrow 7u = 21 \Leftrightarrow u = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 1} = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10.$$

Thay $u = 3$ vào (3), ta được: $v = 2.3 - 4 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow y = 4$.

Vậy, hệ có nghiệm (10, 4).

Ví dụ 12: Với giá trị nào của m thì 2 phương trình sau có nghiệm chung

$$2x^2 + mx - 1 = 0 \text{ và } mx^2 - x + 2 = 0.$$

Giải

Các phương trình đã cho có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm::

$$\begin{cases} 2x^2 + mx - 1 = 0 \\ mx^2 - x + 2 = 0 \end{cases}.$$

Đặt $x^2 = y$, ta được hệ: $\begin{cases} mx + 2y = 1 & (1) \\ x - my = 2 & (2) \end{cases}.$

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $x = my + 2$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (1), ta được:

$$m(my + 2) + 2y = 1 \Leftrightarrow (m^2 + 2)y = 1 - 2m \Leftrightarrow y = \frac{1 - 2m}{m^2 + 2}.$$

Thay $y = \dfrac{1 - 2m}{m^2 + 2}$ vào (3), ta được:

$$x = m.\frac{1 - 2m}{m^2 + 2} + 2 = \frac{m(1 - 2m) + 2(m^2 + 2)}{m^2 + 2} = \frac{m + 4}{m^2 + 2}.$$

Do $x^2 = y$, nên ta phải có: $\left(\dfrac{m + 4}{m^2 + 2}\right)^2 = \dfrac{1 - 2m}{m^2 + 2} \Leftrightarrow m^3 + 6m + 7 = 0$

$$\Leftrightarrow (m + 1)(m^2 - m + 1) = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy, với $m = -1$ hai phương trình có nghiệm chung là $x = 1$.

Nhận xét: Lời giải trong ví dụ trên, chínhlà phương pháp hiệu quả để thực hiện yêu cầu " *Tìm điều kiện của tham số để hai phương trình bậc hai có nghiệm chung* ", dạng toán này chúng ta sẽ còn gặp lại trong chương sau.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các bước cần thực hiện để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế.

Câu hỏi 2: Tại sao có thể nói việc giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn cũng chính là việc giải và biện luận một phương trình bậc nhất một ẩn.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Sử dụng phương pháp thế giải các hệ phương trình sau và minh hoạ nghiệm bằng đồ thị.

a. $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + y = -4 \end{cases}.$ c. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}.$

b. $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ -4x - 6y = 12 \end{cases}.$ d. $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}.$

Bài tập 2. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} 3x + 4y = -4 \\ 12x + 16y - 5 = 0 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x - y = 5 \\ (x - 2)(y + 3) = 3 + xy \end{cases}$.

c. $\begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{6} = 1 \\ \dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{3} = 8 \end{cases}$.

Bài tập 3. Xác định hàm số y = ax + b biết rằng đồ thị hàm số của nó đi qua điểm A (1; 2) và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Bài tập 4. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm:

a. A (0 ; 3) và B (1 ; 2).

b. A (1 ; 6) và B (2 ; 0).

c. A (−3 ; 14) và B (2 ; −1).

Bài tập 5. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 11 \\ 5x - 3y = m + 1 \end{cases}$.

a. Giải hệ với m = 2.

b. Tìm giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm.

Bài tập 6. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 3mx + 5y = 1 \\ 2x + my = -4 \end{cases}$.

a. Giải hệ với m = 2.

b. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài tập 7. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - 3y = m \\ -3x + 9y = -12 \end{cases}$.

a. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

b. Tìm giá trị của m để hệ phương trình vô nghiệm.

Bài tập 8. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 2y = 5 \\ 2x + y = m \end{cases}$.

a. Tìm giá trị của m để hệ phương trình một nghiệm duy nhất.

b. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

c. Tìm giá trị của m để hệ phương trình vô nghiệm.

Bài tập 9. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = m \\ mx + y = 1 \end{cases}$.

a. Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm.

b. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm (x, y) là một điểm thuộc góc phần tư thứ I

Bài tập 10. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$. **(I)**

* Xác định m để các hệ phương trình sau tương đương với hệ phương trình (I).

a. $\begin{cases} 2x - 2y = m \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 2x - my = 4 \\ (m+1)x - 2y = 9 \end{cases}$.

Bài tập 11. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ |2x - 3y| = 1 \end{cases}$. c. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ |x - y| = |2y - 1| \end{cases}$.

b. $\begin{cases} |x - y| = |2y - 1| \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.

Bài tập 12. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} |x| - y + 1 = 0 \\ 2x - |y| - 1 = 0 \end{cases}$. b. $\begin{cases} |x| + 2|y| = 3 \\ 7x + 5y = 2 \end{cases}$.

Bài tập 13. Với giá trị nào của m thì 2 phương trình sau có nghiệm chung:

$mx^2 + x + 1 = 0$ và $x^2 + mx + 1 = 0$.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $(-3, 2)$. b. $(-3, 0)$. c. $(6, 0)$. d. $(3, 4)$.

Bài tập 2.

a. Vô nghiệm. b. $(-1, -6)$. c. $(\frac{112}{15}, \frac{26}{5})$.

Bài tập 3. Ta có:

- A(1 ; 2) thuộc đồ thị hàm số nên: $2 = a + b$. (1)
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 khi điểm B (0; 1) thuộc đồ thị hàm số nên: $1 = b$. (2)

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình: $\begin{cases} a + b = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$.

Vậy, hàm số cần tìm là $y = x + 1$.

Bài tập 4.

a. $x + y = 3$. b. $6x + y = 12$. c. $3x + y = 5$.

Bài tập 5.

a. $(3, 4)$. b. $m \neq -\frac{3}{5}$.

Bài tập 6.

a. $(11, -13)$.

b. $m \neq \pm \dfrac{\sqrt{30}}{3}$

Bài tập 7.

a. $m = 4$.

b. $m \neq 4$.

Bài tập 8.

a. $m \neq 4$.

b. Không tồn tại m.

c. $m = 4$.

Bài tập 9.

a. $x = \dfrac{-2m}{m^2+1}$ và $y = \dfrac{m^2-1}{m^2+1}$.

b. $m < -1$.

Bài tập 10.

a. $m = 4$.

b. $m = 2$.

Bài tập 11.

a. $\left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ và $(1, 1)$.

b. $\left(\dfrac{24}{25}, \dfrac{23}{25}\right)$ và $\left(\dfrac{22}{23}, \dfrac{21}{23}\right)$.

c. $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ và $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

CHỦ ĐỀ 10 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. PHƯƠNG PHÁP

Để giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Lập hệ phương trình.

- Chọn các ẩn và xác định điều kiện thích hợp cho ẩn. Chú ý phải ghi rõ đơn vị của ẩn
- Biểu thị các đại lượng chưa biết khác theo ẩn.
- Dựa vào các dữ kiện và điều kiện của bài toán để lập hệ phương trình.

Bước 2: Giải hệ phương trình.

Bước 3: Thử lại, nhận định kết quả và trả lời.

Các bài toán được đưa ra thường rơi vào một trong 5 dạng sau:

Dạng 1: Bài toán chuyển động.

Dạng 2: Bài toán về số và chữ số.

Dạng 3: Bài toán vòi nước.

Dạng 4: Bài toán về tỉ số và quan hệ giữa các số.

Dạng 5: Bài toán về phần trăm - năng suất.

Sau đây chúng ta sẽ minh hoạ mỗi dạng toán bằng một thí dụ cùng lời nhận xét, để các em học sinh tiện theo dõi cũng như hiểu được cách thức thực hiện chúng.

Thí dụ 1: (*Bài toán chuyển động*): Một ôtô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50km/h thì đến sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.

Giải

1. *Lập hệ phương trình*

a. Lựa chọn ẩn

- Gọi x là thời gian dự định đi lúc đầu, điều kiện $x > 0$.
- Gọi y là độ dài quãng đường AB, điều kiện $y > 0$.

b. Thiết lập hai phương trình

Với giả thiết:

- Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì đến chậm mất 2 giờ, ta được:

$$\frac{y}{35} = x + 2 \Leftrightarrow 35x - y = -70. \qquad (1)$$

- Nếu xe chạy với vận tốc 50km/h thì đến sớm hơn 1 giờ, ta được:

$$\frac{y}{50} = x - 1 \Leftrightarrow 50x - y = 50. \qquad (2)$$

c. Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 35x - y = -70 \\ 50x - y = 50 \end{cases}$. (I)

2. ***Giải hệ phương trình*** (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 15x = 120 \\ 50x - y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 350 \end{cases}$, thoả mãn điều kiện.

3. ***Kết luận***: Vậy, quãng đường AB bằng 350km và thời gian dự định đi lúc đầu là 8 giờ.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Chúng ta lựa chọn hai ẩn x, y tương ứng cho hai giá trị cần tìm là độ dài quãng đường AB và thời gian dự kiến.
2. Việc thiết lập các phương trình (1) và (2) dựa trên phép so sánh thời gian tới đích với thời gian dự kiến. Tuy nhiên, cũng có thể lập luận theo kiểu khác, cụ thể:
   - Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì đến chậm mất 2 giờ, tức là số thời gian chạy bằng x + 2, do đó:
     $35(x + 2) = y$, (*vận tốc × thời gian = quãng đường*)
   - Nếu xe chạy với vận tốc 50km/h thì đến sớm hơn 1 giờ, tức là số thời gian chạy bằng x – 1, do đó:
     $50(x - 1) = y$, (*vận tốc × thời gian = quãng đường*)
3. Lời giải được trình bày thành ba phần độc lập nhau, với mục đích minh hoạ để giúp các em hoc sinh hiểu được cách trình bày bài toán theo thuật toán đã được chỉ ra. Tuy nhiên, kể từ các thí dụ sau chúng ta không cần phân tách như vậy mà chỉ yêu cầu các em học sinh khi đọc phải biết mình đang ở bước nào.

Thí dụ 2: (*Bài toán về số và chữ số*): Tìm số có hai chữ số, biết rằng tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục bằng 10. Ngoài ra, nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì sẽ được số mới nhỏ hơn số ban đầu18 đơn vị

Giải

Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với $x, y \in \mathbb{N}$, $1 \le x, y \le 9$.

Với giả thiết:

- Tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục bằng 10, ta được:

$$2x + y = 10. \qquad (1)$$

- Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì sẽ được số mới ($\overline{yx} = 10y + x$) nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị, ta được:

$$\overline{xy} - \overline{yx} = 18 \Leftrightarrow (10x + y) - (10y + x) = 18 \Leftrightarrow x - y = 2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, số cần tìm là 42.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Cho dù bài toán chỉ yêu cầu chúng ta đi tìm một số có hai chữ số (điều này có thể khiến học sinh hiểu nhầm rằng chỉ có một ẩn) nhưng cần hiểu rằng, số cần tìm được xây dựng từ hai thành phần. Do đó, chúng ta lựa chọn hai ẩn x, y tương ứng cho chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị. Và vì chúng là các chữ số đại diện nên phải thuộc tập {0, 1, 2, 3,..., 9 } xong ở đây không thể là 0 bởi các số $\overline{0y}$, $\overline{0x}$ không phải là số có hai chữ số.
2. Việc thiết lập phương trình (1) là đơn giản, còn đối với phương trình (2) chúng ta cần tới kiến thức về biểu diễn số, cụ thể: $\overline{xy} = 10x + y$,

   $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$,

   ...

Thí dụ 3: (*Bài toán vòi nước*): Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu mới đầy bể ?

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Thiết lập ẩn thông qua giá trị cần tìm.

Gọi x là thời gian để vòi I chảy một mình cho đầy bể, điều kiện $x > 0$. Suy ra, mỗi giờ vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ bể.

Gọi y là thời gian để vòi II chảy một mình cho đầy bể, điều kiện $y > 0$. Suy ra, mỗi giờ vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Ta thực hiện đổi đơn vị: 1 giờ 20 phút = $1 + \frac{20}{60} = \frac{4}{3}$ giờ.

10 phút = $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ giờ. 12 phút = $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ giờ.

Với giả thiết:

- Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy, ta được: $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}$ (1)
- Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể, ta được: $\frac{1}{6}.\frac{1}{x} + \frac{1}{5}.\frac{1}{y} = \frac{2}{15} \Leftrightarrow \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15}$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{6x} + \frac{5}{5y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases}. \quad \text{(I)}$$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{6x} \\ v = \frac{1}{5y} \end{cases}$

khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 6u + 5v = \frac{3}{4} \\ u + v = \frac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{12} \\ v = \frac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6x} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{5y} = \frac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Vậy:

- Vòi I chảy trong 2 giờ sẽ đầy bể.
- Vòi II chảy trong 4 giờ sẽ đầy bể.

Cách 2: Thiết lập ẩn thông qua giá trị trung gian.

Giả sử mỗi giờ vòi I chảy được x phần bể, điều kiện $x > 0$.

Giả sử mỗi giờ vòi II chảy được y phần bể, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy, ta được: $\frac{4}{3}(x + y) = 1 \Leftrightarrow 4x + 4y = 3$. (3)
- Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể, ta được: $\frac{1}{6}.x + \frac{1}{5}.y = \frac{2}{15} \Leftrightarrow 5x + 6y = 4$. (4)

Từ (3) và (4), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 3 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Vậy:

- Vòi I chảy trong 2 giờ sẽ đầy bể.
- Vòi II chảy trong 4 giờ sẽ đầy bể.

Nhận xét: Như vậy, thông qua hai cách giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Với cách 1, việc lựa chọn ẩn thông qua các giá trị cần tìm giúp cho cách đặt vấn đề khá tường minh. Tuy nhiên, chúng ta lại phải đối mặt với một hệ phức tạp (ở đó cần sử dụng phương pháp ẩn phụ để giải).
2. Với cách 2, việc lựa chọn ẩn thông qua giá trị trung gian cần có được những kiến thức đánh giá đúng đắn, xong sẽ giúp chúng ta thu được một hệ đơn giản.

Thí dụ 4: (*Bài toán về tỉ số và quan hệ giữa các số*): Trong một trang sách, nếu bớt đi 4 dòng và mỗi dòng bớt đi 3 chữ thì cả trang sẽ bớt đi 136 chữ, nếu tăng thêm 3 dòng và mỗi dòng tăng thêm 2 chữ thì cả trang sẽ tăng 109 chữ. Tính số dòng trong trang và số chữ của mỗi dòng.

Giải

Gọi x là số dòng trong trang sách, điều kiện $0 < x \in \mathbb{N}$.

Gọi y là số chữ trong mỗi dòng, điều kiện $0 < y \in \mathbb{N}$.

Với giả thiết:

- Nếu bớt đi 4 dòng (ứng với việc bớt 4y chữ và trang còn lại x – 4 dòng) và mỗi dòng bớt đi 3 chữ (ứng với 3(x–4)) thì cả trang sẽ bớt đi 136 chữ, ta được:

  $$4y + 3(x - 4) = 136 \Leftrightarrow 3x + 4y = 148. \quad (1)$$

- Nếu mỗi dòng tăng thêm 2 chữ (trang tăng được 2x chữ và mỗi dòng có y + 2 chữ) và tăng thêm 3 dòng (tăng được 3(y + 2) chữ) thì cả trang sẽ tăng 109 chữ, ta được: $2x + 3(y + 2) = 109 \Leftrightarrow 2x + 3y = 103$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 4y = 148 \\ 2x + 3y = 103 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ y = 13 \end{cases}$.

Vậy, trang sách có 32 dòng và mỗi dòng có 13 chữ.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Lựa chọn hai ẩn x, y tương ứng với số dòng trong trang sách và số chữ trong mỗi dòng.
2. Việc thiết lập các phương trình (1) và (2) dựa trên số dư khi thêm hoặc bớt do đó cần có nhận định thật chính xác.

Thí dụ 5: (*Bài toán về phần trăm - năng suất*): Trong tháng 3 hai tổ trồng được 720 cây xanh. Trong tháng 4, tổ I vượt mức 15%, tổ II vượt mức 12% nên trồng được 819 cây xanh. Tính xem trong tháng 3 mỗi tổ trồng được bao nhiêu cây xanh.

Giải

Gọi x là số cây xanh tổ I trồng được trong tháng 3, điều kiện $0 < x \in \mathbb{N}$.

Gọi y là số cây xanh tổ II trồng được trong tháng 3, điều kiện $0 < y \in \mathbb{N}$.

Với giả thiết:

- Trong tháng 3 hai tổ trồng được 720 cây xanh, ta được: $x + y = 720$. (1)
- Trong tháng 4, tổ I vượt mức 15% (trồng được $x + \frac{15}{100}x$), tổ II vượt mức 12% (trồng được $y + \frac{12}{100}$N y) nên trồng được 819 cây xanh, ta được:

$$\left(x + \frac{15}{100}x\right) + \left(y + \frac{12}{100}y\right) = 819 \Leftrightarrow 115x + 112y = 81900. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 720 \\ 115x + 112y = 81900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 420 \\ y = 300 \end{cases}$.

Vậy, trong tháng 3 tổ I trồng được 420 cây xanh và tổ II trồng được 300 cây xanh.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Một người đi xe đạp từ nhà ra thành phố với vận tốc trung bình là12 km/h. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc đó thì xe bị hỏng do đó phải chờ ôtô mất 20 phút. Quãng đường còn lại, người đó đi bằng ôtô với vận tốc 36 km/h vì vậy đến sớm hơn 1 giờ 20 phút so với dự định. Tính quãng đường người đó đi.

Giải

Ta thực hiện đổi đơn vị: 1 giờ 20 phút $= 1 + \frac{20}{60} = \frac{4}{3}$

$$20 \text{ phút} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

Gọi x là thời gian dự định, điều kiện $x > 0$.

Gọi y là độ dài quãng đường, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Vận tốc trung bình là 12 km/h, ta được: $12x = y$. (1)
- Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường (bằng $\frac{y}{3}$) với vận tốc đó (thời gian đi bằng $\frac{y}{3.12}$ giờ) thì xe bị hỏng do đó phải chờ ôtô mất 20 phút (bằng $\frac{1}{3}$ giờ). Quãng đường còn lại (bằng $\frac{2y}{3}$), người đó đi bằng ôtô với vận tốc 36 km/h (thời gian đi bằng $\frac{2y}{3.36}$ giờ) vì vậy đến sớm hơn 1 giờ 20 phút (tổng thời gian bằng $x - \frac{4}{3}$ giờ) so với dự định, ta được:

$$\frac{y}{36} + \frac{1}{3} + \frac{2y}{108} = x - \frac{4}{3} \Leftrightarrow 108x - 5y = 180. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 12x = y \\ 108x - 5y = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{4} \\ y = 45 \end{cases}.$$

Vậy, quãng đường người đó phải đi là 45 km.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Cho dù bài toán chỉ yêu cầu "*Tìm độ dài quãng đường người đó đi*", tương ứng với một ẩn, xong chúng ta lại lựa chọn hai ẩn (một ẩn được đề xuất) để chuyển bài toán về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó:
   - Phương trình (1) được thiết lập thông qua dự kiến ban đầu của người đi.
   - Phương trình (2) được thiết lập thông qua diễn biến trên đường đi.
2. Để học sinh tiện so sánh, sau đây sẽ là lời giải khi ta lựa chọn hướng lập phương trình:

   Giả sử quãng đường người đó đi là AB và điểm hỏng xe là C. Gọi quãng đường AB là x, điều kiện $x > 0$.

   Suy ra, thời gian dự định bằng $\frac{x}{12}$.

Từ giả thiết:

- Quãng đường AC bằng $\frac{x}{3}$ và đi với thời gian bằng $\frac{x}{3.12} = \frac{x}{36}$.
- Quãng đường CB bằng $\frac{2x}{3}$ và đi với thời gian bằng $\frac{2x}{3.36} = \frac{x}{54}$.

Vì người đó đến sớm hơn 1 giờ 20 phút so với dự định nên ta có phương trình: $\frac{x}{36} + \frac{x}{54} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{x}{12}$

$$\Leftrightarrow 3x + 2x + 108 = 9x \Leftrightarrow x = 45, \text{ thoả mãn}.$$

Vậy, quãng đường người đó phải đi là 45 km.

Ví dụ 2: Lúc 7 giờ một người đi xe máy khởi hành từ A với vận tốc 40 km/h. Sau đó, lúc 8 giờ 30 phút, một người khác cũng đi xe máy từ A đuổi theo với vận tốc 60 km/h. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ ?

Giải

Ta thực hiện đổi đơn vị: 8 giờ 30 phút = $8 + \frac{30}{60} = \frac{17}{2}$.

Gọi x là thời gian hai người gặp nhau, điều kiện $x > \frac{17}{2}$.

Gọi y là độ dài quãng đường từ A tới điểm gặp nhau, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Người thứ nhất đi với vận tốc 40 km/h và xuất phát lúc 7 giờ, ta được:

$$40(x - 7) = y \Leftrightarrow 40x - y = 280. \qquad (1)$$

- Người thứ hai đi với vận tốc 60 km/h và xuất phát lúc 8 giờ 30 phút, ta được:

$$60(x - \frac{17}{2}) = y \Leftrightarrow 60x - y = 510. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 40x - y = 280 \\ 60x - y = 510 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11\frac{1}{2} = 11 \text{ giờ } 30 \text{ phút} \\ y = 180 \end{cases}.$$

Vậy, họ gặp nhau lúc 11 giờ 30 phút.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Cho dù bài toán chỉ yêu cầu " *Tìm thời điểm hai người gặp nhau* ", tương ứng với một ẩn, xong chúng ta lại lựa chọn hai ẩn (một ẩn được đề xuất) để chuyển bài toán về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó:
   - Phương trình (1) được thiết lập dựa trên chuyển động của người thứ nhất.
   - Phương trình (2) được thiết lập dựa trên chuyển động của người thứ hai.
2. Để học sinh tiện so sánh, sau đây sẽ là lời giải khi ta lựa chọn hướng lập phương trình:

Giả sử điểm họ gặp nhau là B. Gọi quãng đường AB là x, điều kiện $x > 0$.

Suy ra:

- Thời gian người thứ nhất đi từ A đến B là: $\frac{x}{40}$.
- Thời gian người thứ hai đi từ A đến B là: $\frac{x}{60}$.

Vì người thứ nhất đi sau người thứ hai 1 giờ 30 phút nên ta có: $\frac{x}{40} = \frac{x}{60} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x = 2x + 180 \Leftrightarrow x = 180$

Vậy điểm gặp nhau của hai người cách A là 180 km.

Để đi được quãng đường này:

- Người thứ nhất phải đi mất $\frac{180}{40} = 4\frac{1}{2}$ (giờ).
- Người thứ hai phải đi mất $\frac{180}{60} = 3$ (giờ).

Vậy, họ gặp nhau lúc 11 giờ 30 phút.

Ví dụ 3: Hai canô cùng khởi hành từ bến A và B cách nhau 85km, đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc riêng của mỗi canô. Biết rằng vận tốc riêng của canô đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của canô đi ngược 9km/h và vận tốc nước là 3km/h.

Giải

Ta thực hiện đổi đơn vị: 1 giờ 40 phút $= 1 + \frac{40}{60} = \frac{5}{3}$ giờ.

Gọi x là vận tốc riêng của canô đi xuôi dòng, điều kiện $x > 0$. Do đó, khi đi xuôi dòng nó đi với vận tốc $(x + 3)$ km/h.

Gọi y là vận tốc riêng của canô đi ngược dòng, điều kiện $y > 3$. Do đó, khi đi ngược dòng nó đi với vận tốc $(y - 3)$ km/h.

Với giả thiết:

- Vận tốc riêng của canô đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của canô đi ngược 9km/h, ta được: $x - y = 9$. (1)
- Sau 1 giờ 40 phút hai canô gặp nhau, ta được:

$$\frac{5}{3}[(x + 3) + (y - 3)] = 85 \Leftrightarrow x + y = 51. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 21 \end{cases}$.

Vậy:

- Vận tốc riêng của canô đi xuôi bằng 30km/h.
- Vận tốc riêng của canô đi ngược bằng 21km/h.

Chú ý: Nếu thay giả thiết " *Vận tốc riêng của canô đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của canô đi ngược 9km/h* " bằng " *Vận tốc canô đi xuôi lớn hơn vận tốc canô đi ngược 9km/h* " thì phương trình được minh hoạ bằng:

$$(x + 3) - (y - 3) = 9 \Leftrightarrow x - y = 15.$$

Khi đó, hệ phương trình có dạng : $\begin{cases} x - y = 15 \\ x + y = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 33 \\ y = 18 \end{cases}$.

Vậy:

- Vận tốc riêng của canô đi xuôi bằng 33km/h.
- Vận tốc riêng của canô đi ngược bằng 18km/h.

Ví dụ 4: Tìm một số có hai chữ số. Biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị 6 đơn vị. Nếu viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số tự nhiên đó tăng 720 đơn vị.

Giải

Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với $x, y \in N$, $1 \le x \le 9, 0 \le y \le 9$.

Với giả thiết:

- Chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị 6 đơn vị, ta được:

$$x - y = 6. \quad (1)$$

- Khi viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị (được số $\overline{x0y} = 100x + y$) thì số tự nhiên đó tăng 720 đơn vị, ta được:

$$(100x + y) - (10x + y) = 720 \Leftrightarrow x = 8. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 6 \\ x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy, số cần tìm là 82.

Ví dụ 5: Có hai phân xưởng, phân xưởng I làm trong 20 ngày, phân xưởng II làm trong 15 ngày, được tất cả 1600 dụng cụ. Biết số dụng cụ phân xưởng I làm trong 4 ngày bằng số dụng cụ phân xưởng II làm trong 5 ngày. Tính số dụng cụ của mỗi phân xưởng đã làm.

Giải

Gọi x là số dụng cụ phân xưởng I làm trong 1 ngày, điều kiện $0 < x \in \mathbb{N}$.

Gọi y là số dụng cụ phân xưởng II làm trong 1 ngày, điều kiện $0 < y \in \mathbb{N}$.

Với giả thiết:

- Cả hai phân xưởng làm được 1600 sản phẩm, ta được:

$$20x + 15y = 1600 \Leftrightarrow 4x + 3y = 320. \quad (1)$$

- Số dụng cụ phân xưởng I làm trong 4 ngày bằng số dụng cụ phân xưởng II làm trong 5 ngày, ta được: $4x = 5y$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 320 \\ 4x = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases}$$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, phân xưởng I làm được 50 sản phẩm và phân xưởng II làm được 40 sản phẩm một ngày.

Ví dụ 6: Một tập đoàn đánh cá dự định trung bình mỗi tuần bắt được 20 tấn cá. Nhưng trong thực tế họ đã vượt mức kế hoạch 6 tấn một tuần nên chẳng những đã hoàn thành sớm một tuần mà còn vượt mức 10 tấn nữa. Tính định mức kế hoạch đã định.

Giải

Gọi x (tuần) là thời gian thực hiện định mức kế hoạch, điều kiện $x > 0$.

Gọi y (tấn) là định mức kế hoạch, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Dự định trung bình mỗi tuần bắt được 20 tấn cá, ta được: $20x = y$. (1)
- Do họ đã vượt mức kế hoạch 6 tấn một tuần (tức là, mỗi tuần đánh được 20 + 6 = 26 tấn) nên chẳng những đã hoàn thành sớm một tuần (tức là, chỉ thực hiện trong x − 1 tuần) mà còn vượt mức 10 tấn nữa (tức là đánh được y + 10 tấn), ta được: $26(x - 1) = y + 10 \Leftrightarrow 26x - y = 36$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 20x = y \\ 26x - y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 120 \end{cases}$$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, định mức kế hoạch đã định bằng 120 tấn.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Cho dù bài toán chỉ yêu cầu " *Tính định mức kế hoạch đã định* ", tương ứng với một ẩn, xong chúng ta lại lựa chọn hai ẩn (một ẩn được đề xuất) để chuyển bài toán về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó:
   - Phương trình (1) được thiết lập dựa trên định mức trong kế hoạch.
   - Phương trình (2) được thiết lập dựa trên việc thực hiện kế hoạch trong thực tế.
2. Để học sinh tiện so sánh, sau đây sẽ là lời giải khi ta lựa chọn hướng lập phương trình:

   Gọi x (tấn) là mức kế hoạch đã định, điều kiện $x > 0$.

   Suy ra:
   - Thời gian dự định là: $\frac{x}{20}$ (tuần).
   - Khối lượng thực tế đánh bắt được trong một tuần là $20 + 6 = 26$ (tấn) và khối lượng thực tế đánh bắt được là $x + 10$ (tấn). Suy ra, thời gian thực tế đánh bắt là: $\frac{x+10}{26}$ (tuần).
   - Vì tập đoàn đã hoàn thành công việc sớm hơn so với dự định một tuần nên ta có phương trình:

   $$\frac{x+10}{26} = \frac{x}{20} - 1 \Leftrightarrow 6x - 500 = 0 \Leftrightarrow x = 120.$$

   Vậy, tập đoàn dự định đánh bắt 120 tấn cá.

__Ví dụ 7:__ Hai tổ sản xuất phải hoàn thành 90 sản phẩm. Tổ I vượt mức 15% kế hoạch của tổ. Tổ II vượt mức 12% kế hoạch của tổ. Do đó, cả hai tổ làm được 102 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ phải làm bao nhiêu sản phẩm.

Giải

Gọi x là số sản phẩm theo kế hoạch tổ I phải làm, điều kiện $0 < x \in \mathbb{N}$.

Gọi y là số sản phẩm theo kế hoạch tổ II phải làm, điều kiện $0 < y \in \mathbb{N}$.

Với giả thiết:

- Hai tổ sản xuất phải hoàn thành 90 sản phẩm, ta được: $x + y = 90$. (1)
- Tổ I vượt mức 15% kế hoạch của tổ (làm được $x + \frac{15}{100}x$). Tổ II vượt mức 12% kế hoạch của tổ (làm được $y + \frac{12}{100}y$). Do đó, cả hai tổ làm được 102 sản phẩm, ta được:

$$\left(x + \frac{15}{100}x\right) + \left(y + \frac{12}{100}y\right) = 102 \Leftrightarrow 115x + 112y = 10200. (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ 115x + 112y = 10200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 50 \end{cases}, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, theo kế hoạch:
- Tổ I phải làm 40 sảm phẩm.
- Tổ II phải làm 50 sảm phẩm.

Ví dụ 8: Một máy bơm muốn bơm đầy nước vào bể trong một thời gian quy định thì mỗi giờ phải bơm $10m^3$. Sau khi bơm được $\frac{1}{3}$ bể, người công nhân vận hành máy cho hoạt động với công suất $15m^3/h$. Do vậy so với quy định bể được bơm đầy trước 48 phút. Tính thể tích của bể.

Giải

Ta thực hiện đổi đơn vị: 48 phút $= \frac{48}{60} = \frac{12}{15}$ giờ.

Gọi x (giờ) là thời gian quy định để bơm đầy bể, điều kiện $x > 0$.

Gọi y (m^3) là thể tích của bể, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:
- Muốn bơm đầy nước vào bể trong thời gian x mỗi giờ phải bơm $10m^3$, ta được:

$$10x = y. \qquad (1)$$

- Sau khi bơm được $\frac{1}{3}$ bể (tức bơm được $\frac{y}{3}m^3$ và tốn $\frac{y}{3.10}$ giờ và còn lại $\frac{2y}{3}$ m^3), người công nhân vận hành máy cho hoạt động với công suất $15m^3/h$ (tức là tốn $\frac{2y}{3.15}$ giờ). Do vậy so với quy định bể được bơm đầy trước 48 phút (tức là mất $x - \frac{12}{15}$), ta được: $\frac{y}{3.10} + \frac{2y}{3.15} = x - \frac{12}{15} \Leftrightarrow 90x - 7y = 72.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 10x = y \\ 90x - 7y = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3,6 \\ y = 36 \end{cases}, \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, thể tích của bể bằng $36\ m^3$.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Cho dù bài toán chỉ yêu cầu " *Tính thể tích của bể* ", tương ứng với một ẩn, xong chúng ta lại lựa chọn hai ẩn (một ẩn được đề xuất) để chuyển bài toán về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó:
   - Phương trình (1) được thiết lập dựa trên quy định chung.
   - Phương trình (2) được thiết lập dựa trên việc thực hiện bơm trong thực tế.
2. Để học sinh tiện so sánh, sau đây sẽ là lời giải khi ta lựa chọn hướng lập phương trình:

   Gọi thể tích của bể là x (m^3), điều kiện $x > 0$.

   Suy ra:
   - Thời gian dự định để bơm đầy bể là: $\frac{x}{10}$.
   - Với $\frac{1}{3}$ bể (bằng $\frac{x}{3}$) bơm theo quy định mỗi giờ phải bơm $10m^3$ nên mất $\frac{x}{3}.\frac{1}{10} = \frac{x}{30}$ (giờ).
   - Với $\frac{2}{3}$ bể còn lại (bằng $\frac{2x}{3}$), công suất của máy là $15m^3/h$ nên mất $\frac{2x}{3}.\frac{1}{15} = \frac{2x}{45}$ (giờ).

   Vậy thời gian thực tế để bơm đầy bể là: $\frac{x}{30} + \frac{2x}{45}$

   Vì so với quy định bể được bơm đầy trước 48 phút nên ta có phương trình: $\frac{x}{10} - (\frac{x}{30} + \frac{2x}{45}) = \frac{12}{15} \Leftrightarrow 2x = 72$

   $\Leftrightarrow x = 36$, thoả mãn điều kiện.

   Vậy, thể tích của bể nước là $36m^3$.

Ví dụ 9: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước sau 5 giờ 50 phút sẽ đầy. Nếu để hai vòi cùng chảy 5 giờ rồi khoá vòi một lại thì vòi 2 chảy thêm 2 giờ nữa mới đầy bể. Tính xem nếu để mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu mới đầy bể.

Giải

Ta thực hiện đổi đơn vị: 5 giờ 50 phút = $\frac{35}{6}$ giờ.

Giả sử mỗi giờ vòi I chảy được x phần bể, điều kiện $x > 0$.

Giả sử mỗi giờ vòi II chảy được y phần bể, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 5 giờ 50 phút sẽ đầy, ta được: $\frac{35}{6}(x + y) = 1 \Leftrightarrow 35x + 35y = 6$. (1)
- Nếu để hai vòi cùng chảy 5 giờ (chảy được $5(x + y)$) rồi khoá vòi một lại thì vòi 2 chảy thêm 2 giờ nữa (chảy được 2y) mới đầy bể, ta được:

$$5(x + y) + 2y = 1 \Leftrightarrow 5x + 7y = 1. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 35x + 35y = 6 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{10} \\ y = \dfrac{1}{14} \end{cases}.$$

Vậy:

- Vòi I chảy trong 10 giờ sẽ đầy bể.
- Vòi II chảy trong 14 giờ sẽ đầy bể.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các bước cần thực hiện khi giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

Câu hỏi 2: Việc lựa chọn ẩn cho bài toán được dựa trên yếu tố gì ?

Câu hỏi 3: Một bài toán có thể được giải bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình được không ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm số tự nhiên có hai chữ số. Biết tổng các chữ số bằng 8, nếu đổi vị trí hai chữ số cho nhau thì số tự nhiên đó tăng lên 18 đơn vị.

Bài tập 2. Tìm số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng số đó bằng tổng các chữ số của nó cộng với 9 và số đó cũng bằng hai lần hiệu của hai chữ số của nó cộng với 20.

Bài tập 3. Tìm số tự nhiên có hai chữ số. Biết chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5, nếu viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số tự nhiên đó tăng 630 đơn vị.

Bài tập 4. Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 156, nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 6 và số dư là 9.

Bài tập 5. Có hai đội thi công từ hai phía của một quãng đường dài 2400m. Mỗi ngày đội I làm được 40m, đội II làm được 60m. Hỏi mỗi đội làm được bao nhiêu mét đường. Biết rằng thời gian hai đội làm là như nhau.

Bài tập 6. Trong tuần đầu hai tổ sản xuất được 1500 bộ quần áo. Sang tuần thứ hai, tổ A vượt mức 25% kế hoạch, tổ B giảm 18%. Do đó, trong tuần này cả hai tổ sản xuất được 1617 bộ. Hỏi trong tuần đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu bộ ?

Bài tập 7. Một canô đi xuôi từ A đến B với vận tốc trung bình là 30 km/h sau đó đi ngược lại từ B về A. Tính quãng đường AB. Biết thời gian đi xuôi ít hơn thời gian đi ngược là 40 phút và vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Bài tập 8. Một người đi xe đạp dự định đi hết quãng đường AB với vận tốc 10 km/h. Sau khi đi được nửa quãng đường với vận tốc dự định người ấy nghỉ 30 phút. Vì muốn đến B kịp giờ nên người ấy phải đi với vận tốc 15 km/h trên quãng đường còn lại. Tính quãng đường AB.

Bài tập 9. Một người đi xe đạp quãng đường AB dài 80 km. Sau 1 giờ 30 phút thì một người đi xe máy cũng đi quãng đường AB và đã đến B sớm hơn người đi xe đạp 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe biết vận tốc xe máy gấp 2,5 lần vận tốc xe đạp.

Bài tập 10. Một canô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108 km và ngược dòng 63 km. Một lần khác, canô cũng chạy trong 7 giờ, xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84 km. Tính vận tốc dòng nước chảy và vận tốc thật của canô. Biết vận tốc thật của canô không đổi.

Bài tập 11. Một ôtô đi quãng đường AB với vận tốc 50 km/h, rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45 km/k. Biết quãng đường tổng cộng dài 165 km và thời gian ôtô đi trên AB ít hơn thời gian đi trên BC là 30 phút. Tính thời gian ôtô đi trên mỗi quãng đường.

Bài tập 12. Hai địa điểm A và B cách nhau 56 km. Lúc 6 giờ 45 phút, một người đi xe đạp từ A với vận tốc 10 km/h. Sau đó 2 giờ, một người đi xe đạp từ B với vận tốc 4 km/h. Hỏi đến mấy giờ họ gặp nhau và chỗ gặp nhau cách A bao nhiêu km ?.

Bài tập 13. Hai máy bơm cùng bơm nước vào một bể thì sau $\frac{1}{5}$ giờ thì đầy bể. Nếu máy bơm I bơm trong 10 phút, máy bơm II bơm trong 6 phút thì hai máy bơm được $\frac{7}{10}$ bể. Hỏi mỗi máy bơm làm việc một mình mất bao nhiêu giờ ?

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với $x, y \in \mathbb{N}$, $1 \le x, y \le 9$.

Với giả thiết:

- Tổng của các chữ số bằng 8, ta được: $x + y = 8$. (1)
- Nếu đổi vị trí hai chữ số cho nhau ($\overline{yx} = 10y + x$) thì số tự nhiên đó tăng lên 18 đơn vị, ta được:

  $\overline{yx} - \overline{xy} = 18 \Leftrightarrow (10y + x) - (10x + y) = 18 \Leftrightarrow x - y = -2$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, số cần tìm là 35.

Bài tập 2. Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với $x, y \in \mathbb{N}$, $1 \le x \le 9$, $0 \le y \le 9$.

Với giả thiết:

- Số đó bằng tổng các chữ số của nó cộng với 9, ta được:

  $10x + y = x + y + 9 \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1$. (1)
- Số đó cũng bằng hai lần hiệu của hai chữ số của nó cộng với 20, ta được:

  $10x + y = 2(x - y) + 20 \Leftrightarrow 8x + 3y = 20$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} x = 1 \\ 8x + 3y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, số cần tìm là 145.

Bài tập 3. Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với $x, y \in \mathbb{N}$, $1 \le x \le 9$, $0 \le y \le 9$.

Với giả thiết:

- Chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị 5 đơn vị, ta được:

  $x - y = 5$. (1)
- Khi viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị (được số $\overline{x0y} = 100x + y$) thì số tự nhiên đó tăng 630 đơn vị, ta được:

  $(100x + y) - (10x + y) = 630 \Leftrightarrow x = 7$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 5 \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy, số cần tìm là 72.

Bài tập 4. Gọi hai số cần tìm là x và y, với $x > y$.

Với giả thiết:

- Tổng của chúng bằng 156, ta được: $x + y = 156$. (1)
- Nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 6 và số dư là 9, ta được:

$$x = 6y + 9 \Leftrightarrow x - 6y = 9. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 156 \\ x - 6y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 135 \\ y = 21 \end{cases}$.

Vậy, hai số cần tìm là 135 và 21.

Bài tập 5. Đội I là được 960m và đội II làm được 1440m.

Bài tập 6.

Gọi x là số bộ quần áo tổ I sản xuất được trong tuần đầu, điều kiện $0 < x \in \mathbb{N}$.

Gọi y là số bộ quần áo tổ II sản xuất được trong tuần đầu, điều kiện $0 < y \in \mathbb{N}$.

Với giả thiết:

- Trong tuần đầu hai tổ sản xuất được 1500 bộ quần áo, ta được:

$$x + y = 1500. \qquad (1)$$

- Trong tuần thứ hai, tổ A vượt mức 25% kế hoạch, tổ B giảm 18%. Do đó, trong tuần này cả hai tổ sản xuất được 1617 bộ, ta được:

$$(x + \frac{25}{100}x) + (y - \frac{18}{100}y) = 1617 \Leftrightarrow 125x + 82y = 161700. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 1500 \\ 125x + 82y = 161700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 900 \\ y = 600 \end{cases}$.

Vậy, trong tuần đầu tổ I sản xuất được 900 bộ quàn áo và tổ II sản xuất được 600 bộ quàn áo.

Bài tập 7. Ta thực hiện đổi đơn vị: 40 phút $= \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ giờ.

Gọi x là thời gian đi xuôi dòng, điều kiện $x > 0$.

Gọi y là độ dài quãng đường AB, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Canô đi xuôi từ A đến B với vận tốc trung bình là 30 km/h, ta được: $30x = y$. (1)
- Khi đi ngược dòng, chịu tác dụng của dòng nước với vận tốc dòng nước là 3 km/h (nên vận tốc còn lại $30 - 3 = 27$ km/h) và thời gian đi xuôi ít hơn thời gian đi ngược là 40 phút (thời gian đi ngược bằng $x + \frac{2}{3}$), ta được:

$$27(x + \frac{2}{3}) = y \Leftrightarrow 27x - y = -18. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 30x = y \\ 27x - y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 180 \end{cases}$.

Vậy, quãng đường AB bằng 180 km.

Bài tập 8. Ta thực hiện đổi đơn vị: 30 phút = $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$.

Gọi x (giờ) là thời gian dự định, điều kiện $x > 0$.

Gọi y (km) là độ dài quãng đường, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Vận tốc trung bình là 10 km/h, ta được: $10x = y$. (1)
- Sau khi đi được nửa quãng đường (bằng $\frac{y}{2}$) với vận tốc đó (thời gian đi bằng $\frac{y}{2.10}$ giờ) thì nghỉ 30 phút (bằng $\frac{1}{2}$ giờ). Quãng đường còn lại (bằng $\frac{y}{2}$), người đó đi bằng ôtô với vận tốc 15 km/h (thời gian đi bằng $\frac{y}{2.15}$ giờ) để đúng với dự định, ta được: $\frac{y}{20} + \frac{1}{2} + \frac{y}{30} = x \Leftrightarrow 12x - y = 6$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 10x = y \\ 12x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 30 \end{cases}$.

Vậy, quãng đường người đó phải đi là 30 km.

Bài tập 9. *Hướng dẫn:*

Gọi vận tốc của người đi xe đạp là x (km/h), điều kiện $x > 0$.

Gọi vận tốc của người đi xe máy là y (km/h), điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Vận tốc xe máy gấp 2,5 lần vận tốc xe đạp, ta được: $y = 2{,}5x$. (1)
- Thời gian người đi xe đạp đi hết quãng đường bằng $\frac{80}{x}$.
- Thời gian người đi xe máy đi hết quãng đường bằng $\frac{80}{y}$

Do đó, ta được: $\frac{80}{x} = \frac{80}{y} - \frac{3}{2} - 1 \Leftrightarrow \frac{16}{x} - \frac{16}{y} = -\frac{1}{2}$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2{,}5x = y \\ \frac{16}{x} - \frac{16}{y} = -\frac{1}{2} \end{cases}$, *học sinh tự làm.*

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Ôn tập các kiến thức trong chương theo các câu hỏi sau:

Câu hỏi 1: Phát biểu khái niệm hàm số. Thế nào là hàm hằng ?

Câu hỏi 2: Hàm số có thể được cho bằng những cách gì ? Cho ví dụ.

Câu hỏi 3: Muốn xét xem mối quan hệ f từ tập X vào tập Y có phải là hàm số không, chúng ta thường sử dụng công cụ gì ?

Câu hỏi 4: Phát biểu định nghĩa đồ thị hàm số.

Câu hỏi 5: ***Tập xác định của hàm số***

a. Nêu định nghĩa tập xác định của hàm số và quy tắc để tìm tập xác định của hàm số.

b. Nêu các phương pháp tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$ và các chú ý kèm theo.

Câu hỏi 6: ***Sự biến thiên của hàm số***

a. Phát biểu định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến và cho ví dụ.

b. Phát biểu định nghĩa hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trong tập xác định của nó khi nào ?

c. Nêu các phương pháp để xét tính chất biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trong (a, b).

Câu hỏi 7: ***Hàm số bậc nhất***

a. Nêu định nghĩa hàm số bậc nhất và cho ví dụ.

b. Nêu các tính chất của hàm số bậc nhất. Cho ví dụ về một hàm số bậc nhất đồng biến và một hàm số bậc nhất nghịch biến.

c. Chứng minh rằng trong tập xác định **R**, hàm số $y = ax + b$ đồng biến nếu $a > 0$ và nghịch biến nếu $a < 0$.

d. Chứng minh rằng hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

e. Đồ thị hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$ được vẽ như thế nào ?

f. Đồ thị của hàm số $y = ax$ nằm ở những góc phần tư nào của mặt phẳng toạ độ Oxy khi $a > 0$ hoặc $a < 0$.

g. Nêu vị trí tương đối của đồ thị hàm số $y = ax + b$ với đồ thị hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$?

h. Nêu cách vẽ đồ thị hàm số bậc nhất.

i. Nêu cách vẽ đồ thị các hàm số $y = |x|$, $y = |x - a|$, $y = |x| + b$.

Câu hỏi 8: ***Đường thẳng***

a. Nêu định nghĩa hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$. Giải thích tại sao lại có được định nghĩa này ?

b. Nêu điều kiện để hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b$ $(a' \neq 0)$ là trùng nhau, song song với nhau, cắt nhau.

c. Chứng minh rằng mọi đường thẳng (d) đi qua điểm $A(x_0, y_0)$ luôn có phương trình $y = a(x - x_0) + y_0$.

d. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua hai điểm $A(a, 0)$ và $B(0, b)$ với $a, b \neq 0$ luôn có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

e. Chứng minh rằng đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A(x_1 ; y_1)$ và $B(x_2 ; y_2)$ với $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ có hệ số góc $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

f. Cho hai đường thẳng (d_1): $y = a_1x + b_1$, (d_2): $y = a_2x + b_2$. Chứng minh rằng $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow a_1.a_2 = -1$.

Câu hỏi 9: ***Phương trình bậc nhất hai ẩn***

a. Nêu định nghĩa phương trình bậc nhất hai ẩn và cho ví dụ.

b. Nêu định nghĩa nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn và cho ví dụ.

c. Với yêu cầu giải phương trình $ax + by = c$, ta thường thực hiện những công việc gì ?

d. Nêu cách giải các phương trình:

- $ax + by = c$, với $a, b \neq 0$.
- $0x + by = c$, với $b \neq 0$.
- $ax + 0y = c$, với $a \neq 0$.

e. Nêu kết luận về nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn.

f. Lập công thức tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng $ax + by + c = 0$

Câu hỏi 10: ***Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn***

a. Nêu định nghĩa hệ phương trình bậc nhất hai ẩn và cho ví dụ.

b. Thế nào là giải một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

c. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có bao nhiêu nghiệm ?

d. Tại sao có thể nói việc xác định số nghiệm của một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn được quy về việc xác định số điểm chung của hai đường thẳng trên cùng một hệ trục toạ độ.

e. Nêu các bước cần thực hiện để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng.

f. Nêu các bước cần thực hiện để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế.

g. Tại sao có thể nói việc giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn cũng chính là việc giải và biện luận một phương trình bậc nhất một ẩn.

Câu hỏi 11: ***Hệ phương trình tương đương***

a. Nêu định nghĩa hai hệ phương trình tương đương và cho ví dụ.

b. Nếu cặp nghiệm (x_0, y_0) của hệ phương trình thứ nhất cũng là nghiệm của hệ thứ hai thì có thể khẳng định được rằng hai hệ đó là tương đương với nhau không ? Vì sao ?

c. Thế nào là một phép biến đổi tương đương.

d. Phát biểu định lí 1 và lấy ví dụ minh hoạ.

e. Phát biểu định lí 2 và lấy ví dụ minh hoạ.

f. Phát biểu định lí 3 và lấy ví dụ minh hoạ.

g. Nêu các cách để chứng minh hai hệ phương trình là tương đương với nhau.

Câu hỏi 12: ***Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình***

a. Nêu các bước cần thực hiện khi giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

b. Việc lựa chọn ẩn cho bài toán được dựa trên yếu tố gì ?

c. Một bài toán có thể được giải bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình được không ?

II. BÀI TẬP ÔN TẬP

Bài tập 1. Cho hàm số: $y = (2m - 1)x$ với $m \neq \frac{1}{2}$.

a. Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến ? nghịch biến ?

b. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

c. Vẽ đồ thị hàm số với giá trị m vừa tìm được ở câu b).

d. Đồ thị của hàm số vừa vẽ có quan hệ như thế nào với các đường thẳng sau:

$$3x + y = 1 \ (1) \text{ và } 3y - x - 12 = 0.$$

Bài tập 2. Cho hàm số: (d): $y = (1 - 4m)x + m - 2$

a. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số là đường thẳng song song với trục hoành ? đi qua gốc tọa độ ?

b. Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) tạo với tia Ox một góc tù ; góc nhọn.

c. Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\frac{5}{2}$. Vẽ đồ thị vừa tìm được.

d. Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm x_0 sao cho $x_0 < 0$.

Bài tập 3. Cho hàm số: $y = (m - 2)x + n$ $(m \neq 2)$ (d)

Tìm các giá trị của m và n để đường thẳng (d):

a. Đi qua hai điểm A(−1 ; 2), B(3 ; − 4).

b. Cắt trục tung tại hai điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 2 + \sqrt{2}$.

c. Cắt đường thẳng $-2y + x - 3 = 0$;

d. Song song với đường thẳng $3x + 2y = 0$.

e. Trùng với đường thẳng $y - 2x + 3 = 0$.

Bài tập 4. Cho hàm số: $y = f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$.

a. Tìm tập xác định của hàm số.

b. Chứng minh $f(a) + f(-a) = 0$ với $-1 \leq a \leq 1$.

c. Chứng minh $y^2 \leq 2$.

Bài tập 5. Lập phương trình đường thẳng (d), biết:

a. (d) đi qua điểm C(1, 2) và có hệ số góc bằng 1.

b. (d) đi qua điểm C(−1, 2) và có hệ số góc bằng 3.

c. (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 và tạo với tia Ox một góc $\alpha = 30^0$

d. (d) song song với đường thẳng (Δ): $y = 2x + 7$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

e. (d) song song với đường thẳng (Δ): $y = -x + 4$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

f. (d) đi qua điểm B(2 ; 3) và song song với đường thẳng OA, với A(1, 2) và O là gốc toạ độ

Bài tập 6. Cho hai điểm A (−4, 3) và B (1, −2) thuộc đường thẳng (d).

a. Tính hệ số góc của đường thẳng (d).

b. Xác định đường thẳng (d) đó.

Bài tập 7. Cho hai điểm $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$, với $x_1 \neq x_2$.

a. Tính hệ số góc của đường thẳng đi qua A và B.

b. Xác định đường thẳng đó.

Bài tập 8. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm A và B, biết:

a. A $(3 ; 2)$ và B $(-1 ; -5)$. b. A $(-3 ; 1)$ và B $(1 ; -6)$.

c. A $(3 ; 0)$ và B $(0 ; -6)$. d. A $(2 ; 2)$ và B $(-1 ; 6)$.

Bài tập 9. Cho hai hàm số: (d_1): $y = mx + 2$, (d_2): $y = 2x + 3$

a. Xác định m để (d_1) song song với (d_2).

b. Vẽ đồ thị hai hàm số trên.

Bài tập 10. Xác định giao điểm của hai đường thẳng và vẽ chúng trên cùng mặt phẳng toạ độ, biết:

a. $y = x + 2$ và $y = -3x + 6$. b. $y = -3x + 4$ và $y = 5x - 4$.

Bài tập 11. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): y = x - 2,\ (d_2): y = -2x + 1.$$

a. Trên cùng mặt phẳng toạ độ vẽ hai đường thẳng (d_1) và (d_2). Xác định giao điểm I của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

b. Viết phương trình đường thẳng qua I và song song với đường thẳng (Δ): $3x + y = 0$. Vẽ các đường thẳng này.

Bài tập 12. Cho các đường thẳng:

$$(d_1): y = 3x + 2,\ (d_2): y = -\frac{1}{3}x + 3,\ (d_2): y = 3x + 7.$$

Không vẽ hình, hãy cho biết ba đường thẳng trên có vị trí như thế nào đối với nhau ?

Bài tập 13. Cho ba đường thẳng: (d_1): $y = x - 2$, (d_2): $y = a - 2x$, (d_3): $y = 3ax - 4$.

Xác định a để ba đường thẳng trên đồng quy, rồi vẽ đồ thị của ba đường thẳng đó trên cùng một hệ trục toạ độ.

Bài tập 14. Cho họ đường thẳng: (d_m): $m(x - 2) - 3y = 9$.

1. Tìm m để đường thẳng (d):

   a. Cắt hai trục toạ độ tại hai điểm phân biệt.

   b. Song song với Ox.

   c. Song song với Oy.

   d. Song song với đường thẳng (Δ): $x + y = 6$.

2. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 15. Cho họ đường thẳng (d_m) có phương trình:

$$(d_m):\ (m+1)x + 2my - 3m + 1 = 0.$$

1. Xác định m để:

a. (d_m) đi qua $A(2, -3)$.

b. (d_m) có hướng đi lên.

c. (d_m) có hướng đi xuống.

d. (d_m) song song với đường thẳng (Δ): $y = \frac{3}{2}x - 6$.

2. Tìm điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua.

Bài tập 16. Cho các họ đường thẳng: (d_m): $2(m-1)x + y - 2 = 0$

(Δ_m): $(m+2)x + (m-1)y - 3 = 0$

a. Tìm m để (d_m) cắt (Δ_m).

b. Tìm m để $(d_m) // (\Delta_m)$.

c. Tìm m để $(d_m) \equiv (\Delta_m)$.

d. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng (d_m).

e. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng (Δ_m).

Bài tập 17. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y + 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

nhận cặp số $(-1, 0)$ làm nghiệm ?

Bài tập 18. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 1 \\ mx + 2y = 0 \end{cases}$

có nghiệm duy nhất ?

Bài tập 19. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình: $\begin{cases} 2mx + m^2y = 3 \\ 2x + my = 3 \end{cases}$

Vô nghiệm ? vô số nghiệm?

Bài tập 20. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-1} = 5 \\ 3(2x-5) - 4(3x+4) = 5 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \dfrac{2}{x-y} + \dfrac{6}{x+y} = 1{,}1 \\ \dfrac{4}{x-y} - \dfrac{9}{x+y} = 0{,}1 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} \dfrac{a-1}{a+15} = \dfrac{b-6}{b+2} \\ \dfrac{a-3}{a} = \dfrac{b-4}{b-1} \end{cases}$.

d. $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} + \dfrac{y}{y+1} = 3 \\ \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{3y}{y+1} = -1 \end{cases}$.

Bài tập 21. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} ax - y = 2 & (1) \\ x + ay = 3 & (2) \end{cases}$.

a. Giải hệ khi $a = \sqrt{3} - 1$.

b. Chứng minh rằng hệ đã cho luôn có nghiệm với mọi a.

c. Tìm a để hệ có nghiệm (x ; y) thỏa mãn điều kiện $x - \sqrt{2}\,y = 0$.

Bài tập 22. Xác định m, n để hệ phương trình: $\begin{cases} mx - y = n \\ ma + ny = 2 \end{cases}$

a. Có nghiệm $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{3}$.

b. Có nghiệm duy nhất.

Bài tập 23. Giải các hệ phương trình :

a. $\begin{cases} y - 2x = xy \\ 2x + 3y = 2xy \end{cases}$.

b. $\begin{cases} (x+1)(y-2) = (x+3)(y-4) \\ (x-2)(y+1) = (x-1)(y+3) \end{cases}$.

c. $\begin{cases} 2\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y}\right) + 3\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y}\right)^2 = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} - 6\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y}\right)^2 = -3 \end{cases}$

Bài tập 24. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-1}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x-1}} = m \\ x + y = \sqrt{2} \end{cases}$

a. Giải hệ khi m = 2.

b. Tìm các giá trị của m để hệ vô nghiệm.

Bài tập 25. Cho đa thức: $P(x) = 3x^3 + ax^2 + b$

Chứng minh rằng với mọi giá trị của a, b thì ta không thể có đồng thời $P(1) = 0$ và $P(-1) = 0$.

Bài tập 26. Hai bình A và B chứa lần lượt 56 lít và 44 lít nước. Nếu rót nước từ bình A sang đầy bình B thì lượng nước còn lại trong bình A là nửa bình. Nếu rót nước từ bình B sang đầy bình A thì lượng nước còn lại trong bình B là $\dfrac{1}{3}$ bình.

Tính dung tích mỗi bình.

Bài tập 27. Hai người làm chung một công việc trong 20 ngày sẽ hoàn thành. Sau khi làm chung được 12 ngày thì một trong hai người đi làm việc khác trong khi đó người kia vẫn tiếp tục làm. Đi được 12 ngày, người thứ nhất trở về làm tiếp 6 ngày nữa (trong 6 ngày đó người thứ hai nghỉ) và công việc được hoàn thành. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc.

CHƯƠNG II -

HÀM SỐ $y = ax^2, a \neq 0$

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Chương này, bao gồm:

1. **Hàm số $y = ax^2, a \neq 0$**
2. **Đồ thị của hàm số $y = ax^2, a \neq 0$**
3. **Phương trình bậc hai một ẩn số**
4. **Công thức nghiệm của phương trình bậc hai**
5. **Hệ thức Viét và ứng dụng**
6. **Phương trình quy về phương trình bậc hai**
7. **Giải bài toán bằng cách hệ phương trình**

CHỦ ĐỀ 1

HÀM SỐ $y = ax^2$, với $a \neq 0$

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. MỞ ĐẦU

Trong chương trước, chúng ta đã làm quen được với các khái niệm:

1. Hàm số là gì ? Các cách cho một hàm số.
2. Tập xác định của hàm số và các phương pháp tìm tập xác định của hàm số.
3. Sự biến thiên của hàm số và cách xác định sự biến thiên của hàm số.

Và từ đó, sử dụng chúng để nghiêm cứu hàm số bậc nhất dạng:

$$y = ax + b, \text{ với } a \neq 0$$

tuy nhiên, trong thực tế chỉ với các hàm số bậc nhất là không thể đủ.

Bài toán: Tính diện tích của một hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng.

Giải

Gọi y là diện tích của hình chữ nhật.

Gọi x là chiều rộng, suy ra chiều dài bằng 3x.

Khi đó, ta được: $y = x.3x = 3x^2$.

Như vậy, ta được một tương quan hàm số $y = 3x^2$, trong đó x là biến số, y là hàm số. Và biểu thức mô tả hàm số này là bậc hai đối với biến x. Trong chủ đề này, chúng ta sẽ đi nghiên cứu các dạng hàm số như vậy.

2. HÀM SỐ $y = ax^2$, VỚI $a \neq 0$

Hàm số: $y = ax^2$, với $a \neq 0$,

1. *Tập xác định của hàm số là* ***R***.
2. *Tính chất biến thiên của hàm số:*
   - *Nếu $a > 0$, hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$, đồng biến trong $\mathbf{R}_+$ và bằng 0 khi $x = 0$.*
   - *Nếu $a < 0$, hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_-$, nghịch biến trong $\mathbf{R}_+$ và bằng 0 khi $x = 0$.*

Chứng minh

a. (***Tập xác định***): Với $\forall x \in \mathbf{R}$ luôn xác định được duy nhất một giá trị tương ứng của y theo công thức $y = ax^2$. Do đó, hàm số xác định trong **R**.

b. (*Tính chất biến thiên*): Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$ ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1^2 - ax_2^2}{x_1 - x_2} = a(x_1 + x_2).$$

Khi đó:

1. Với $a > 0$
   - Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$.
   - Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.
2. Với $a < 0$
   - Nếu $x_1, x_2 > 0$ thì $A < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(0, +\infty)$.
   - Nếu $x_1, x_2 < 0$ thì $A > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty, 0)$.

Thí dụ 1: Hãy nêu tính chất biến thiên của các hàm số sau:

a. $y = 8x^2$.

b. $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Giải

a. Xét hàm số $y = 8x^2$ có $a = 8 > 0$, do đó:
- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_+$.

b. Xét hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có $a = -\frac{1}{2} < 0$, do đó:
- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_+$.

Thí dụ 2: Cho hàm số: $y = (m - 2)x^2$, với $m \neq 0$.

a. Tìm m để hàm số nghịch biến trên (1, 8).

b. Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(\sqrt{3}, 18)$.

Giải

a. Để hàm số nghịch biến trên $(1, 8) \subset \mathbf{R}_+$ điều kiện là: $m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Vậy, với $m < 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Điểm $A(\sqrt{3}, 18)$ thuộc đồ thị hàm số, điều kiện là:

$$18 = (m - 2).(\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow m - 2 = 6 \Leftrightarrow m = 8.$$

Vậy, với $m = 8$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hàm số: $y = \frac{1}{2}x^2$.

a. Hãy lập bảng tính các giá trị $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ và rút ra nhận xét.

b. Tìm x, biết $f(x) = 1$, $f(x) = 2 - \sqrt{3}$.

Giải

a. Ta lập bảng sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8

Từ kết quả trên, nhận thấy rằng: $f(-4) = f(4)$ và $f(-2) = f(2)$, tức là $f(-x) = f(x)$.

b. Ta lần lượt xét: $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

$f(x) = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 2 - \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x^2 = 2(2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2 \Leftrightarrow x = \pm(\sqrt{3} - 1)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số: $y = (2m - 4)x^2$.

Tìm giá trị của m để:

a. Hàm số nghịch biến với $x > 0$.

b. Có giá trị $y = 9$ khi $x = 3$.

c. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

d. Hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

Giải

Hàm số đã cho có dạng $y = ax^2$ với $a = 2m - 4 \neq 0$.

a. Hàm số nghịch biến với $x > 0$ khi và chỉ khi: $a < 0 \Leftrightarrow 2m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Vậy, với $m < 2$ hàm số nghịch biến với $x > 0$.

b. Thay $x = 3$ và $y = 9$ vào hàm số, ta được:

$$9 = (2m - 4).3^2 \Leftrightarrow 2m - 4 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Vậy, với $m = \frac{5}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Để hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 điều kiện là:

$$(2m - 4)x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 2$$

Vậy, với $m > 2$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

d. Để hàm số có giá trị lớn nhất là 0 điều kiện là:

$$(2m - 4)x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

Vậy, với $m < 2$ hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

Chú ý: Trong lời giải câu c) và d), chúng ta đã sử dụng tính chất $x^2 \geq 0$.

Ví dụ 3: Cho hàm số: $y = f(x) = ax^2$, với $a \neq 0$.

a. Chứng minh rằng $f(kx) = k^2f(x)$.

b. Tìm k để hệ thức trong câu a) còn đúng với hàm số:

$$y = g(x) = ax^2 + b, \text{ với } b \neq 0 \text{ hay không ?}$$

Giải

a. Ta có: $f(kx) = a(kx)^2 = ak^2x = k^2(ax) = k^2f(x)$, đpcm.

b. Ta xét: $g(kx) = a(kx)^2 + b = ak^2x^2 + b$

$k^2g(x) = k^2(ax^2 + b) = ak^2x^2 + bk^2$

Vậy, để có $g(kx) = k^2g(x)$, điều kiện là:

$$ak^2x^2 + b = ak^2x^2 + bk^2 \Leftrightarrow b = bk^2 \overset{b\neq 0}{\Leftrightarrow} k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1.$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Cho hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$.

a. Hãy chỉ ra tập xác định của hàm số.

b. Chứng minh tính chất biến thiên của hàm số.

Câu hỏi 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Hãy nêu tính chất biến thiên của các hàm số sau:

a. $y = 3x^2$.

b. $y = -\dfrac{9}{2}x^2$.

c. $y = (4 - 2\sqrt{3})x^2$.

d. $y = (m^2 + 1)x^2$.

e. $y = (m - 1)x^2$.

Bài tập 2. Cho hàm số: $y = 2x^2$.

a. Hãy lập bảng tính các giá trị $f(-5)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$ và rút ra nhận xét.

b. Tìm x, biết $f(x) = 8$, $f(x) = 6 - 4\sqrt{2}$.

Bài tập 3. Cho hàm số: $y = (m^2 - 3m + 2)x^2$.

Tìm giá trị của m để:

a. Hàm số đồng biến với $x > 0$.

b. Có giá trị $y = 8$ khi $x = 2$.

c. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

d. Hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Xét hàm số $y = 3x^2$ có $a = 8 > 0$, do đó:

- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_+$.

b. Xét hàm số $y = -\frac{9}{2}x^2$ có $a = -\frac{9}{2} < 0$, do đó:

- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_+$.

c. Xét hàm số $y = (4 - 2\sqrt{3})x^2$ có $a = 4 - 2\sqrt{3} > 0$, do đó:

- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_+$.

d. Xét hàm số $y = (m^2 + 1)x^2$ có $a = m^2 + 1 > 0$, do đó:

- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_+$.

e. Xét hàm số $y = (m - 1)x^2$ có $a = m - 1$, xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì:

- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_+$.

Trường hợp 2: Nếu $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì:

- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_+$.

Bài tập 2.

a. Ta lập bảng sau:

x	– 5	– 3	0	3	5
$y = 2x^2$	50	18	0	18	50

Từ kết quả trên, nhận thấy rằng: $f(-5) = f(5)$ và $f(-3) = f(3)$, tức là $f(-x) = f(x)$.

b. Ta lần lượt xét:

$$f(x) = 8 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

- $$f(x) = 6 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x^2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2 \Leftrightarrow x = \pm(\sqrt{2} - 1).$$

Bài tập 3. Hàm số đã cho có dạng $y = ax^2$ với $a = m^2 - 3m + 2 \neq 0$.

a. Hàm số đồng biến với $x > 0$ khi và chỉ khi:

$$a > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m - 1 < 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m < 1 \text{ hoặc } m > 2.$$

Vậy, với $m < 1$ hoặc $m > 2$ hàm số đồng biến với $x > 0$.

b. Thay $x = 2$ và $y = 8$ vào hàm số, ta được:

$$8 = (m^2 - 3m + 2).2^2 \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = 3.$$

Vậy, với $m = 0$ hoặc $m = 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Để hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 điều kiện là:

$$(m^2 - 3m + 2)x^2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < 1 \text{ hoặc } m > 2.$$

Vậy, với $m < 1$ hoặc $m > 2$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

d. Để hàm số có giá trị lớn nhất là 0 điều kiện là:

$$(m^2 - 3m + 2)x^2 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m - 1 < 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Vậy, với $1 < m < 2$ hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

CHỦ ĐỀ 2 ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$, với $a \neq 0$

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$, VỚI $a \neq 0$

Với hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$ chúng ta đều biết chỉ có hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$. Do đó, để tiện theo dõi chúng ta đi xét đồ thị của hai hàm số $y = x^2$ và $y = -2x^2$ ở hai cột sau:

Đồ thị hàm số $y = x^2$

1. Hàm số có tập xác định là **R**.
2. Ta có $f(x) = x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, do đó đồ thị hàm số luôn nằm phía trên trục Ox và nhận điểm O(0, 0) là điểm thấp nhất của đồ thị.
3. Vì $a = 1 > 0$ nên:
   - Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_+$.
   - Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$.
4. Ta có:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Đồ thị hàm số $y = -2x^2$

1. Hàm số có tập xác định là **R**.
2. Ta có $f(x) = -2x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, do đó đồ thị hàm số luôn nằm phía dưới trục Ox và nhận điểm O(0, 0) là điểm cao nhất của đồ thị.
3. Vì $a = -2 < 0$ nên:
   - Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_+$.
   - Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_-$.
4. Ta có:

$$f(-x) = -2(-x)^2 = -2x^2 = f(x)$$

do đó, đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

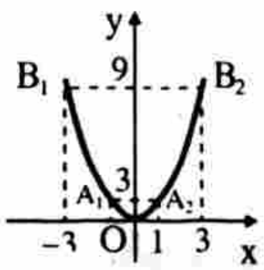
Như vậy, để vẽ đồ thị hàm số ta đi lấy 5 điểm:

- Điểm O(0, 0).
- Cặp điểm A_1, A_2 có hoành độ đối xứng qua O là

  $A_1(-1, 1)$ và $A_2(1, 1)$.
- Cặp điểm B_1, B_2 có hoành độ đối xứng qua O là

  $B_1(-3, 9)$ và $B_2(3, 9)$.

Nối các điểm B_1, A_1, O, A_2, B_2 theo đường cong ta nhận được đồ thị của hàm số



do đó, đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

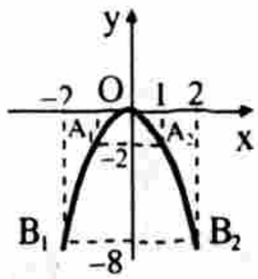
Như vậy, để vẽ đồ thị hàm số ta đi lấy 5 điểm:

- Điểm O(0, 0).
- Cặp điểm A_1, A_2 có hoành độ đối xứng qua O là

  $A_1(-1, -2)$ và $A_2(1, -2)$.
- Cặp điểm B_1, B_2 có hoành độ đối xứng qua O là

  $B_1(-2, -8)$ và $B_2(2, -8)$.

Nối các điểm B_1, A_1, O, A_2, B_2 theo đường cong ta nhận được đồ thị của hàm số



Như vậy, ta được kết quả:

> Đồ thị của hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$ là một đường *Parabol*:
> - Có đỉnh là gốc toạ độ O (0 ; 0).
> - Có trục đối xứng Oy.
> - Nếu a > 0, đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành và nhận điểm O là điểm "thấp nhất".
> - Nếu a < 0, đồ thị hàm số nằm phía dưới trục hoành và nhận điểm O là điểm "cao nhất".

2. CÁCH VẼ ĐỒ THỊ

Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$ ta đi lấy 5 điểm:

- Điểm O(0, 0).
- Cặp điểm A_1, A_2 có hoành độ đối xứng qua O.
- Cặp điểm B_1, B_2 có hoành độ đối xứng qua O.

Nối các điểm B_1, A_1, O, A_2, B_2 theo đường cong ta nhận được đồ thị của hàm số.

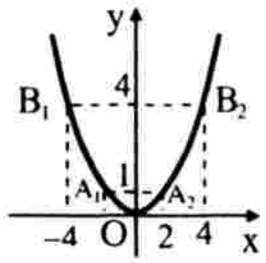
<u>Thí dụ 1:</u> Cho hàm số: $y = \frac{1}{4}x^2$.

a. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Các điểm A(0; 0), B(2; 1), $C(\frac{3}{2}; \frac{9}{16})$, D(3; 4) có thuộc đồ thị của hàm số không?

Giải

a. Để vẽ đồ thị hàm số, ta lấy 5 điểm:



- Điểm O(0, 0).
- Cặp điểm $A_1(-2, 1)$, $A_2(2, 1)$.
- Cặp điểm $B_1(-4, 4)$, $B_2(4, 4)$.
- Nối các điểm B_1, A_1, O, A_2, B_2 theo đường cong ta nhận được đồ thị của hàm số.

b. Thay toạ độ các điểm A, B, C, D vào hàm số, ta nhận thấy:

- Các điểm A, B, C thuộc đồ thị hàm số.
- Điểm D không thuộc đồ thị hàm số.

Thí dụ 2: Cho các hàm số: (P): $y = ax^2$, với $a \neq 0$.

Chứng minh rằng (P) nhận trục Oy làm trục đối xứng. Từ đó suy ra một cách vẽ khác cho

Giải

Để chứng minh (P) nhận trục Oy làm trục đối xứng, ta đi chứng minh với điểm $M(x_0, y_0)$ thuộc (P) thì điểm $M'(-x_0, y_0)$ cũng thuộc (P).

Thật vậy: $M(x_0, y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = a\,x_0^2 = a(-x_0)^2 \Leftrightarrow M'(-x_0, y_0) \in (P)$.

Vậy, (P) nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Suy ra, để vẽ (P) chúng ta chỉ cần:

- Lấy ba điểm O(0, 0), A(1, a), B(2, 4a), nối chúng lại sẽ nhận được một nhánh của (P).
- Đối xứng nhánh trên qua Oy.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho hàm số: $y = (m - 1)x^2$

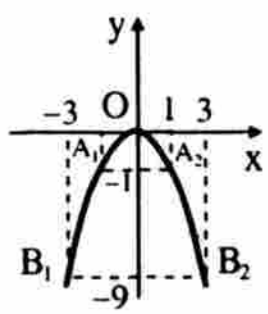
a. Xác định m để đồ thị hàm số đi qua điểm A(1, −1). Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.

b. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có hoành độ bằng 5.

c. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ bằng − 4.

d. Tìm điểm thuộc parabol có tung độ gấp đôi hoành độ.

Giải



a. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(1, −1), khi và chỉ khi:

$$-1 = (m - 1).1^2 \Leftrightarrow m - 1 = -1 \Leftrightarrow m = 0.$$

Với m = 0, hàm số có dạng: (P): $y = -x^2$.

Để vẽ đồ thị hàm số, ta lấy 5 điểm:

- Điểm $O(0, 0)$.
- Cặp điểm $A_1(-1, -1)$, $A_2(1, -1)$.
- Cặp điểm $B_1(-3, -4)$, $B_2(3, -4)$.

Nối các điểm B_1, A_1, O, A_2, B_2 theo đường cong ta nhận được đồ thị của hàm số.

b. Gọi điểm thuộc Parabol (P) có hoành độ bằng – 4 là B (5 ; b), suy ra:

$$b = -5^2 \Leftrightarrow b = -25.$$

Vậy, điểm cần tìm là $B(5; -25)$.

c. Gọi điểm thuộc Parabol (P) có tung độ bằng – 4 là C (c ; –4), suy ra:

$$-4 = -c^2 \Leftrightarrow c^2 = 4 \Leftrightarrow c = \pm 2.$$

Vậy, ta nhận được hai điểm cần tìm là $C_1(2; -4)$ và $C_2(-2, -4)$.

d. Gọi điểm thuộc Parabol (P) có tung độ gấp đôi hoành độ là $M(m; 2m)$, suy ra:

$$2m = -m^2 \Leftrightarrow m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m(m + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $m = 0$, ta được gốc $O(0, 0)$.
- Với $m = -2$, ta được điểm $M(-2, -4)$.

Vậy, có hai điểm là gốc $O(0, 0)$ và điểm $M(-2, -4)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 2: Cho hàm số: $y = -3x^2$.

a. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Chứng minh rằng hàm số đồng biến khi $x < 0$, nghịch biến khi $x > 0$.

c. Chứng minh rằng y không dương với mọi giá trị của x.

Giải

a. *Học sinh tự làm.*

b. Hàm số $y = -3x^2$ có dạng $y = ax^2$.

Với: $a = -3 < 0$ và $x \in \mathbf{R}$.

Vậy, y đồng biến khi $x < 0$, nghịch biến khi $x > 0$.

c. Ta xét hai trường hợp:

- Nếu $x = 0 \Rightarrow y = -3.0 = 0$.
- Nếu $x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Rightarrow y = -3x^2 < 0$.

Vậy, ta được $y \leq 0$ với mọi giá trị của x.

Ví dụ 3: Cho Parabol (P) có phương trình: (P): $y = 2x^2$.

a. Trên cùng một hệ toạ độ vẽ Parabol (P) và các đường thẳng $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 8$.

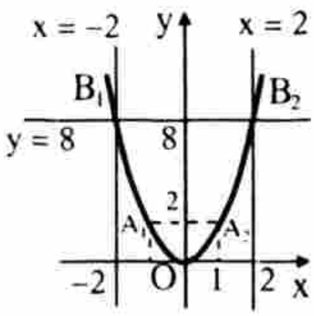
b. Parabol (P) cắt mỗi đường thẳng trên tại mấy điểm ? Xác định toạ độ các giao điểm đó.

c. Đường thẳng $x = m$ có thể không cắt Parabol (P) hoặc cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt không ? Vì sao ?

d. Biện luận theo n vị trí tương đối của đường thẳng $y = n$ với Parabol (P).

Giải

a. Ta lần lượt thực hiện:



- Vẽ Parabol (P) bằng cách lấy 5 điểm:
  $O(0, 0)$,
  $A_1(-1, 2)$ và $A_2(1, 2)$,
  $B_1(-2, 8)$ và $B_2(2, 8)$.
- Đường thẳng $x = -2$ song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng -2.
- Đường thẳng $x = 0$ chính là trục Oy.
- Đường thẳng $x = 2$ song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 2.
- Đường thẳng $y = 8$ song song với Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 8.

b. Ta thấy ngay:

- Parabol (P) cắt đường thẳng $x = -2$ tại điểm $B_1(-2, 8)$.
- Parabol (P) cắt đường thẳng $x = 0$ tại gốc $O(0, 0)$.
- Parabol (P) cắt đường thẳng $x = 2$ tại điểm $B_1(2, 8)$.
- Parabol (P) cắt đường thẳng $y = 8$ tại hai điểm $B_1(-2, 8)$ và $B_2(2, 8)$.

c. Nhận xét rằng:

- Parabol (P) không thể không cắt đường thẳng $x = m$ bởi hàm số $y = 2x^2$ có tập xác định là **R**.
- Parabol (P) không thể cắt đường thẳng $x = m$ tại hai điểm phân biệt bởi $y = 2x^2$ là một hàm số (với mỗi x chỉ có duy nhất 1 giá trị của y).

d. Dựa vào đồ thị, ta có:

- Nếu $n < 0$ thì đường thẳng $y = n$ không cắt Parabol (P).
- Nếu $n = 0$ thì đường thẳng $y = n$ và Parabol (P) có điểm chung $O(0, 0)$.
- Nếu $n > 0$ thì đường thẳng $y = n$ cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 4: Cho các hàm số: $y = f(x) = x^2$, $y = g(x) = x^2 - 6$, $y = h(x) = x^2 + 5$.

a. Tìm tập xác định của ba hàm số trên.

b. Với $x = -2; 0; 1; 2; 3$ hãy tính các giá trị tương ứng $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$.

c. Có nhận xét gì về giá trị của các hàm số $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ứng với cùng một giá trị của biến số x, từ đó đưa ra kết luận về đồ thị các hàm số $y = g(x)$ và $y = h(x)$.

d. Với giá trị nào của x thì các hàm số nhận giá trị nhỏ nhất ?

Giải

a. Ba hàm số trên đều có tập xác định là **R**.

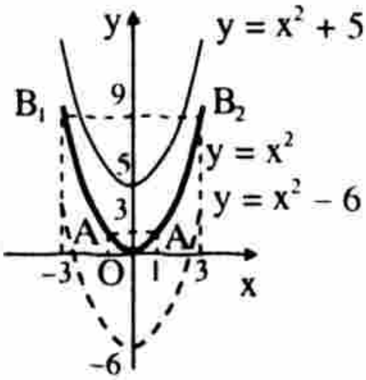
b. Ta lập bảng:

x	–2	0	1	2	3
f(x)	4	0	1	4	9
g(x)	–2	–6	–5	–2	3
h(x)	9	5	6	9	14

c. Từ bảng, ta nhận thấy với bất kì hoành độ nào thì

- Tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = g(x)$ cũng nhỏ hơn tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ là 6 đơn vị.
- Tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = h(x)$ cũng lớn hơn tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ là 5 đơn vị.

Vậy, ta thấy rằng nếu đã có được đồ thị hàm số $y = x^2$ thì:



- Bằng phép tịnh tiến đồ thị này theo trục Oy xuống dưới 6 đơn vị, ta nhận được đồ thị hàm số $y = x^2 - 6$.
- Bằng phép tịnh tiến đồ thị này theo trục Oy lên trên 5 đơn vị, ta nhận được đồ thị hàm số $y = x^2 + 5$.

d. Với $x = 0$ thì các hàm số nhận giá trị nhỏ nhất và

- Hàm số $y = f(x) = x^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0.
- Hàm số $y = g(x) = x^2 - 6$ có giá trị nhỏ nhất bằng –6.
- Hàm số $y = h(x) = x^2 + 5$ có giá trị nhỏ nhất bằng 5.

Nhận xét: Như vậy, để vẽ được đồ thị hàm số $y = ax^2 + b$, ta thực hiện:

- Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$.
- Tịnh tiến đồ thị này theo trục Oy b đơn vị (lên trên nếu $b > 0$, xuống dưới nếu $b < 0$) ta nhận được đồ thị hàm số $y = ax^2 + b$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$.

Câu hỏi 2: Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$ nhận trục Oy làm trục đối xứng. Từ đó suy ra một cách vẽ khác cho đồ thị hàm số.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hàm số: $y = f(x) = -2x^2$.

a. Tính $f(1)$, $f(\frac{1}{3})$.

b. Vẽ đồ thị hàm số.

c. Tìm tập hợp điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng 4.

d. Chứng minh rằng hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

Bài tập 2. Hàm cho các hàm số: $y = \frac{2}{3}x^2$.

a. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Các điểm $A(0; 0)$, $B(3; 6)$, $C(1; \frac{3}{2})$, $D(3; 1)$ có thuộc đồ thị của hàm số không?

Bài tập 3. Cho hàm số: $y = -125x^2$.

a. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số.

b. Tìm giá trị của m và n để các điểm $A(1; m)$ và $B(n ; 125)$ thuộc đồ thị hàm số trên.

Bài tập 4. Cho hàm số: $y = (m + 1)x^2$.

a. Xác định m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1 ; 2)$.

b. Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.

c. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có hoành độ bằng 2.

d. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ bằng -8.

e. Tìm điểm thuộc parabol có tung độ gấp ba hoành độ.

Bài tập 5. Cho hàm số: $y = (2m - 1)x^2$.

a. Xác định m để điểm $A(-1 ; 2)$ thuộc đồ thị hàm số.

b. Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.

c. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có hoành độ bằng 5.

d. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ bằng -7.

CHỦ ĐỀ 3 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Phương trình bậc hai một ẩn số là phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ với } a \neq 0$$

trong đó x là ẩn số và a, b, c là các hệ số đã cho.

Thí dụ 1: Với phương trình:

$2x^2 - 3x + 2 = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x với $a = 2$, $b = -3$, $c = 2$.

$4x^2 + 1 = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x với $a = 4$, $b = 0$, $c = 1$, còn gọi là phương trình khuyết b.

$x^2 + 4x = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x với $a = 1$, $b = 4$, $c = 0$, còn gọi là phương trình khuyết c.

Nhận xét: Như vậy, với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

- Nếu $b = 0$, ta có: $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$.

gọi là phương trình bậc hai khuyết b.

- Nếu $c = 0$, ta có: $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0)$.

gọi là phương trình bậc hai khuyết c.

2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Chúng ta đã từng giải các phương trình bậc hai bằng một vài cách khác nhau (với mỗi phương trình), và để tiện ôn lại chúng ta sẽ bắt đầu bằng các thí dụ:

Thí dụ 2: Giải các phương trình:

a. $4x^2 + 1 = 0$. b. $x^2 - 2 = 0$.

Giải

a. Biến đổi phương trình về dạng: $x^2 = -\frac{1}{4} < 0$, nên phương trình vô nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng: $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2}$.

Nhận xét: Như vậy, với phương trình khuyết b dạng:

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}.$$

- Nếu $-\frac{c}{a} \geq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.
- Nếu $-\frac{c}{a} < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Thí dụ 3: Giải các phương trình:

a. $x^2 + 2x = 0$. b. $2x^2 - 9x = 0$.

Giải

a. Biến đổi phương trình về dạng: $x(x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = -2$.

b. Biến đổi phương trình về dạng: $x(2x - 9) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x - 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{9}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = \frac{9}{2}$.

Nhận xét: Như vậy, với phương trình khuyết c dạng:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{array}\right..$$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = -\frac{b}{a}$.

Thí dụ 4: Giải các phương trình:

a. $x^2 - 2x - 3 = 0$. b. $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

Giải

a. Biến đổi phương trình về dạng tích theo các cách:

Cách 1: (*Sử dụng phép tách theo a*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = 3x^2 - 2x^2 - 2x - 3 = (3x^2 - 3) - (2x^2 + 2x)$$

$$= 3(x^2 - 1) - 2x(x + 1) = 3(x - 1)(x + 1) - 2x(x + 1)$$

$$= (x + 1)[3(x - 1) - 2x] = (x + 1)(x - 3).$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 3$ và $x = -1$.

Cách 2: (*Sử dụng phép tách theo b*): Ta có:

$$\begin{aligned} x^2-2x-3 &= x^2+x-3x-3=(x^2+x)-(3x+3) \\ &= x(x+1)-3(x+1)=(x+1)(x-3). \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 3$ và $x = -1$.

Cách 3: (*Sử dụng phép tách theo c*): Ta có:

$$\begin{aligned} x^2-2x-3 &= x^2-2x-2-1=(x^2-1)-(2x+2) \\ &= (x-1)(x+1)-2(x+1)=(x+1)(x-1-2) \\ &= (x+1)(x-3). \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x-3)(x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 3$ và $x = -1$.

Cách 4: (*Sử dụng phép tách tạo hằng đẳng thức*): Ta có:

$$\begin{aligned} x^2-2x-3 &= x^2-2.x.1+1-4=(x-1)^2-4 \\ &= (x-1-2)(x-1+2)=(x-3)(x+1). \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x-3)(x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 3$ và $x = -1$.

b. Biến đổi vế trái của phương trình về dạng tích theo các cách:

Cách 1: (*Sử dụng phép tách theo a*): Ta có:

$$\begin{aligned} 2x^2-5x+3 &= 5x^2-3x^2-5x+3=(5x^2-5x)-3(x^2-1) \\ &= 5x(x-1)-3(x-1)(x+1)=(x-1)(5x-3x-3)=(x-1)(2x-3). \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x-1)(2x-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \dfrac{3}{2}$.

Cách 2: (*Sử dụng phép tách theo b*): Ta có:

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = (2x^2 - 2x) - (3x - 3)$$
$$= 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(2x - 3).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 1)(2x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \dfrac{3}{2}$.

Cách 3: (*Sử dụng phép tách theo c*): Ta có:

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 5x + 5 - 2 = (2x^2 - 2) - (5x - 5)$$
$$= 2(x - 1)(x + 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(2x + 2 - 5) = (x - 1)(2x - 3).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 1)(2x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \dfrac{3}{2}$.

Cách 4: (*Sử dụng phép tách tạo hằng đẳng thức*): Ta có:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2.\frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{4} \\ x-\dfrac{5}{4}=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \dfrac{3}{2}$.

Cách 5: (*Sử dụng phép tách tạo hằng đẳng thức*): Ta có:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow 16x^2 - 40x + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x)^2 - 2.4x.5 + 25 - 1 = 0 \Leftrightarrow (4x-5)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - 5 = 1 \\ 4x - 5 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \dfrac{3}{2}$.

Nhận xét: Như vậy, với phương trình không khuyết : $ax^2 + bx + c = 0$.

Ta lựa chọn một trong hai phương pháp:

Phương pháp 1. Biến đổi thành phương trình tích:

$$a(x + m)(x + n) = 0.$$

Phương pháp 2. Biến đổi thành phương trình dạng: $a(x + m)^2 = n$.

và phương pháp 2 luôn được yêu tiên, bởi phương pháp 1 chỉ có thể được thực hiện trong trường hợp phương trình có 2 nghiệm (mà như chúng ta đã biết một phương trình bậc hai có thể vô nghiệm, có 1 nghiệm hoặc 2 nghiệm).

Trong các cách 4 và cách 5 của câu b) đã chỉ ra cho chúng ta hai cách biến đổi phương trình về dạng $A^2 = m$, trong trường hợp hệ số a không phải là số chính phương.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Viết lại các phương trình sau dưới dạng $ax^2 + bx + c$, rồi xác định các hệ số a, b, c của chúng:

a. $x^2 - x - 1 = x + 2$.

b. $3x^2 - 5x = x^2 - 3$.

c. $\sqrt{2}\,x^2 + x + 3 - \sqrt{3}\,x = 0$.

d. $m^2x^2 + 2x - m = x^2 - mx$.

Giải

a. Chuyển phương trình về dạng: $x^2 - 2x - 3 = 0$,

suy ra $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$.

b. Chuyển phương trình về dạng: $2x^2 - 5x + 3 = 0$,

suy ra $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$.

c. Chuyển phương trình về dạng: $\sqrt{2}\,x^2 + (1 - \sqrt{3})x + 3 = 0$,

suy ra $a = \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{3}$, $c = 3$.

d. Chuyển phương trình về dạng: $(m^2 - 1)x^2 + (2 + m)x - m = 0$,

suy ra $a = (m^2 - 1)$, $b = 2 + m$, $c = -m$.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $x^2 - (m + 1)x + m = 0$.

a. Xác định các hệ số a, b, c của phương trình.

b. Giải phương trình với $m = -1$.

c. Giải phương trình với $m = 0$.

d. Giải phương trình với $m = 3$.

Giải

a. Ta có ngay: $a = 1$, $b = -(m + 1)$, $c = m$.

b. Với $m = -1$, phương trình có dạng:

$$x^2 - (-1 + 1)x + (-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy, với $m = -1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm 1$.

c. Với $m = 0$, phương trình có dạng:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, với $m = 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = 1$.

d. Với $m = 3$, phương trình có dạng:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4 - 3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 1 \\ x - 2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, với $m = 3$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 3$ và $x = 1$.

Nhận xét:

1. Việc nêu ra ví dụ trên giúp các em học sinh ôn tập được lại các kiến thức cơ bản trong chủ đề này, bao gồm:
   - Xác định các hệ số của phương trình bậc hai trong câu a).
   - Giải phương trình bậc hai khuyết b trong câu b).
   - Giải phương trình bậc hai khuyết c trong câu c).
   - Giải phương trình bậc hai đầy đủ trong câu d) bằng việc biến đổi về dạng bình phương.
2. Qua lời giải của các câu b), c), d) chúng ta thấy ngay rằng trong ba trường hợp này phương trình đều có nghiệm $x = 1$, nhận định này sẽ giúp chúng ta có thể trình bày lời giải gọn hơn, cụ thể:

$$x^2 - (m + 1)x + m = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - mx + m = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) - m(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $m = -1$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = -1$.
- Với $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 0$.
- Với $m = 3$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 3$.

Ví dụ 3: Cho phương trình: $2x^2 - mx - m + 1 = 0$.

Tìm m để phương trình có một nghiệm là 2 và giải phương trình đó.

Giải

Phương trình nhận $x = 2$ làm nghiệm khi:

$$2.2^2 - m.2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow 3m = 9 \Leftrightarrow m = 3.$$

Với $m = 3$, phương trình có dạng: $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 2$ và $x = -\dfrac{1}{2}$.

Nhận xét: Trong lời giải trên, sở dĩ biến đổi được ngay:

$$2x^2 - 3x - 2 = (x-2)(2x+1)$$

do chúng ta tận dụng kết quả trước đó là " *Phương trình có nghiệm $x = 2$* ", suy ra đa thức $2x^2 - 3x - 2$ chia hết cho $x - 2$.

Ví dụ 4: Giải các phương trình:

a. $2x^2 - x - 1 = 0$. b. $2x^2 - 4x + 7 = 0$.

Giải

a. Ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$16x^2 - 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow (4x)^2 - 2.4x + 1 = 1 + 8 \Leftrightarrow (4x-1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-1=3 \\ 4x-1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = -\dfrac{1}{2}$.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng: $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2.\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ x - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Cách 3: Biến đổi vế trái của phương trình về dạng:

$$2x^2 - x - 1 = x^2 + x^2 - x - 1 = (x^2 - x) + (x^2 - 1)$$
$$= (x - 1)(x + x + 1) = (x - 1)(2x + 1).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 1)(2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Cách 4: Biến đổi vế trái của phương trình về dạng:

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(2x + 1).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 1)(2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1. \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Cách 5: Biến đổi vế trái của phương trình về dạng:

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 - x + 1 - 2 = 2(x^2 - 1) - (x - 1)$$
$$= (x - 1)(2x + 2 - 1) = (x - 1)(2x + 1).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 1)(2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = -\frac{1}{2}$.

b. Ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng: $4x^2 - 8x + 14 = 0$

$\Leftrightarrow (2x)^2 - 2.2x.2 + 4 = 4 - 14 \Leftrightarrow (2x - 2)^2 = -10 < 0$, vô nghiệm.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2 - 2x + \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 - \frac{7}{2}$$

$\Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 = -\frac{5}{2} < 0$, vô nghiệm.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Nhận xét:

1. Với phương trình trong câu a), sau khi sử dụng cách 1 và cách 2 (biến đổi về dạng bình phương) chúng ta nhận thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt, chính vì điều này nên phương trình mới có thể được giải thêm bằng các cách 3, cách 4, cách 5 theo hướng phân tích đa thức thành nhân tử.
2. Với phương trình trong câu b), sau khi sử dụng cách 1 và cách 2 nhận thấy phương trình vô nghiệm, do đó không thực hiện phép phân tích đa thức được.

Để khẳng định thêm cho nhận định trên, chúng ta sẽ xem xét thêm một ví dụ về phương trình bậc hai có nghiệm vô tỉ.

Ví dụ 5: Giải các phương trình: $x^2 - 4x + 2 = 0$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng: $x^2 - 4x + 4 = 4 - 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = \sqrt{2} \\ x - 2 = -\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

Nhận xét: Qua ví dụ trên, ta thấy ngay rằng nếu chọn phương pháp tách hệ số để phương trình đa thức bậc hai thành nhân tử thì rất phức tạp. Và tới đây, các em học sinh cần biết rằng phương pháp biến đổi $A^2 = m$ chính là ý tưởng để xây dựng được công thức nghiệm của phương trình bậc hai (trong chủ đề 4).

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn và cho ví dụ.

Câu hỏi 2: Viết dạng phương trình bậc hai khuyết b. Nêu phương pháp giải phương trình bậc hai khuyết b và minh hoạ bằng một ví dụ.

Câu hỏi 3: Viết dạng phương trình bậc hai khuyết c. Nêu phương pháp giải phương trình bậc hai khuyết b và minh hoạ bằng một ví dụ.

Câu hỏi 4: Với phương trình bậc hai dạng đầy đủ chúng ta thường chọn cách giải nào trước và vì sao ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Viết lại các phương trình sau dưới dạng $ax^2 + bx + c$, rồi xác định các hệ số a, b, c của chúng:

a. $x^2 - 3x - 2 = x + 2$.

b. $4x^2 - 8x = 3x^2 - 5$.

c. $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x + 3 - x = 0$.

d. $mx^2 + 2mx - 3m = x^2 - mx$.

Bài tập 2. Cho phương trình: $x^2 - (4m + 1)x + 4m = 0$.

a. Xác định các hệ số a, b, c của phương trình.

b. Giải phương trình với $m = -\frac{1}{4}$, $m = 0$, $m = 1$.

c. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 9$.

d. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $x_1 = x_2^2$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. $4x^2 - 1 = 0$.

b. $(m^2 + 2)x^2 + 1 = 0$.

c. $\sqrt{3}x^2 + 6x = 0$.

d. $m^2x^2 - 2x = x - x^2$.

Bài tập 4. Giải các phương trình sau bằng 5 cách:

a. $x^2 + 2x - 3 = 0$.

b. $4x^2 + 3x - 7 = 0$.

c. $-3x^2 + 2x + 1 = 0$.

d. $x^2 + 5x + 4 = 0$.

e. $2x^2 + 5x + 3 = 0$.

f. $-7x^2 + 5x + 12 = 0$.

Bài tập 5. Giải các phương trình sau:

a. $x^2 - 2x - 4 = 0$.

b. $2x^2 + 4x + 1 = 0$.

c. $x^2 + x - 3 = 0$.

d. $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

Bài tập 6. Cho phương trình: $mx^2 - (2m + 1)x + 4 = 0$.

Tìm m để phương trình có một nghiệm là $\frac{4}{3}$ và giải phương trình đó.

Bài tập 7. Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$.

a. Chứng minh rằng nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{c}{a}$.

b. Chứng minh rằng nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = -\frac{c}{a}$.

Bài tập 8. Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$.

Bằng việc biến đổi phương trình về dạng $A^2 = m$ hãy chứng minh rằng:

a. Nếu $b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Nếu $b^2 - 4ac = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = -\frac{b}{2a}$.

c. Nếu $b^2 - 4ac < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 2.

a. Ta có ngay $a = 1$, $b = -4m - 1$, $c = 4m$.

b. Biến đổi phương trình về dạng tích bằng cách:

$$x^2 - x - 4mx + 4m = 0 \Leftrightarrow x(x-1) - 4m(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-4m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 4m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4m \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $m = -\frac{1}{4}$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = -1$.
- Với $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 0$.
- Với $m = 1$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 4$.

c. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 9$, điềukiện là

$$\begin{cases} 4m \neq 1 \\ 1 + 4m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{4} \\ 4m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{4} \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy, với $m = 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $x_1 = x_2^2$, điều kiện là:

$$\begin{cases} 4m \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} 4m = 1^2 \\ 1 = (4m)^2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{4} \\ \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{4} \\ m = \pm\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}.$$

Vậy, với $m = -\dfrac{1}{4}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 3.

a. $x = \pm\dfrac{1}{2}$.

b. Vô nghiệm.

c. $x = 0$ và $x = -2\sqrt{3}$.

d. $x = 0$ và $x = \dfrac{3}{m^2+1}$.

Bài tập 4.

a. $x = 1$ và $x = -3$.

b. $x = 1$ và $x = -\dfrac{7}{4}$.

c. $x = 1$ và $x = -\dfrac{1}{3}$.

d. $x = -1$ và $x = -4$.

e. $x = -1$ và $x = -\dfrac{3}{2}$.

f. $x = -1$ và $x = -\dfrac{12}{7}$.

Bài tập 5.

a. $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

b. $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

c. $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

d. $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$.

Bài tập 6. Phương trình nhận $x = \dfrac{4}{3}$ làm nghiệm khi:

$$m.\left(\frac{4}{3}\right)^2 - (2m+1).\frac{4}{3} + 4 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $6m - 12(2m + 1) + 36 = 0$

$\Leftrightarrow$ $8m = 24 \Leftrightarrow m = 3$.

Với $m = 3$, phương trình có dạng:

$3x^2 - 7x + 4 = 0 \Leftrightarrow (3x - 4)(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{3} \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{4}{3}$ và $x = 1$.

Bài tập 7.

a. Với giả thiết: $a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$.

Khi đó, phương trình có dạng: $ax^2 + bx - a - b = 0 \Leftrightarrow a(x^2 - 1) + b(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(ax + a + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ ax + a + b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-a-b}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{c}{a} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \dfrac{c}{a}$.

b. Làm tương tự như câu a).

Bài tập 8. *Hướng dẫn* Biến đổi phương trình về dạng: $\left(x - \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

CHỦ ĐỀ 4 CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. CÔNG THỨC NGHIỆM

Trong chủ đề 3, chúng ta đã biết cách giải một phương trình bậc hai bằng việc biến đổi nó về dạng $A^2 = m$. Trong chủ đề này, chúng ta sẽ đi thực hiện việc biến đổi trên cho phương trình dạng tổng quát: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$.

Thật vậy, chia cả hai vế của phương trình cho $a \neq 0$, ta được:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Tới đây, để cho gọn ta đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, khi đó phương trình được viết:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Do đó:

1. Nếu $\Delta < 0$, phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $\Delta = 0$, phương trình có dạng: $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \dfrac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$.

3. Nếu $\Delta > 0$, phương trình có dạng: $\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}\right.$.

Từ đó, ta có bảng tóm tắt sau:

Phương trình : $ax^2 + bc + c = 0$, với $a \neq 0$.   *ta có $\Delta = b^2 - 4ac$.*   1. *Nếu $\Delta < O$ thì phương trình vô nghiệm.*   2. *Nếu $\Delta = O$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.*   3. *Nếu $\Delta > O$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:* $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ *và* $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Thí dụ 1: Giải các phương trình:

a. $2x^2 - 7x + 3 = 0$.
c. $9x^2 - 24x + 16 = 0$.
b. $3x^2 + 5x = 0$.
d. $x^2 + 6x + 10 = 0$.

Giải

a. Với phương trình, ta có a = 2, b = −7, c = 3, suy ra:

$$\Delta = (-7)^2 - 4.2.3 = 49 - 24 = 25 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5.$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{7+5}{4} = 3 \text{ và } x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}.$$

b. Với phương trình, ta có a = 3, b = 5, c = 0, suy ra:

$$\Delta = 5^2 - 4.3.0 = 25 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5.$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-5+5}{6} = 0 \text{ và } x_2 = \frac{-5-5}{6} = -\frac{5}{3}.$$

c. Với phương trình, ta có a = 9, b = −24, c = 16, suy ra:

$$\Delta = (-24)^2 - 4.9.16 = 576 - 576 = 0.$$

Do đó, phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \dfrac{24}{18} = \dfrac{4}{3}$.

d. Với phương trình, ta có a = 1, b = 6, c = 10, suy ra:

$$\Delta = 6^2 - 4.1.10 = 36 - 40 = -4 < 0.$$

Do đó, phương trình vô nghiệm.

Nhận xét: 1. Như vậy, chúng ta đã xây dựng được một công cụ hữu ích để giải được mọi phương trình bậc hai, và thí dụ trên minh hoạ việc sử dụng công cụ này.

2. Tuy nhiên, như chúng ta thấy trong câu b) thì việc sử dụng công cụ này cho những phương trình bậc hai dạng khuyết đã gây thêm độ phức tạp. Do đó, đối với phương trình bậc hai dạng khuyết lời khuyên là hãy sử dụng phương pháp giải đã biết trong chủ đề 3.

Thí dụ 2: Xác định số nghiệm của các phương trình sau:

a. $x^2 - mx - 1 = 0$.

b. $x^2 + (m + 4)x + 4m = 0$.

c. $4x^2 + 12mx + 9m^2 = 0$.

d. $x^2 + 2x + m^2 + 2 = 0$.

Giải

a. Với phương trình, ta có $a = 1$, $b = -m$, $c = -1$, suy ra:

$$\Delta = (-m)^2 - 4.1.(-1) = m^2 + 4 > 0.$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Với phương trình, ta có $a = 1$, $b = m + 4$, $c = 4m$, suy ra:

$$\Delta = (m + 4)^2 - 4.1.4m = m^2 + 8m + 16 - 16m$$
$$= m^2 - 8m + 16 = (m - 4)^2 \geq 0.$$

Do đó:

- Với $m = 4$ thì phương trình có nghiệm kép.
- Với $m \neq 4$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c. Với phương trình, ta có $a = 4$, $b = 12m$, $c = 9m^2$, suy ra:

$$\Delta = (12m)^2 - 4.4.9m^2 = 144m^2 - 144m^2 = 0.$$

Do đó, phương trình có nghiệm kép.

d. Với phương trình, ta có $a = 1$, $b = 2$, $c = m^2 + 2$, suy ra:

$$\Delta = 2^2 - 4.1.(m^2 + 2) = -4m^2 - 4 < 0.$$

Do đó, phương trình vô nghiệm.

Nhận xét: 1. Như vậy, bằng việc xác định được dấu của Δ trong các phương trình có tham số chúng ta đã đưa ra lời kết luận nghiệm cho phương trình bậc hai và đây chính là bài toán xuôi. Các bài toán ngược (*Tìm điều kiện của tham số để phương trình vô nghiệm, có nghiệm kép, có hai nghiệm phân biệt*) được thực hiện theo chiều ngược lại.

2. Ta biết rằng với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

từ đó, nếu ac < 0 (đọc là a và c trái dấu) thì $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, tức là phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Việc sử dụng kết quả này, trong nhiều trường hợp sẽ giúp giảm được các phép tính không cần thiết.

2. CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN

Xét phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$.

Giả sử $b = 2b'$.

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = (2b')^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$.

Đặt $\Delta' = b'^2 - ac$, ta thấy ngay Δ và Δ' cùng dấu, do đó:

1. Nếu $\Delta' < 0$, phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $\Delta' = 0$, phương trình có nghiệm kép: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2b'}{2a} = -\dfrac{b'}{a}$.
3. Nếu $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b' + \sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b' - \sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Từ đó, ta có bảng tóm tắt sau:

> ***Phương trình** : $ax^2 + bc + c = 0$, với $a \neq 0$ và $b = 2b'$.*
> *ta có $\Delta' = b'^2 - ac$.*
>
> 1. ***Nếu $\Delta, < O$ thì phương trình vô nghiệm.***
> 2. ***Nếu $\Delta' = O$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$.***
> 3. ***Nếu $\Delta > O$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:***
>
> $$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ và } x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

<u>Thí dụ 3:</u> Giải các phương trình:

a. $3x^2 - 4x - 2 = 0$.   b. $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$.

Giải

a. Với phương trình, ta có $a = 3$, $b = -4 \Rightarrow b' = -2$, $c = -2$ suy ra:

$$\Delta' = (-2)^2 - 3.(-2) = 4 + 6 = 10 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{10}.$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{10}}{3}$ và $x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{10}}{3}$.

b. Với phương trình, ta có $a = 1$, $b = 2\sqrt{2} \Rightarrow b' = \sqrt{2}$, $c = 1$ suy ra:

$\Delta' = (\sqrt{2})^2 - 1.1 = 2 - 1 = 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 1$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \sqrt{2} + 1$ và $x_2 = \sqrt{2} - 1$.

Thí dụ 4: Cho phương trình: $x^2 + 2mx + 4m - 3 = 0$.

Tìm m để phương trình có nghiệm kép và chỉ ra nghiệm kép đó.

Giải

Với phương trình, ta có $a = 1$, $b = 2m \Rightarrow b' = m$, $c = 4m - 3$ suy ra:

$\Delta' = m^2 - 1.(4m - 3) = m^2 - 4m + 3$.

Phương trình có nghiệm kép khi và chỉ khi:

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1$ hoặc $m = 3$.

Khi đó:

- Với $m = 1$, phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{1}{1} = -1$.
- Với $m = 3$, phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{3}{1} = -3$.

Nhận xét: Trong lời giải của thí dụ trên:

1. Khi thực hiện giải phương trình $m^2 - 4m + 3 = 0$ chúng ta đã sử dụng tính chất $a + b + c = 0$ để nhận được ngay hai nghiệm $m = 1$ và $m = 3$.
2. Khi tìm nghiệm kép ứng với mỗi giá trị của m, chúng ta thay m vào công thức $x = -\frac{b'}{a} = -m$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Các dạng toán liên quan tới kiến thức của chủ đề này, bao gồm:

Dạng 1: Giải phương trình bậc hai.

Dạng 2: Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai.

Dạng 3: Nghiệm nguyên và nghiệm hữu tỉ.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Viết bảng tóm tắt về nghiệm của phương trình bậc hai.

Câu hỏi 2: Viết bảng tóm tắt về nghiệm của phương trình bậc hai có $b = 2b'$.

BÀI TOÁN 1

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. PHƯƠNG PHÁP

Ta có thể sử dụng một trong ba phương pháp sau:

Phương pháp 1. Biến đổi thành phương trình dạng: $a(x + m)^2 = n$ $(a \neq 0)$.

Phương pháp 2. Biến đổi thành phương trình tích: $a(x + m)(x + n) = 0$.

Phương pháp 3. Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai.

Ta xét các trường hợp:

- Nếu $\Delta > 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ và } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Nếu $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$, phương trình vô nghiệm.

Lưu ý: Nếu có $b = 2b'$ ta sử dụng tới $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ và } x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

- Nếu $\Delta' = 0$, phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.
- Nếu $\Delta' < 0$, phương trình vô nghiệm.

Phương pháp 4. Trong trường hợp đặc biệt:

- Nếu $a + b + c = 0$, phương trình có nghiệm: $x = 1$ và $x = \frac{c}{a}$.
- Nếu $a - b + c = 0$, phương trình có nghiệm: $x = -1$ và $x = -\frac{c}{a}$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

<u>**Ví dụ 1:**</u> Giải phương trình: $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Giải

Ta có thể thực hiện theo các cách:

Cách 1: Sử dụng kết quả a + b + c = 0

Ta có: $a + b + c = 1 + 2 - 3 = 0$,

suy ra, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Cách 2: Sử dụng công thức nghiệm tổng quát:

Ta có $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$, suy ra

$$\Delta = 2^2 - 4.1.(-3) = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4.$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1,\ x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Cách 3: Sử dụng công thức nghiệm thu gọn:

Ta có $a = 1$, $b = 2 \Rightarrow b' = 1$, $c = -3$, suy ra: $\Delta' = 1^2 - 1.(-3) = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 2$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-1+2}{1} = 1$, $x_2 = \dfrac{-1-2}{1} = -3$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Cách 4: Sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x(x-1) + 3(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Cách 5: Sử dụng phương pháp biến đổi $A^2 = m$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 1 + 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 2 \\ x + 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $-6x^2 + 7x - 2 = 0$.

Giải

Ta có thể thực hiện theo các cách:

Cách 1: Sử dụng công thức nghiệm tổng quát:

Ta có $a = -6$, $b = 7$, $c = -2$, suy ra :

$$\Delta = 7^2 - 4.(-6).(-2) = 49 - 48 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1.$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-7+1}{-12} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{-7-1}{-12} = \frac{2}{3}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}$.

Cách 2: Sử dụng phép đổi dấu trước khi dùng công thức nghiệm tổng quát:

Viết lại phương trình dưới dạng: $6x^2 - 7x + 2 = 0$.

Ta có $a = 6, b = -7, c = 2$, suy ra $\Delta = (-7)^2 - 4.6.2 = 49 - 48 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{7+1}{12} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{7-1}{12} = \frac{2}{3}$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}$.

Nhận xét:
1. Trong lời giải của thí dụ trên, cho dù cùng là việc sử dụng công thức nghiệm tổng quát nhưng chúng ta thấy ngay cách giải 2 sẽ tránh được những sai sót không đáng có về dấu trong khi tính toán.

   Do đó, khi giải một phương trình bậc hai, ta cần chú ý biến đổi về phương trình có hệ số đơn giản nhất tương đương với phương trình đó để việc tính toán gọn hơn. Chẳng hạn, như trong phương trình trên có hệ số $a < 0$, ta nhân cả hai vế của phương trình với -1 để được phương trình có hệ số $a > 0$. Chúng ta sẽ minh hoạ thêm một ví dụ nữa.
2. Các em học sinh hãy giải phương trình trên bằng phương pháp phân tích.

Ví dụ 3: Giải các phương trình:

a. $\frac{4}{3}x^2 - 5x + 3 = 0$.

b. $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x - 12\sqrt{2} = 0$.

Giải

a. Thực hiện việc quy đồng mẫu số, phương trình có dạng: $4x^2 - 15x + 9 = 0$.

Ta có $a = 4, b = -15, c = 9$, suy ra

$$\Delta = (-15)^2 - 4.4.9 = 225 - 144 = 81 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 9.$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{15+9}{8} = 3, x_2 = \frac{15-9}{8} = \frac{3}{4}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{3}{4}$.

b. Nhân hai vế của phương trình với $\sqrt{2}$, ta được: $2x^2 - 2\sqrt{6}x - 24 = 0$.

Ta có $a = 2$, $b = -2\sqrt{6} \Rightarrow b' = -\sqrt{6}$, $c = -24$, suy ra

$$\Delta' = (-\sqrt{6})^2 - 2.(-24) = 6 + 48 = 54 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{6}.$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6},\ x_2 = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{6}}{2} = -\sqrt{6}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 2\sqrt{6}$, $x_2 = -\sqrt{6}$.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

1. Với phương trình trong câu a), để tránh việc tính toán với hệ số là phân số chúng ta đã thực hiện phép quy đồng (thực chất là nhân hai vế của phương trình với 3).
2. Với phương trình trong câu b), để tránh việc tính toán với tất cả các hệ số đều là số vô tỉ chúng ta đã thực hiện phép nhân hai vế của phương trình với $\sqrt{2}$.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - 2 = 0$.

Giải

Ta có thể thực hiện theo các cách:

Cách 1: Thực hiện việc quy đồng mẫu số, phương trình có dạng:

$$x^2 + (\sqrt{2} - 1)^2x - 2(\sqrt{2} - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (3 - 2\sqrt{2})x + 2 - 2\sqrt{2} = 0$$

Ta có $a = 1$, $b = 3 - 2\sqrt{2}$, $c = 2 - 2\sqrt{2}$, suy ra

$$a - b + c = 1 - (3 - 2\sqrt{2}) + 2 - 2\sqrt{2} = 0.$$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1$, $x_2 = 2\sqrt{2} - 2$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$, $x_2 = 2\sqrt{2} - 2$.

Cách 2: Thực hiện nhân liên hợp, phương trình có dạng:

$$\frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - 2 = 0$$

Ta có $a = \sqrt{2} + 1$, $b = \sqrt{2} - 1$, $c = 2$, suy ra $a - b + c = \sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1) + 2 = 0$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = 1\ ,\ x_2 = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 2\sqrt{2} - 2.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$, $x_2 = 2\sqrt{2} - 2$.

Chú ý: Với các bài toán có chứa tham số, khi đó Δ là một biểu thức chứa tham số và chúng ta cần xét ba trường hợp $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$. Đó chính là nội dung dạng toán " *Giải và biện luận phương trình* ".

Ví dụ 5: Giải và biện luận phương trình: $x^2 - 4mx + 3m^2 = 0$. (1)

Giải

Ta có: $\Delta' = (-m)^2 - 3m^2 = -2m^2 \le 0$, với $\forall m$.

Khi đó, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\Delta' = 0 \Leftrightarrow -2m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Khi đó, phương trình có nghiệm kép $x = 0$.

Trường hợp 2: Với $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -2m^2 < 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, phương trình vô nghiệm.

Vậy:

- Với $m = 0$, phương trình có nghiệm kép $x = 0$.
- Với $m \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. $4x^2 - 6x + 7 = 0$.

b. $9x^2 - 6x + 26 = 0$.

c. $x^2 + 4x - 12 = 0$.

d. $x^2 + 8x - 10 = 0$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$.

b. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$.

c. $5x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{5}{49} = 0$.

d. $\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{15} = 0$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$.

b. $x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}x + \sqrt{6} = 0$.

c. $\sqrt{2}x^2 - 5x + 3\sqrt{2} = 0$.

d. $\sqrt{6}x^2 + 2(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})x + 24 = 0$.

Bài tập 4. Giải và biện luận các phương trình sau:

a. $x^2 + 4x - 3m = 0$.

b. $x^2 - 4x + 4 - m^2 = 0$.

c. $x^2 + 2mx - 4 = 0$.

d. $x^2 - (m - 2)x + m^2 = 0$.

IV. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Vô nghiệm.

b. Vô nghiệm.

c. $x_1 = 2$ và $x_2 = -6$.

d. $x_1 = -4 + \sqrt{26}$ và $x_2 = -4 - \sqrt{26}$.

Bài tập 2.

a. $x_1 = 1$ và $x_2 = -\frac{1}{2}$.

b. $x_1 = 2$ và $x_2 = -\frac{3}{2}$.

c. $x_1 = x_2 = \frac{1}{7}$.

d. $x_1 = -\frac{1}{2}$ và $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Bài tập 3.

a. $x_1 = 2$ và $x_2 = \sqrt{2}$.

b. $x_1 = -\sqrt{3}$ và $x_2 = -\sqrt{2}$.

c. $x_1 = \sqrt{2}$ và $x_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

d. $x_1 = -2\sqrt{3}$ và $x_2 = -2\sqrt{2}$.

Bài tập 4.

a. Ta có: $\Delta' = 4 + 3m$. Khi đó, ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{4}{3}$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -2 + \sqrt{4+3m} \text{ và } x_2 = -2 - \sqrt{4+3m}.$$

Trường hợp 2: Với $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$.

Khi đó, phương trình có nghiệm kép $x = -2$.

Trường hợp 3: Với $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 + 3m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}$.

Khi đó, phương trình vô nghiệm.

Vậy:

- Với $m > -\frac{4}{3}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -2 + \sqrt{4+3m} \text{ và } x_2 = -2 - \sqrt{4+3m}.$$

- Với $m = -\frac{4}{3}$, phương trình có nghiệm kép $x = -2$.
- Với $m < -\frac{4}{3}$, phương trình vô nghiệm.

b. Ta có: $\Delta' = 4 - (4 - m^2) = m^2 \geq 0$, với $\forall m$.

Khi đó, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Khi đó, phương trình có nghiệm kép $x = 2$.

Trường hợp 2: Với $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 2 + m$ và $x_2 = 2 - m$.

Vậy:

- Với $m = 0$, phương trình có nghiệm kép $x = 2$.
- Với $m \neq 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 2 + m$ và $x_2 = 2 - m$.

. Ta có: $\Delta' = m^2 + 4 > 0$, với $\forall m$.

Do đó, . phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -m + \sqrt{m^2 + 4} \text{ và } x_2 = -m - \sqrt{m^2 + 4}.$$

l. Tương tự câu a).

BÀI TOÁN 2 ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

. PHƯƠNG PHÁP

Với phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$.

Để tìm điều kiện của tham số sao cho:

Dạng 1: Phương trình vô nghiệm, điều kiện là: $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$).

Dạng 2: Phương trình có nghiệm, điều kiện là: $\Delta \geq 0$ (hoặc $\Delta' \geq 0$).

Dạng 3: Phương trình có nghiệm kép, điều kiện là: $\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$).

Dạng 4: Phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là: $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$)

Chú ý: Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số, chúng ta cần xét hai trường hợp (với $a = 0$ và với $a \neq 0$) và khi đó:

1. *Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt*, bao gồm:
   - Điều kiện để phương trình là một phương trình bậc hai, tương ứng với $a \neq 0$.
   - Điều kiện để phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt, tương ứng với $\Delta > 0$.

   Tóm lại, ta có hệ điều kiện là: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

2. *Điều kiện để phương trình có nghiệm kép*, bao gồm:
   - Điều kiện để phương trình là một phương trình bậc hai, tương ứng với $a \neq 0$.

- Điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm kép, tương ứng với $\Delta = 0$.

Tóm lại, ta có hệ điều kiện là: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - m^2 - m - 1 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

a. Với $m = 1$, phương trình có dạng: $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy, với $m = 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{3}$.

b. Để phương trình có nghiệm, điều kiện là: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - (-m^2 - m - 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(m - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{8} \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Nhận xét: Trong lời giải của ví dụ trên:

1. Ở câu a), với $m = 1$ chúng ta nhận được một phương trình bậc hai khuyết b, do đó chúng ta thực hiện việc tìm nghiệm bằng phép biến đổi tương đương.
2. Ở câu b), chúng ta nhận thấy rằng $\Delta' > 0$ với mọi m, do đó câu b) còn có thể được phát biểu dưới dạng "*Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt*".
3. Chúng ta có thể chứng tỏ được $\Delta' > 0$ với mọi m bằng cách biến đổi: $\Delta = (m-1)^2 + m^2 + m + 1$

$$= (m-1)^2 + (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m.$$

Ví dụ 2: Cho phương trình: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Giải

Ta lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

'ách 1: Thực hiện tuần tự:

. Với m = 1, phương trình có dạng: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Nhận xét rằng: $a + b + c = 1 - 4 + 3 = 0$

o đó, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$.

Vậy, với m = 1 phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$.

. Ta xét hai trường hợp:

'rường hợp 1: Với m = 0, phương trình có dạng:

$$-2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$ tức là phương trình có nghiệm.

'rường hợp 2: Với m ≠ 0, ta có: $\Delta' = (m + 1)^2 - m(m + 2) = 1 > 0$

o đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

'ách 2: Sử dụng phép đánh giá

Nhận xét rằng: $a + b + c = m - 2(m + 1) + m + 2 = 0$

o đó, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{m+2}{m}$.

. Với m = 1, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$.

. Ta thấy ngay với mọi m phương trình luôn có nghiệm x = 1.

Nhận xét: Như vậy, trong cách 2 bằng việc đánh giá được: $a + b + c = 0$ chúng ta đã nhận được một lời giải rất gọn.

'í dụ 3: Cho ba số dương a, b, c và phương trình:

$$x^2 - 2x - \frac{a}{b+c} - \frac{b}{c+a} - \frac{c}{a+b} + \frac{5}{2} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm, từ đó xác định điều kiện của a, , c để phương trình có nghiệm kép.

'iải

Ta có: $\Delta' = 1 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{5}{2} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2}$.

Nhận xét rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

$$= (\frac{a}{b+c} + 1) + (\frac{b}{c+a} + 1) + (\frac{c}{a+b} + 1) - 3$$

$$= (a + b + c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) - 3$$

$$= \frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)][\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}]-3$$

$$\geq \frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.3\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}-3$$

$$= \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\geq 0 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0.$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

Để phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow$ dấu đẳng thức xảy ra tại (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=b+c=c+a \\ \frac{1}{a+b}=\frac{1}{b+c}=\frac{1}{c+a} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$$

Vậy, với $a = b = c$ phương trình có nghiệm kép $x = 1$.

Ví dụ 4: Cho phương trình: $(m^2-1)x^2+2(m+1)x+1 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c. Tìm giá trị của m để phương trình có một nghiệm.

Giải

a. Với $m = 2$, phương trình có dạng: $3x^2+6x+1 = 0$.

Ta có: $\Delta' = 3^2 - 3 = 6 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{6}$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-3+\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = \frac{-3-\sqrt{6}}{3}$.

Vậy, với $m = 2$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{6}}{3}, x_2 = \frac{-3-\sqrt{6}}{3}.$$

b. Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2-1) = m^2+2m+1-m^2+1 = 2m+2$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1 \neq 0 \\ 2m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \neq 1.$$

Vậy, với $-1 < m \neq 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c. Ta đi xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Khi đó:

- Với $m = 1$, phương trình có dạng:

$$0.x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

- Với $m = -1$, phương trình có dạng: $0.x^2 + 0.x + 1 = 0$, vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Điều kiện để phương trình có một nghiệm là:

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1, \text{ không thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có một nghiệm duy nhất.

Nhận xét: Trong lời giải câu b), nếu ta chỉ xét điều kiện:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

thì với $m = 1$, phương trình (1) trở thành phương trình bậc nhất:

$$4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 5: Cho hai phương trình:

$$x^2 - mx - 2 = 0. \quad (1)$$

$$x^2 - x + 6m = 0. \quad (2)$$

Tìm giá trị của m để phương trình (1) và phương trình (2) có ít nhất một nghiệm chung. Biết m là một số nguyên.

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình.

Do đó:

$$x_0^2 - mx_0 - 2 = 0 \quad (1')$$

$$x_0^2 - x_0 + 6m = 0 \quad (2')$$

Lấy (1') trừ (2'), ta được: $x_0(-m + 1) - 2 - 6m = 0 \Leftrightarrow (1 - m)x_0 = 6m + 2$.

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Thay vào (1) và (2), ta được:

(1) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$, có 2 nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = -1$.

(2) $\Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$, vô nghiệm.

Suy ra, $m = 1$ không thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, ta được: $x_0 = \dfrac{6m+2}{1-m}$.

Thay x_0 vào (2'), ta được phương trình ẩn m:

$$\left(\frac{6m+2}{1-m}\right)^2 - \frac{6m+2}{1-m} + 6m = 0 \Leftrightarrow 6m^3 + 30m^2 + 26m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6m^3 + 30m^2 + 24m + 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m(6m^2 + 30m + 24) + 2(m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m+1)(m+4) + 2(m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)[m(m+4) + 2] = 0 \Leftrightarrow (m+1)[m^2 + 4m + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=0 \\ m^2+4m+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2\pm\sqrt{2}\ (\text{loại}) \end{array}\right..$$

Thử lại, với $m = -1$, ta có:

(1) $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$, có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$.

(2) $\Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$, có hai nghiệm phân biệt $x_3 = -2$ và $x_4 = 3$.

Vậy, với $m = -1$, hai phương trình có một nghiệm chung.

Cách 2: Các phương trình đã cho có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - mx - 2 = 0 \\ x^2 - x + 6m = 0 \end{cases}.$$

Đặt $x^2 = y$, ta được hệ: $\begin{cases} y - mx - 2 = 0 \\ y - x + 6m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx - y = -2 & (1) \\ x - y = 6m & (2) \end{cases}$. (I)

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $y = x - 6m$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (1), ta được:

$$mx - x + 6m = -2 \Leftrightarrow (m-1)x = -6m - 2.$$

Trường hợp 1: Với $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Khi đó, hệ (I) có dạng: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x - y = 6 \end{cases}$, vô nghiệm.

Suy ra, $m = 1$ không thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, ta được: $x = \dfrac{6m+2}{1-m}$.

Thay $x = \dfrac{6m+2}{1-m}$ vào (3), ta được:

$$y = \frac{6m+2}{1-m} - 6m = \frac{6m+2-6m(1-m)}{1-m} = \frac{6m^2+2}{1-m}.$$

Do $x^2 = y$, nên ta phải có: $\left(\frac{6m+2}{1-m}\right)^2 = \frac{6m^2+2}{1-m} \Leftrightarrow 3m^3 + 15m^2 + 13m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)(3m^2 + 12m + 1) = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$

Vậy, với $m = -1$ hai phương trình có nghiệm chung là $x = 1$.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng:

a. Nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ cũng là nghiệm của phương trình $-ax^2 - bx - c = 0$.

b. Hai phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ và phương trình $ax^2 - bx + c = 0$ cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm.

Giải

a. Nhận xét rằng: $ax^2 + bx + c = 0 \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} -ax^2 - bx - c = 0$

do đo, nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ cũng là nghiệm của phương trình $-ax^2 - bx - c = 0$.

b. Nhận xét rằng, hai phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ và $ax^2 - bx + c = 0$

cùng có biệt số: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Vậy, hai phương trình cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm.

Ví dụ 7: Cho hai phương trình:

$$x^2 + ax + b = 0 \qquad (1)$$

$$x^2 + cx + d = 0. \qquad (2)$$

Biết rằng $ac \geq 2(b + d)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.

Giải

Gọi $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$ theo thứ tự là biệt số của phương trình (1) và (2), ta có:

$\Delta_{(1)} = a^2 - 4b$

$\Delta_{(2)} = c^2 - 4d.$

Nhận xét rằng:

$\Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} = a^2 - 4b + c^2 - 4d$

$= (a^2 + c^2) - 4(b + d) \geq 2ac - 4(b + d) \geq 4(b + d) - 4(b + d) = 0.$

$\Leftrightarrow \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} \geq 0$

$\Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}$ không âm

$\Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm, đpcm.

Nhận xét: Trong lời giải của ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng kết quả:

$A + B \geq 0 \Leftrightarrow$ tồn tại một số không âm.

Ngoài ra, chúng ta còn có:

1. $A + B < 0 \Leftrightarrow$ tồn tại một số âm.
   Kết quả này được sử dụng để chứng minh "*ít nhất một trong hai phương trình vô nghiệm* ".
2. $A.B < 0 \Leftrightarrow$ hai số trái dấu.
   Kết quả này được sử dụng để chứng minh "*Chỉ có một trong hai phương trình có nghiệm* ".
3. $A.B > 0 \Leftrightarrow$ hai số cùng dấu.
   Kết quả này được sử dụng để chứng minh "*Hoặc cả hai phương trình đề có hai nghiệm phân biệt hoặc chúng cùng vô nghiệm* ".

Ví dụ 8: Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$x^2 + 2mx + 3 = 0 \qquad (1)$$

$$x^2 + 3x + 2m = 0. \qquad (2)$$

Giải

Gọi $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$ theo thứ tự là biệt số của phương trình (1) và (2), ta có:

$\Delta_{(1)} = m^2 - 3$, $\quad \Delta_{(2)} = 9 - 2m$.

Nhận xét rằng:

$\Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} = m^2 - 3 + 9 - 2m = m^2 - 2m + 6 = (m-1)^2 + 5 > 0$.

$\Leftrightarrow \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} > 0 \Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$ dương

$\Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau vô nghiệm:

$$x^2 + 2x - 6m = 0 \qquad (1)$$

$$x^2 + 4x + m^2 + 15 = 0. \qquad (2)$$

Giải

Gọi $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$ theo thứ tự là biệt số của phương trình (1) và (2), ta có:

$\Delta_{(1)} = 1 + 6m$, $\quad \Delta_{(2)} = 4 - m^2 - 15 = -m^2 - 11$.

Nhận xét rằng: $\Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} = 1 + 6m - m^2 - 11 = -(m^2 - 6m + 9) - 1 = -(m-3)^2 - 1 < 0$.

$\Leftrightarrow \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} < 0 \Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$ âm

$\Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai phương trình vô nghiệm.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho phương trình: $x^2 - 3mx - 6m^2 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình vô nghiệm.

Bài tập 2. Cho phương trình: $5x^2 + 2mx - 3m = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm kép.

Bài tập 3. Cho phương trình: $x^2 + 3x - (m^2 - 2m + 1) = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 4. Cho phương trình: $x^2 - (m - 1)x - m^2 + m - 1 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 3$.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 5. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$.

a. Tìm m để phương trình có nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 6. Cho phương trình: $mx^2 + (m + 1)x - 2m = 0$.

a. Giải phương trình với $m = -\frac{1}{2}$.

b. Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 7. Tìm giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm kép:

a. $mx^2 - 2x + 6m = 0$.

b. $m^2x^2 + 10x + 1 = 0$.

Bài tập 8. Tìm giá trị của m để các phương trình sau vô nghiệm:

a. $mx^2 + 2(m - 3)x + m = 0$.

b. $(m - 2)x^2 - 2(m - 2)x - m = 0$.

Bài tập 9. Cho phương trình: $mx^2 - (m + 1)x + 1 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 89$.

b. Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài tập 10. Cho phương trình: $mx^2 - (3m + 1)x + 3 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài tập 11. Cho phương trình: $mx^2 + 2(m - 1)x - 2 = 0.$

a. Giải phương trình với $m = \sqrt{3}$

b. Tìm m để phương trình có một nghiệm.

Bài tập 12. Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có nghiệm:

$$mx^2 - (3m + 1)x + 2m + 2 = 0.$$

Bài tập 13. Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có nghiệm:

$$m(m - 1)x^2 - (2m - 1)x + 1 = 0.$$

Bài tập 14. Cho hai số dương a, b và phương trình: $x^2 - 2x - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + 3 = 0.$

Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm, từ đó xác định điều kiện của a, b để phương trình có nghiệm kép.

Bài tập 15. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng phương trình: $x^2 - 2x - ab(a + b - 2c) - bc(b + c - 2a) - ca(c + a - 2b) + 1 = 0$ luôn luôn có nghiệm. Khi đó tìm điều kiện của a, b, c để phương trình có nghiệm kép.

Bài tập 16. Giả sử a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình: $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ vô nghiệm.

Bài tập 17. Cho hai phương trình:

$$x^2 - mx + 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + m = 0$$

Tìm m để hai phương trình trên có ít nhất một nghiệm chung.

Bài tập 18. Cho hai phương trình: $x^2 + x + a = 0$ và $x^2 + ax + 1 = 0.$

a. Với giá trị nào của a thì hai phương trình có nghiệm chung.

b. Với giá trị nào của a thì hai phương trình tương đương.

IV. HƯỚNG DẪN

Bài tập 1.

a. Với $m = 1$, phương trình có dạng: $x^2 - 3x - 6 = 0.$

Ta có: $\Delta = 3^2 + 6 = 15 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{15}$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}$, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{15}}{2}$.

Vậy, với $m = 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{15}}{2},\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{15}}{2}.$$

b. Để phương trình vô nghiệm, điều kiện là:

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 9m^2 + 6m^2 < 0 \Leftrightarrow 15m^2 < 0$, vô nghiệm.

Vậy, không tồn tại m để phương trình vô nghiệm.

Bài tập 2.

a. Với m = 1, phương trình có dạng: $5x^2 + 2x - 3 = 0$.

Ta có: $a - b + c = 5 - 2 - 3 = 0$

do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{3}{5}$.

Vậy, với m = 1 phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{3}{5}$.

b. Để phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 + 15m = 0 \Leftrightarrow m(m + 15) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -15$.

Vậy, với m = 0 hoặc m = −15 phương trình có nghiệm kép.

Bài tập 3.

a. Với m = 1, phương trình có dạng:

$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -3$.

Vậy, với m = 1 phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 0$ và $x_2 = -3$.

b. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là:

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 9 + m^2 - 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + 9 > 0$, luôn đúng.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 4.

a. Với m = 3, phương trình có dạng: $x^2 - 2x - 7 = 0$.

Ta có: $\Delta' = 1^2 + 7 = 8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1 + 2\sqrt{2}$, $x_2 = 1 - 2\sqrt{2}$.

Vậy, với m = 3 phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = 1 + 2\sqrt{2}$, $x_2 = 1 - 2\sqrt{2}$.

b. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là:

$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + m^2 - m + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (m - 1)^2 + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, luôn đúng.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 5.

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với m = 0, khi đó phương trình có dạng: $4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

Vậy, m = 0 thoả mãn điều kiện có nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình có nghiệm điều kiện là:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 - m(m-3) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4.$$

Vậy, với $m \leq 4$ phương trình có nghiệm.

b. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4.$$

Vậy, với m < 4 phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 6.

a. Với $m = -\frac{1}{2}$, phương trình có dạng:

$$-\frac{1}{2}x^2 + (-\frac{1}{2} + 1)x - 2(-\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \text{ và } x_2 = 2.$$

Vậy, với $m = -\frac{1}{2}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$ và $x_2 = 2$.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với m = 0, khi đó phương trình có dạng: x = 0.

Vậy, m = 0 thoả mãn điều kiện có nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình có nghiệm điều kiện là:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 + 2m^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài tập 7.

a. Phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - 6m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Vậy, với $m = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ phương trình có nghiệm kép.

b. Phương trình có nghiệm kép, điều kiện là: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \neq 0 \\ 25 - m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 5.$

Vậy, với $m = \pm 5$ phương trình có nghiệm kép.

Bài tập 8.

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m = 0$, khi đó phương trình có dạng: $-6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy, $m = 0$ không thoả mãn điều kiện vô nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình vô nghiệm điều kiện là:

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 - m^2 < 0 \Leftrightarrow 9 - 6m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

Vậy, với $m > \frac{3}{2}$ phương trình vô nghiệm.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Khi đó phương trình có dạng: $-2 = 0$, mâu thuẫn.

Vậy, $m = 2$ thoả mãn điều kiện vô nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m \neq 2$, khi đó để phương trình vô nghiệm điều kiện là:

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 + m(m-2) < 0 \Leftrightarrow (m-2)(m-2+m) < 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(2m-2) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Vậy, với $1 < m < 2$ phương trình vô nghiệm.

Bài tập 9. Nhận xét rằng: $a + b + c = m - m - 1 + 1 = 0$

do đó, phương trình luôn có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{1}{m}$.

a. Với $m = 2$, phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{1}{2}$.

b. Ta thấy ngay, với mọi m phương trình luôn có nghiệm $x = 1$.

Bài tập 10.

a. Với $m = 2$, phương trình có dạng: $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Ta có: $\Delta = (-7)^2 - 4.2.3 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{7+5}{4} = 3$.

Vậy, với m = 2 phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$.

b. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với m = 0, khi đó phương trình có dạng:

$-x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, tức là phương trình có nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$.

Ta xét: $\Delta = (3m + 1)^2 - 12m = (3m - 1)^2 \geq 0$, với mọi $m \neq 0$

$\Leftrightarrow$ phương trình luôn có nghiệm.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài tập 11.

a. Với $m = \sqrt{3}$, phương trình có dạng: $\sqrt{3}x^2 + 2(\sqrt{3} - 1)x - 2 = 0$.

Ta có: $\Delta' = (\sqrt{3} - 1)^2 + 2\sqrt{3} = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}},\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

Vậy, với $m = \sqrt{3}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}},\ x_2 = \sqrt{3} - 1.$$

b. Xét hai trường hợp của m.

Trường hợp 1. Với m = 0

$(1) \Leftrightarrow -2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Trường hợp 2. Với $m \neq 0$.

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.

Vậy, với m=0 phương trình có nghệm duy nhất.

Bài tập 12. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 13. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 14. Ta có: $\Delta' = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 3 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2$.

Nhận xét rằng: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 2$ (*)

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0.$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

Để phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow$ dấu đẳng thức xảy ra tại (*)

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b, \text{ vì a, b dương.}$$

Vậy, với $a = b$ phương trình có nghiệm kép $x = 1$.

Bài tập 15. Ta có:

$$\Delta' = 1 + ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ca(c + a - 2b) - 1$$
$$= ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ca(c + a - 2b).$$

Ta đi chứng minh

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ca(c + a - 2b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a + b - 2c}{c} + \frac{b + c - 2a}{a} + \frac{c + a - 2b}{b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \geq 6. \qquad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho VT, ta được:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \geq 6.\sqrt[6]{\frac{a}{c}.\frac{b}{c}.\frac{b}{a}.\frac{c}{a}.\frac{c}{b}.\frac{a}{b}} = 6, \text{ đpcm.}$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

Để phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$\Leftrightarrow$ dấu đẳng thức xảy ra tại (*)

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \frac{b}{a} = \frac{c}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Vậy, với $a = b = c$ phương trình có nghiệm kép $x = 1$.

Bài tập 16. Ta có:

$$\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)$$
$$= [(b - c)^2 - a^2][(b + c)^2 - a^2] = (b - c - a)(b - c + a)(b + c - a)(b + c + a)$$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên:

$$\begin{cases} b - c - a < 0 \\ b - c + a > 0 \\ b + c - a > 0 \\ b + c + a > 0 \end{cases}$$

do đó $\Delta < 0$, tức là phương trình vô nghiệm.

Bài tập 17. Kí hiệu hai phương trình theo thứ tự là (1) và (2).

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình.

Do đó:

$$x_0^2 - mx_0 + 2 = 0 \quad (1')$$

$$x_0^2 - 4x_0 + m = 0 \quad (2')$$

Lấy (1') trừ (2'), ta được: $x_0(-m + 4) + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (m - 4)x_0 = 2 - m$.

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Thay $m = 4$ vào (1) và (2), ta được:

(1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$, có 2 nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ và $x_2 = 2 + \sqrt{2}$.

(2) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$, có nghiệm kép $x = 2$.

Suy ra, $m = 4$ không thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$, ta được: $x_0 = \dfrac{2-m}{m-4}$.

Thay x_0 vào (1), ta được phương trình ẩn m:

$$\left(\frac{2-m}{m-4}\right)^2 - m.\frac{2-m}{m-4} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2 - 12m + 36 = 0 \Leftrightarrow (m - 3)(m^2 - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 3 = 0 \\ m^2 - 12 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \pm 2\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Thử lại:

- Với $m = 3$, ta có:

  (1) $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$, có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$.

  (2) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$, có hai nghiệm $x_3 = 1$ và $x_4 = 3$.

  Vậy, với $m = 3$, hai phương trình có một nghiệm chung $x = 1$.

- Với $m = 2\sqrt{3}$, ta có:

  (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$, có hai nghiệm $x_{1,2} = \sqrt{3} \pm 1$.

  (2) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$, có hai nghiệm:

  $$x_3 = 2 - (\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3}$$

  $$x_4 = 2 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \sqrt{3}.$$

  Vậy, với $m = 2\sqrt{3}$, hai phương trình có một nghiệm chung $x = \sqrt{3} + 1$.

- Với $m = -2\sqrt{3}$, ta có:

  $(1) \Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x + 2 = 0$, có hai nghiệm $x_{1,2} = -\sqrt{3} \pm 1$.

  $(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2\sqrt{3} = 0$, có hai nghiệm:

  $$x_3 = 2 - (\sqrt{3} + 1) = 1 - \sqrt{3}$$

  $$x_4 = 2 + (\sqrt{3} + 1) = 3 + \sqrt{3}.$$

  Vậy, với $m = 2\sqrt{3}$, hai phương trình có một nghiệm chung $x = 1 - \sqrt{3}$.

Vậy, với $m = 3$ hoặc $m = \pm 2\sqrt{3}$ hai phương trình có nghiệm chung.

Bài tập 18. Kí hiệu hai phương trình theo thứ tự là (1) và (2).

a. Giả sử hai phương trình có nghiệm chung x_0, khi đó:

$$x_0^2 + x_0 + a = 0 \qquad (3)$$

$$x_0^2 + ax_0 + 1 = 0 \qquad (4)$$

Lấy (3) – (4), ta được: $(1 - a)(x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $x_0 = 1$.

- Với $a = 1$, ta thấy:

  $(1) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$, vô nghiệm.

  $(2) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$, vô nghiệm.

  Vậy $a = 1$ không thoả mãn.

- Với $x_0 = 1$, thay vào (3) được: $1 + 1 + a = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

Thử lại, với $a = -2$, ta được:

  $(1) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$, có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = -2$.

  $(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$, có nghiệm kép $x = 1$.

Tức là, hai phương trình có một nghiệm chung là $x=1$.

Vậy, với $a = -2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Hai phương trình tương đương nếu xảy ra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1: Mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của (2) và ngược lại.

Khả năng 2: Hai phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm.

Theo kết quả câu a) khả năng thứ nhất không thể xảy ra.

Vậy, chỉ có thể là hai phương trình đều vô nghiệm, tức là:

$$\begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a < 0 \\ a^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < a < 2.$$

Vậy, với $\frac{1}{4} < a < 2$ hai phương trình đã cho tương đương.

CHỦ ĐỀ 5

HỆ THỨC VIÉT VÀ CÁC ỨNG DỤNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. HỆ THỨC VIÉT

Để xây dựng được hệ thức Viét cho các nghiệm của phương trình bậc hai, chúng ta bắt đầu với phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, khi đó, ta có ngay:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ và } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Nhận xét rằng:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1.x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} . \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(b + \sqrt{\Delta})(b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Như vậy, ta có kết quả:

> **Nếu phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$**
>
> **có hai nghiệm x_1 và x_2 thì:** $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

<u>Thí dụ 1:</u> Với phương trình: $x^2 - 5x + 3 = 0$

ta thấy: $\Delta = 5^2 - 4.1.3 = 3$

Do vậy, phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = 3 \end{cases}$.

<u>Nhận xét:</u> Như vậy, chúng ta đã xây dựng được hệ thức Viét và minh hoạ nó bằng một thí dụ cụ thể. Tuy nhiên, với thí dụ đó hẳn không nói ra được những ứng dụng quan trọng của hệ thức Viét. Trong phần " *Các thí dụ mở đầu* " sẽ giúp các em tiếp cận với những ứng dụng của hệ thức Viét.

2. CÁC THÍ DỤ MỞ ĐẦU

Để giúp các em học sinh tiếp nhận hệ thức Viét và biết cách ứng dụng nó một cách sáng tạo, trong mục này sẽ trình bày theo kiểu đưa ra thí dụ thực hiện, sau rồi mới nêu tên ứng dụng.

Thí dụ 2:

a. Với phương trình: $x^2 - 5x + 6 = 0$

ta thấy $\Delta = 5^2 - 4.1.6 = 1 > 0$ do đó, phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và x_2

thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = 6 = 2.3 \end{cases}$

mà $2 + 3 = 5$.

Vậy, ta thấy ngay phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = 3$.

b. Với phương trình: $x^2 + 7x + 12 = 0$

ta thấy $\Delta = 7^2 - 4.1.12 = 1 > 0$, do đó phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và x_2

thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1.x_2 = 12 = (-3).(-4) \end{cases}$

mà $(-3) + (-4) = -7$.

Vậy, ta thấy ngay phương trình có hai nghiệm $x_1 = -3$ và $x_2 = -4$.

c. Với phương trình: $x^2 - 5x - 14 = 0$

ta thấy $a.c = 1.(-14) < 0$ do đó, phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = -14 = (-2).7 \end{cases}$ mà $(-2) + 7 = 5$.

Vậy, ta thấy ngay phương trình có hai nghiệm $x_1 = -2$ và $x_2 = 7$.

Nhận xét:

1. Như vậy, thí dụ trên đã minh hoạ cho chúng ta thấy việc sử dụng hệ thức Viét để ***nhẩm nghiệm cho phương trình bậc hai***. Phương pháp chi tiết của ứng dụng này sẽ được trình bày đầy đủ trong bài toán 1.
2. Chúng ta thấy ngay rằng, hệ thức Viét là một phép toán tương đương, tức là:

   Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow$ Có hệ thức Viét

   Và trong thí dụ trên chúng ta đã sử dụng suy diễn từ trái sang phải, còn bây giờ hãy đánh giá từ phải sang trái xem:

   - Ở vế phải, chúng ta có tổng và tích của hai số (hệ phương trình)
   - Ở vế trái, chúng ta có một phương trình bậc hai.

   Điều này có nghĩa là có thể chuyển việc giải một hệ phương trình hai ẩn (biết tổng và biết tích của chúng) thành việc giải một phương trình bậc hai.

Thí dụ 3: Tìm các cạnh của hình chữ nhật, biết chu vi bằng 30m và diện tích bằng $54m^2$.

Giải

Gọi độ dài hai cạnh của hình chữ nhật là u và v, điều kiện $u, v > 0$.

Với giả thiết:

- Hình chữ nhật có chu vi bằng 30m, ta được: $2(u + v) = 30 \Leftrightarrow u + v = 15$. (1)
- Hình chữ nhật có diện tích bằng $54m^2$, ta được: $uv = 54$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u + v = 15 \\ u.v = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \dfrac{-15}{1} \\ u.v = \dfrac{54}{1} \end{cases}$

tức là, u và v là nghiệm của phương trình bậc hai: $x^2 - 15x + 54 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 6$ và $x_2 = 9$.

Vậy, hình chữ nhật có hai cạnh là 6m và 9m.

Nhận xét: 1. Như vậy, thí dụ trên đã minh hoạ việc sử dụng hệ thức Viét để ***tìm hai số biết tổng và tích của chúng***. Phương pháp chi tiết của ứng dụng này sẽ được trình bày đầy đủ trong bài toán 2.

2. Trong lời giải trên, với hai nghiệm $x_1 = 6$ và $x_2 = 9$ chúng ta có thể gán u cho x_1 còn v cho x_2 hoặc ngược lại chỉ có điều cả hai cách gán này đều cho đáp số về một hình chữ nhật. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp với mỗi phép gán như vậy chúng ta sẽ nhận được một nghiệm (thí dụ (u, v) là toạ độ của một điểm) của hệ phương trình.

Thí dụ 4: Cho phương trình: $\sqrt{3}x^2 - 15x + 3 = 0$.

a. Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

Giải

a. Nhận xét rằng: $\Delta = 15^2 - 4.\sqrt{3}.3 = 225 - 12\sqrt{3} > 0$

do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} \\ x_1.x_2 = 12 = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có: $A = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5.$

Nhận xét: Như vậy, với yêu cầu trong câu b) của thí dụ trên nếu chúng ta đi tính cụ thể các x_1 và x_2 rồi thay vào biểu thức A thì sẽ phải thực hiện việc đơn giản biểu thức chứa căn rất phức tạp. Trong khi, sử dụng hệ thức Viét chúng ta đã có được một lời giải rất gọn. Đó chính là nội dung của ứng dụng hệ thức Viét để ***tìm giá trị của các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm***. Phương pháp chi tiết của ứng dụng này sẽ được trình bày đầy đủ trong bài toán 3.

Thí dụ 5: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 2 = 0$.

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

Giải

a. Nhận xét rằng: $\Delta' = m^2 - 2m + 2 = (m - 1)^2 + 1 > 0$

do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = 2m - 2 \end{cases}$.

Từ hệ trên, bằng cách thay 2m ở phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai, ta được: $x_1.x_2 = x_1 + x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_1.x_2 = 2$.

Đó chính là hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

Nhận xét: Như vậy, với yêu cầu trong câu b) của thí dụ trên nếu chúng ta đi tính cụ thể các x_1 và x_2 rồi thực hiện các phép thử để tìm ra được một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào m thì sẽ phải thực hiện khá nhiều lần và quan trọng hơn cả là không có được định hướng chính xác. Trong khi, sử dụng hệ thức Viét chúng ta đã có được một lời giải rất gọn. Đó chính là nội dung của ứng dụng hệ thức Viét để ***tìm một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số***. Phương pháp chi tiết của ứng dụng này sẽ được trình bày đầy đủ trong bài toán 1.

Thí dụ 6: Cho phương trình: $x^2 - 2x + m^2 + 5 = 0$.

Chứng tỏ rằng nếu phương trình có hai nghiệm thì hai nghiệm đó đều dương.

Giải

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 > 0 \\ x_1.x_2 = m^2 + 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2 > 0, \text{ đpcm.}$$

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên chúng ta đã đánh giá được phương trình có hai nghiệm dương, dựa trên:

$x_1.x_2 > 0 \Rightarrow x_1$ và x_2 cùng dấu.

$x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow x_1$ và x_2 cùng dấu dương.

Đó chính là nội dung của ứng dụng hệ thức Viét để ***xét dấu các nghiệm***. Phương pháp chi tiết của ứng dụng này sẽ được trình bày đầy đủ trong bài toán 5.

Thí dụ 7: Cho phương trình: $x^2 - 5x + m = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| = 9$.

Giải

Trước tiên, để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, điều kiện là:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 25 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{25}{4}. \qquad (*)$$

Với điều kiện (*), phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$.

Khi đó: $|x_1 - x_2| = 9 \Leftrightarrow 81 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 5^2 - 4m$

$\Leftrightarrow 4m = 16 \Leftrightarrow m = 4$, thoả mãn điều kiện (*).

Vậy, với m = 4 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: 1. Chúng thấy ngay rằng, yêu cầu của bài toán trên khác hẳn với những câu hỏi chúng ta đã được gặp đối với các phương trình bậc hai chứa tham số và nếu lựa chọn theo hướng tìm ra các nghiệm x_1 và x_2 rồi thay vào biểu thức điều kiện thì sẽ khá phức tạp. Trong khi, sử dụng hệ thức Viét chúng ta đã có được một lời giải rất gọn. Đó chính là nội dung của ứng dụng hệ thức Viét để ***tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình có nghiệm thoả mãn tính chất K***. Phương pháp chi tiết của ứng dụng này sẽ được trình bày đầy đủ trong bài toán 6.

2. Với các bài toán có chứa tham số, trước khi áp dụng định lí Viét cần tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm, tức là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}.$$

II. CÁC ỨNG DỤNG

Như vậy, thông qua phần "*Các thí dụ mở đầu*", chúng ta thấy ngay rằng hệ thức Viét được sử dụng để giải các dạng toán:

Dạng 1: Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai.

Dạng 2: Tìm hai số biết tổng và tích của chúng.

Dạng 3: Tính giá trị của các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm.

Dạng 4: Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số.

Dạng 5: Xét dấu các nghiệm.

Dạng 6: Tìm điều kiện của tham số để các nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện K.

Ngoài ra, nó còn có một số ứng dụng khác, thí dụ như:

a. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.

b. Lập phương trình tiếp tuyến của Parabol.

c. ...

những ứng dụng này, cho dù không tỏ ra hữu hiệu hơn hoặc rất ít xảy ra, nó sẽ giúp các em học sinh học tập theo cách sáng tạo.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu và chứng minh hệ thức Viét.

Câu hỏi 2: Nêu các ứng dụng của hệ thức Viét.

Câu hỏi 3: Dựa vào thí dụ 2, hãy nêu ý tưởng của phương pháp sử dụng hệ thức Viét để nhẩm nghiệm cho phương trình bậc hai.

Câu hỏi 4: Dựa vào thí dụ 3, hãy nêu thuật toán của phương pháp sử dụng hệ thức Viét để tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng.

Câu hỏi 5: Dựa vào thí dụ 4, hãy nêu thuật toán của phương pháp sử dụng hệ thức Viét để tính giá trị của các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm.

Câu hỏi 6: Dựa vào thí dụ 5, hãy nêu thuật toán của phương pháp sử dụng hệ thức Viét để tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số.

Câu hỏi 7: Dựa vào thí dụ 6, hãy nêu thuật toán của phương pháp sử dụng hệ thức Viét để xét dấu các nghiệm của phương trình.

Câu hỏi 8: Dựa vào thí dụ 7, hãy nêu thuật toán của phương pháp sử dụng hệ thức Viét để tìm điều kiện của tham số để các nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện K.

Bài toán 1

NHẨM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. PHƯƠNG PHÁP

Trước tiên, chúng ta cần hiểu rằng "*Chỉ thực hiện nhẩm nghiệm của một phương trình bậc hai trong trường hợp nó có nghiệm nguyên hoặc một nghiệm nguyên còn một nghiệm hữu tỉ*".

Để làm rõ được ý tưởng chủ đạo của phương pháp này, chúng ta bắt đầu lại bằng thí dụ với phương trình: $x^2 - x - 12 = 0$.

Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1.x_2 = -12 = -3.4 \end{cases}$

ở đó: $-12 = -1.12 = 1.(-12) = -2.6 = 2.(-6) = -3.4 = 3.(-4)$

trong các cặp số trên, ta chọn được cặp $(-3, 4)$ vì $-3 + 4 = 1 = x_1 + x_2$.

Từ đánh giá đó, suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1 = -3$ và $x_2 = 4$.

Như vậy, để thực hiện việc nhẩm nghiệm (nếu có thể) cho phương trình:

$$x^2 + bx + c = 0$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thiết lập hệ thức Viét cho các nghiệm x_1 và x_2: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1.x_2 = c \end{cases}$.

Bước 2: Thực hiện phép phân tích c thành tích của hai thừa số, $c = m.n$.

Với mỗi cặp thừa số phân tích được, ta tính ngay $m + n$, khi đó:

- Nếu $m + n = -b$, chuyển sang bước 3.
- Nếu $m + n \neq -b$, thực hiện lại bước 2.

Bước 3: Vậy, phương trình có hai nghiệm là $x_1 = m$ và $x_2 = n$.

Chú ý: 1. Thuật toán trên có tính *dừng* và được hiểu như sau:

- Nếu tìm được một cặp (m, n) thoả mãn điều kiện $m + n = -b$ thì dừng lại phép thử và đưa ra lời kết luận.
- Nếu các cặp (m, n) đều không thoả mãn thì dừng và trong trường hợp này được hiểu là không nhẩm được nghiệm.

2. Chúng ta đã biết hai trường hợp đặc biệt của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là:

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a}$
- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{c}{a}$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Trình bày cách nhẩm nghiệm cho các phương trình sau:

a. $x^2 - 7x + 10 = 0$.

b. $x^2 + 14x + 48 = 0$.

c. $x^2 - 6x - 27 = 0$.

d. $x^2 + 4x - 12 = 0$.

Giải

a. Ta viết: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1.x_2 = 10 = 2.5 \end{cases}$ mà $2 + 5 = 7$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = 5$.

b. Ta viết: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -14 \\ x_1.x_2 = 48 = (-6).(-8) \end{cases}$ mà $(-6) + (-8) = -14$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = -6$ và $x_2 = -8$.

c. Ta viết: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1.x_2 = -27 = -3.9 \end{cases}$ mà $-3 + 9 = 6$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = -3$ và $x_2 = 9$.

d. Ta viết: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1.x_2 = -12 = 2.(-6) \end{cases}$ mà $2 + (-6) = -4$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = -6$.

Ví dụ 2: Trình bày cách nhẩm nghiệm cho các phương trình sau:

a. $-x^2 - 13x + 48 = 0$.

b. $3x^2 + 3x - 18 = 0$.

c. $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$.

Giải

a. Viết lại phương trình dưới dạng: $x^2 + 13x - 48 = 0$.

Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -13 \\ x_1.x_2 = -48 = 3.(-16) \end{cases}$ mà $3 + (-16) = -13$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 3$ và $x_2 = -16$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng: $x^2 + x - 6 = 0$.

Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1.x_2 = -6 = 2.(-3) \end{cases}$ mà $2 + (-3) = -1$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = -3$.

c. Viết lại phương trình dưới dạng: $x^2 - 8x + 12 = 0$.

Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1.x_2 = 12 = 2.6) \end{cases}$ mà $2 + 6 = 8$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = 6$.

Nhận xét: Ví dụ trên, được nêu ra với mục đích khuyên cách em học sinh hãy thực hiện việc chuyển đổi phương trình ban đầu về dạng đơn giản nhất trước khi thực hiện công việc nhẩm nghiệm để tránh được những sai sót không đáng có.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Trình bày thuật toán nhẩm nghiệm cho phương trình bậc hai. Lấy một ví dụ minh hoạ.

Câu hỏi 2: Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$.

Chứng minh rằng:

a. Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a}$.

b. Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{c}{a}$.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Trình bày cách nhẩm nghiệm cho các phương trình sau:

a. $x^2 - 10x + 16 = 0$.

b. $x^2 + 9x + 18 = 0$.

c. $x^2 - 8x + 65 = 0$.

d. $x^2 + 9x - 22 = 0$.

Bài tập 2. Trình bày cách nhẩm nghiệm cho các phương trình sau:

a. $-x^2 - 23x - 132 = 0$.

b. $3x^2 + 9x - 162 = 0$.

c. $\frac{1}{14}x^2 + \frac{10}{7}x + 6 = 0$.

Bài toán 2 TÌM HAI SỐ BIẾT TỔNG VÀ TÍCH CỦA CHÚNG

I. PHƯƠNG PHÁP

Nếu hai số u và v thoả mãn : $\begin{cases} u + v = S \\ u.v = P \end{cases}$

thì u, v là nghiệm của phương trình: $t^2 - St + P = 0$. (1)

Nhận xét: Nếu (1) có hai nghiệm t_1, t_2 (điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$) thì ta được:

$$\left[\begin{array}{l} u = t_1 \ \& \ v = t_2 \\ u = t_2 \ \& \ v = t_1 \end{array}\right.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tìm hai cạnh của hình chữ nhật biết chu vi bằng 6m và diện tích bằng $2m^2$.

Giải

Gọi u, v là hai cạnh của hình chữ nhật (u > 0, v > 0), ta có:

$$\begin{cases} 2(u + v) = 6 \\ u.v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ u.v = 2 \end{cases},$$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình : $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{array}\right.$.

Vậy, độ dài hai cạnh của hình chữ nhật là 1m và 2m.

Nhận xét: Như vậy, điểm cốt yếu của ứng dụng này là chuyển việc "*Giải một hệ phương trình*" thành việc "*Giải một phương trình*".

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$

Giải

a. Từ hệ phương trình, suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \overset{a-b+c=0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \ \& \ y = 3 \\ x = 3 \ \& \ y = -1 \end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (–1, 3) và (3, –1).

b. Từ hệ phương trình, suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 - \sqrt{3} \\ t_2 = 2 + \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{3} \ \& \ y = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 + \sqrt{3} \ \& \ y = 2 - \sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm: $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ và $(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$.

Nhận xét: Như vậy, trong ví dụ trên:

1. Ở câu a), chỉ mang tính minh hoạ cho phương pháp chuyển đổi từ *hệ phương trình* thành *phương trình*. Bởi vì, chúng ta thấy ngay phép chuyển đổi này không hiệu quả khi mà có thể nhẩm được nghiệm ngay từ hệ đó, cụ thể:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=3.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \,\&\, y=-1 \\ x=-1 \,\&\, y=3 \end{array}\right.$$

2. Ở câu b), vì hệ không thể nhẩm được nghiệm nên việc chuyển đổi là hoàn toàn phù hợp.

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x+y+xy=-2 \\ xy=-6 \end{cases}$.   b. $\begin{cases} x^2+y^2=12 \\ xy=-4 \end{cases}$.

Giải

a. Biến đổi hệ phương trình về dạng: $\begin{cases} x+y+(-6)=-2 \\ xy=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=-6 \end{cases}$

suy ra x, y là nghiệm của phương trình: $t^2-4t-6=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=2-\sqrt{10} \\ t_2=2+\sqrt{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{10} \,\&\, y=2+\sqrt{10} \\ x=2+\sqrt{10} \,\&\, y=2-\sqrt{10} \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm:

$(2-\sqrt{10}, 2+\sqrt{10})$ và $(2+\sqrt{10}, 2-\sqrt{10})$.

b. Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ về dạng:

$$(x+y)^2-2xy=12 \overset{xy=-4}{\Leftrightarrow} (x+y)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=-2 \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $x+y=2$, ta nhận được hệ: $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-4 \end{cases}$

  suy ra x, y là nghiệm của phương trình: $t^2-2t-4=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=1-\sqrt{5} \\ t_2=1+\sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{5} \,\&\, y=1+\sqrt{5} \\ x=1+\sqrt{5} \,\&\, y=1-\sqrt{5} \end{array}\right.$$

- Với $x+y=-2$, ta nhận được hệ: $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-4 \end{cases}$

  suy ra x, y là nghiệm của phương trình: $t^2+2t-4=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -1 - \sqrt{5} \\ t_2 = -1 + \sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{5} \ \& \ y = -1 + \sqrt{5} \\ x = -1 + \sqrt{5} \ \& \ y = -1 - \sqrt{5} \end{array}\right..$$

Vậy, hệ phương trình có bốn cặp nghiệm:

$$(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}), (1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}),$$
$$(-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}), (-1 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5}).$$

Nhận xét: Như vậy, trong ví dụ trên:

1. Ở câu a), chúng ta sử dụng phép thế để nhận được hệ phương trình cơ bản.
2. Ở câu b), chúng ta cần sử dụng phép biến đổi hằng đẳng thức sau đó dùng phép thế để nhận được hệ phương trình cơ bản.

Ngoài ra, trong nhiều trường hợp chúng ta còn cần sử dụng tới ẩn phụ. Ví dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ xy = 27 \end{cases}$.

Giải

Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt[3]{x} \\ v = \sqrt[3]{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = x \\ v^3 = y \end{cases}$

Khi đó, hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} u + v = 4 \\ u^3.v^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ (uv)^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 3 \end{cases}$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình :

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \overset{a-b+c=0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \ \& \ v = 3 \\ u = 3 \ \& \ v = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x} = 1 \ \& \ \sqrt[3]{y} = 3 \\ \sqrt[3]{x} = 3 \ \& \ \sqrt[3]{y} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ \& \ y = 27 \\ x = 27 \ \& \ y = 1 \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của hệ đã cho là (1, 27) và (27, 1).

Nhận xét: 1. Trong ví dụ trên bằng việc sử dụng hai ẩn phụ chúng ta đã chuyển được một hệ vô tỉ về dạng chuẩn để có thể chuyển nó về một phương trình bậc hai.

Tuy nhiên, cho dù lời giải này là tường minh nhưng chúng ta có thể thực hiện gọn hơn mà không cần sử dụng tới ẩn phụ, cụ thể:

Xét phương trình thứ nhất của hệ:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 = 4^3$$

$$\Leftrightarrow x + y + 3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right) = 64 \Leftrightarrow x + y = 28.$$

Vậy, hệ có dạng: $\begin{cases} x + y = 28 \\ xy = 27 \end{cases}$

suy ra x, y là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 28t + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 27 \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của hệ đã cho là (1, 27) và (27, 1).

2. Như vậy, bằng việc sử dụng hệ thức Viét chúng ta đã biết cách chuyển một hệ phương trình thành một phương trình bậc hai để giải. Tuy nhiên, đó vẫn chỉ là phép biến đổi một bước, chúng ta hãy thử quan tâm tới sơ đồ biến đổi sau:

Phương trình ⇔ Hệ phương trình ⇔ Phương trình

Ví dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} + \sqrt{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}} = 4.$

Giải

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} \\ v = \sqrt{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow 0 < u \leq v$ và $uv = \sqrt{x + 9 - x} = 3.$

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ: $\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 3 \end{cases}$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \overset{a-b+c=0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} = 1 \\ \sqrt{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+9} - \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x+9} + \sqrt{x} = 9 \end{cases} \overset{-}{\Rightarrow} -2\sqrt{x} = -8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 16.

Chú ý: Cuối cùng, trong ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ trình bày một ví dụ về hệ có chứa tham số.

Ví dụ 6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 6 \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với m = 26.

b. Xác định m để hệ vô nghiệm.

c. Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất, xác định nghiệm đó.

d. Xác định m để hệ có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Biến đổi hệ phương trình về dạng: $\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = m \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = \dfrac{36 - m}{2} \end{cases}$

khi đó, x, y là nghiệm của phương trình : $t^2 - 6t + \dfrac{36 - m}{2} = 0$. (1)

a. Với m = 26, phương trình (1) có dạng:

$$2t^2 - 12t + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ \& \ y = 5 \\ x = 5 \ \& \ y = 1 \end{array}\right.$$

Vậy, với m = 26 hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1, 5) và (5, 1).

b. Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} < 0 \Leftrightarrow m - 18 < 0 \Leftrightarrow m < 18$.

Vậy, với m < 18 hệ phương trình vô nghiệm.

c. Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = 0 \Leftrightarrow m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 18$.

Khi đó, hệ có nghiệm x = y = 3.

Vậy, với m = 18 hệ phương trình có nghiệm duy nhất x = y = 3.

d. Hệ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} > 0 \Leftrightarrow m - 18 > 0 \Leftrightarrow m > 18$.

Vậy, với m > 18 hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Trình bày phương pháp tìm hai số biết tổng và tích của chúng.

Câu hỏi 2: Hãy nêu các mở rộng của dạng toán tìm hai số biết tổng và tích của chúng

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm hai cạnh của hình chữ nhật biết chu vi bằng 24m và diện tích bằng $27m^2$.

Bài tập 2. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 99 \end{cases}$.   b. $\begin{cases} x + y = -21 \\ xy = 54 \end{cases}$.

Bài tập 3. Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = -\dfrac{9}{4} \end{cases}$.　　　　b. $\begin{cases} 3(x + y) = 2 \\ xy = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Bài tập 4. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x + y = 4 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 \end{cases}$.　　　　b. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x - y - xy = 3 \end{cases}$.

Bài tập 5. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$.　　　　b. $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78 \end{cases}$.

Bài tập 6. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + xy + y = m + 2 \\ x^2y + xy^2 = m + 1 \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m = -3$.
b. Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài tập 7. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + m) \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.
b. Xác định m để hệ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 8. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + xy = m + 1 \\ x^2y + xy^2 = 3m - 5 \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m = \dfrac{5}{2}$.
b. Xác định m để hệ vô nghiệm.
c. Xác định m để hệ có một nghiệm duy nhất.
d. Xác định m để hệ có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 9. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x + 1)(y + 1) = m \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m = 12$.
b. Xác định m để hệ có nghiệm.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Vậy, độ dài hai cạnh của hình chữ nhật là 3m và 9m.

Bài tập 2.

a. (9, 11) và (11, 9).

b. (−3, −18) và (−18, −3).

Bài tập 3.

a. $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ và $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b. Biến đổi hệ phương trình về dạng: $\begin{cases} x + y = \frac{2}{3} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases}$

suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ \& \ y = -1/3 \\ x = \frac{1}{3} \ \& \ y = 1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai cặp nghiệm $\left(1, -\frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3}, -1\right)$

Bài tập 4.

a. Ký hiệu hệ: $\begin{cases} x + y = 4 & (1) \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 & (2) \end{cases}$

Biến đổi phương trình (2) về dạng:

$$280 = [(x + y)^2 - 2xy][(x + y)^3 - 3xy(x + y)] = (16 - 2xy)(64 - 12xy)$$

$$\Leftrightarrow 3(xy)^2 - 40xy + 93 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 3 \\ xy = \frac{31}{3} \end{array}\right.$$

- Với xy = 3, hệ có dạng: $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$

  suy ra, thì x, y là nghiệm phương trình:

  $$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ \& \ y = 3 \\ x = 3 \ \& \ y = 1 \end{array}\right.$$

- Với $xy = \frac{31}{3}$, hệ có dạng: $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = \frac{31}{3} \end{cases}$

  suy ra, thì x, y là nghiệm phương trình: $t^2 - 4t + \frac{31}{3} = 0$, vô nghiệm.

Vậy hệ có hai cặp nghiệm (1, 3) và (3, 1).

b. x = 1 & y = −1.

Bài tập 5. Hướng dẫn:

a. Đặt: $\begin{cases} S = \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ P = \sqrt{xy} \end{cases}$, với u, v ≥ 0..

Đáp số: x = y = 4.

b. Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x + y} \\ v = \sqrt{x - y} \end{cases}$, với u, v ≥ 0.

Đáp số: (8, 8) và (8, -8).

c. Đặt: $\begin{cases} u = x + y \\ v = -\sqrt{xy} \end{cases}$, với u, v ≥ 0.

Đáp số: (4, 9), (9, 4).

Bài tập 6. Đặt: $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$, điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

a. (−1, 2), (2, −1) và (−1, −1).

b. Hệ có một nghiệm duy nhất khi m = 1 hoặc $m = -\dfrac{3}{4}$.

Bài toán 3 — TÍNH GIÁ TRỊ CỦA CÁC BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG GIỮA CÁC NGHIỆM

I. PHƯƠNG PHÁP

Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ là biểu thức có giá trị không thay đổi khi ta hoán vị x_1 và x_2.

Ta có thể biểu thị được các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 theo S và P, ví dụ:

a. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$.

b. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$.

c. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{S}{P}$.

d. $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \dfrac{S^2 - 2P}{P^2}$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

<u>**Ví dụ 1:**</u> Giả sử phương trình: $x^2 - ax + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Kí hiệu $S_n = x_1^n + x_2^n$

a. Hãy tính S_2, S_3, S_4, S_7.

b. Tìm đa thức bậc 7 có hệ số nguyên nhận $\alpha = \sqrt[7]{3} + \sqrt[7]{4}$ là nghiệm.

Giải

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2, suy ra: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = a \\ P = x_1.x_2 = 1 \end{cases}$.

a. Ta lần lượt có:

$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2.$

$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = a^3 - 3a.$

$S_4 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (a^2 - 2)^2 - 2 = a^4 - 4a^2 + 2.$

$S_7 = x_1^7 + x_2^7 = (x_1^4 + x_2^4)(x_1^3 + x_2^3) - x_1^3x_2^3(x_1 + x_2) = a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a.$

Đặt $x_1 = \sqrt[7]{3}$, $x_2 = \sqrt[7]{4}$.

b. Theo câu a) thì với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - ax + 1 = 0$, ta có:

$$x_1^7 + x_2^7 = a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a \Leftrightarrow a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a - 7 = 0.$$

Vậy, đa thức cần tìm có dạng: $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x - 7 = 0$.

Ví dụ 2: Giả sử phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$

có hai nghiệm x_1, x_2. Hãy lập phương trình có nghiệm như sau:

a. $-x_1$ và $-x_2$.

b. $2x_1$ và $2x_2$.

c. x_1^2 và x_2^2.

d. $x_1 + x_2$ và $x_1.x_2$.

e. $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

Giải

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2, suy ra: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

a. Ta có: $\begin{cases} (-x_1) + (-x_2) = -S \\ (-x_1).(-x_2) = P \end{cases}$

suy ra $-x_1$ và $-x_2$ là nghiệm của phương trình: $t^2 + St + P = 0$.

b. Ta có: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2S \\ 2x_1.2x_2 = 4P \end{cases}$

suy ra $2x_1$ và $2x_2$ là nghiệm của phương trình: $t^2 - 2St + 4P = 0$.

c. Ta có: $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \\ x_1^2.x_2^2 = P^2 \end{cases}$

suy ra x_1^2 và x_2^2 là nghiệm của phương trình: $t^2 - (S^2 - 2P)t + P^2 = 0$.

d. Ta có: $\begin{cases}(x_1 + x_2) + x_1.x_2 = S + P \\ (x_1 + x_2).x_1.x_2 = S.P\end{cases}$

suy ra $x_1 + x_2$ và $x_1.x_2$ là nghiệm của: $t^2 - (S + P)t + SP = 0$.

e. Ta có: $\begin{cases}\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{S}{P} \\ \dfrac{1}{x_1}.\dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{P}\end{cases}$ suy ra $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình $t^2 - \dfrac{S}{P}t + \dfrac{1}{P} = 0$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Thế nào là một biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 của một phương trình bậc hai.

Câu hỏi 2: Trình bày phương pháp tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của một phương trình bậc hai.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho phương trình: $\sqrt{2}\,x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 4 = 0$

a. Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

Bài tập 2. Cho phương trình: $\sqrt{2}\,x^2 - 2\sqrt{6}\,x - 8 = 0$

a. Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$.

Bài tập 3. Tìm m để phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 2 = 0$

có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó hãy lập phương trình có nghiệm như sau:

a. $-2x_1$ và $-2x_2$.

b. $3x_1$ và $3x_2$.

c. $-x_1^2$ và $-x_2^2$.

d. $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$.

e. $x_1 + x_2$ và $-x_1.x_2$.

Bài tập 4. Tìm m để phương trình : $mx^2 - 2(m + 3)x + m + 1 = 0$

có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó hãy lập phương trình có nghiệm như sau:

a. $-x_1$ và $-x_2$.

b. $2x_1$ và $2x_2$.

c. x_1^3 và x_2^3.

d. $\dfrac{1}{x_1^4}$ và $\dfrac{1}{x_2^4}$.

e. $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^2\,x_2^2$.

Bài tập 5. Tìm m để phương trình: $mx^2 - 2(m + 1)x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó hãy lập phương trình có nghiệm như sau:

a. $-3x_1$ và $-3x_2$.

b. x_1+x_2 và x_1x_2.

c. x_1^2 và x_2^2.

d. $x_1^2+x_2^2$ và $x_1^2 x_2^2$.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Nhận xét rằng: $\Delta' = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4.\sqrt{2} = 12 - 4\sqrt{2} > 0$

do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. $A = \sqrt{3}$.

Bài tập 2. *Làm tương tự bài tập 1.*

Bài tập 3. Để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, điều kiện là:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - 2m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 1 \Leftrightarrow |m| \geq 1.$$

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1.x_2 = 2m+2 \end{cases}$.

a. $t^2 + 4(m + 1)t + 8(m + 1) = 0$.

b. $t^2 - 18(m + 1)t + 18(m + 1) = 0$.

c. $t^2 + 4m^2t + 4(m + 1)^2 = 0$.

d. Ta có: $\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 1 \\ \dfrac{1}{x_1}.\dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{x_1x_2} = \dfrac{1}{2m+2} \end{cases}$

suy ra $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình: $t^2 - t + \dfrac{1}{2m+2} = 0$.

e. Ta có: $\begin{cases} (x_1 + x_2) + (-x_1x_2) = 0 \\ (x_1 + x_2).(-x_1x_2) = -4(m+1)^2 \end{cases}$

suy ra $x_1 + x_2$ và $- x_1.x_2$ là nghiệm của: $t^2 - 4(m + 1)^2 = 0$.

Bài toán 4 TÌM HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC NGHIỆM KHÔNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Để tìm hệ thức liện hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số (giả sử tham số là m), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 : $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}$.

Bước 2: Áp dụng hệ thức Viét, ta được: $\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1.x_2 = g(m) \end{cases}$. (I)

Bước 3: Khử m từ hệ (I) ta được hệ thức cần tìm.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

<u>Ví dụ 1:</u> Cho phương trình: $x^2 - 2mx - m^2 = 0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

Giải

Nhận xét rằng: $\Delta' = m^2 + m^2 = 2m^2 \geq 0$

do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

Hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = -m^2 \end{cases}$.

Từ hệ trên, bằng cách rút m từ phương trình thứ nhất rồi thay vào phương trình thứ hai, ta được: $x_1.x_2 = -\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4x_1.x_2 = 0$.

Đó chính là hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

<u>Chú ý:</u> Trong dạng toán trên việc tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 là bắt buộc phải có. Và để tránh cho các em học sinh mắc phải thiếu sót này, thường thì bài toán đưa ra câu hỏi tìm điều kiện trước.

<u>Ví dụ 2:</u> Cho phương trình: $(m - 1)x^2 - 2(m - 4)x + m - 5 = 0$.

a. Xác định m để phương trình có hai nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

Giải

a. Để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ 2m - 11 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \neq m \leq \frac{11}{2}. \qquad (*)$$

Khi đó, phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-4)}{m-1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-5}{m-1} \end{cases}. \qquad (I)$$

Khử m từ hệ (I) ta được: $2(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = 1$, đó chính là hệ thức cần tìm.

Chú ý: Trong nhiều trường hợp, việc khử tham số từ hệ (I) cần sử dụng các hằng đẳng thức, đặc biệt là các hằng đẳng lượng giác, cụ thể:

a. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

b. $tg\alpha.cotg\alpha = 1$.

Ví dụ 3: Cho phương trình: $x^2 - 2x\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$.

a. Chứng minh rằng với mọi α phương trình luôn có nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào α.

Giải

a. Ta có: $\Delta' = \sin^2\alpha - \cos\alpha + 1 = \sin^2\alpha + (1 - \cos\alpha) \geq 0, \forall\alpha$.

Vậy, với mọi α phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và x_2.

b. Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sin\alpha \\ x_1.x_2 = \cos\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \cos\alpha = x_1.x_2 + 1 \end{cases}$

$$\overset{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}{\Rightarrow} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + (x_1x_2 + 1)^2 = 1$$

đó chính là hệ thức cần tìm.

Ví dụ 4: Cho phương trình: $x^2 - 2xtg\alpha - 1 - cotg^2\alpha = 0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc α.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \sin\alpha \neq 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases}$.

Trước hết ta cần đi tìm α để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 là:

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow tg^2\alpha + 1 + cotg^2\alpha \geq 0$, luôn đúng.

Suy ra, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2tg\alpha \\ x_1.x_2 = -1 - cotg^2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ cotg^2\alpha = -1 - x_1.x_2 \end{cases}$$

$$\overset{tg\alpha.cotg\alpha=1}{\Rightarrow}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.(-1-x_1x_2)=1,$$ đó chính là hệ thức cần tìm.

Ví dụ 5: Cho phương trình: $(1+m^2)x^2-2mx+1-m^2=0$.

a. Chứng minh rằng với mọi $m>1$ phương trình luôn có nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào m.

Giải

a. Ta có: $\Delta'=m^2-(1+m^2)(1-m^2)=m^4+m^2-1>0, \forall m>1$.

Suy ra, với mọi $m>1$ phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{1+m^2} \\ x_1.x_2=\dfrac{1-m^2}{1+m^2} \end{cases} \qquad (I)$$

b. Khử m từ hệ (I) bằng nhận xét:

$$(x_1+x_2)^2+(x_1x_2)^2=\left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2+\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2=1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2+(x_1x_2)^2=1.$$

đó chính là hệ thức cần tìm.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Thế nào là một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1 và x_2 không phụ thuộc tham số của một phương trình bậc hai.

Câu hỏi 2: Trình bày phương pháp tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1 và x_2 không phụ thuộc tham số của một phương trình bậc hai.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho phương trình: $mx^2-2mx+3=0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

Bài tập 2. Cho phương trình: $x^2-2(m+1)x-m+1=0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình mà không phụ thuộc vào m.

Bài tập 3. Cho phương trình: $x^2-2x\cos\alpha+\sin\alpha-1=0$.

a. Chứng minh rằng với mọi α phương trình luôn có nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào α.

Bài tập 4. Cho phương trình: $x^2-2x\text{cotg}\alpha-1-\text{tg}^2\alpha=0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc α.

Bài tập 5. Cho phương trình: $(1+m^2)x^2-2(m^2-1)x+m=0$.

a. Tìm m để phương trình luôn có nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào m.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. $x_1 + x_2 = 2$.

Bài tập 2. $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 4$.

Bài tập 3.

a. Ta có: $\Delta' = \cos^2\alpha - \sin\alpha + 1 = \cos^2\alpha + (1 - \sin\alpha) \geq 0, \forall\alpha$.

Vậy, với mọi α phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và x_2.

b. Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\cos\alpha \\ x_1.x_2 = \sin\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \sin\alpha = x_1.x_2 + 1 \end{cases}$

$$\xRightarrow{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + (x_1x_2 + 1)^2 = 1$$

đó chính là hệ thức cần tìm.

Bài toán 5 XÉT DẤU CÁC NGHIỆM

I. PHƯƠNG PHÁP

Dùng hệ thức Viét ta có thể xét dấu được các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ với } a \neq 0$$

dựa trên kết quả:

1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P = \dfrac{c}{a} < 0$.
2. Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$.
3. Phương trình có hai nghiệm dương $0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.
4. Phương trình có hai nghiệm âm $x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho phương trình: $x^2 - 2x + m = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tuỳ theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

Giải

Để phương trình có hai nghiệm, điều kiện là: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2, thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 > 0 \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$.

Để chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình, ta xét:

- Nếu $0 < m \leq 1$, phương trình có hai nghiệm dương.
- Nếu $m = 0$, phương trình có hai $x_1 = 0$ và $x_2 = 2$.
- Nếu $m < 0$, phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị lớn hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x - m + 1 = 0$.

Xác định m để phương trình:

a. Có hai nghiệm trái dấu.

b. Có hai nghiệm dương phân biệt.

Giải

a. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow -m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy, với $m>1$ phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $0 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m > 0 \\ 1 - m > 0 \\ 2(m + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với $0 < m < 1$ phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Ví dụ 3: Cho phương trình: $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 1 = 0$. (1)

Xác định m để phương trình:

a. Có một nghiệm.

b. Có hai nghiệm cùng dấu.

Giải

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, là nghiệm duy nhất của phương trình.

Trường hợp 2: Với $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Khi đó, để phương trình có một nghiệm, điều kiện là:

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - (m-1)(m-1) = 0 \Leftrightarrow 6m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Vậy, với m = 1 hoặc $m = -\frac{1}{2}$ phương trình có một nghiệm.

b. Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu, điều kiện là:

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m + 3 \geq 0 \\ \dfrac{m-1}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \neq 1.$$

Vậy, với $-\frac{1}{2} \leq m \neq 1$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

<u>**Ví dụ 4:**</u> Cho phương trình: $mx^2 - 2(3-m)x + m - 4 = 0$. (1)

Xác định m để phương trình:

a. Có hai nghiệm đối nhau.

b. Có đúng một nghiệm âm.

Giải

a. Phương trình có hai nghiệm đối nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m-4}{m} < 0 \\ \dfrac{3-m}{m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy, với m = 3 phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với m = 0.

Khi đó, phương trình có dạng: $-6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$, thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$.

Khi đó, để phương trình có đúng một nghiệm âm, điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 < 0 \leq x_2 \\ x_1 = x_2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < 0 = x_2 \\ x_1 < 0 < x_2 \\ x_1 = x_2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(0) = 0 \\ S < 0 \end{cases} \\ P < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ -b/2a < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m - 4 = 0 \\ \dfrac{2(3-m)}{m} < 0 \end{cases} \\ \dfrac{m-4}{m} < 0 \\ \begin{cases} -2m + 9 = 0 \\ \dfrac{3-m}{m} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ 0 < m < 4 \\ m = \dfrac{9}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, với $m \in (0, 4] \cup \left[\frac{9}{2}\right]$ phương trình có đúng một nghiệm âm.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Tại sao sử dụng hệ thức Viét lại có thể xét dấu được các nghiệm của phương trình bậc hai.

Câu hỏi 2: Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$.

Thiết lập điều kiện để phương trình:

a. Có hai nghiệm cùng dấu.

b. Có hai nghiệm dương.

c. Có hai nghiệm âm.

d. Có hai nghiệm không âm.

e. Có hai nghiệm không dương.

f. Có hai nghiệm trái dấu.

g. Có hai nghiệm đối nhau.

h. Có hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương lớn hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm.

i. Có hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho phương trình: $x^2 + 2x + m = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tuỳ theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

Bài tập 2. Cho phương trình: $x^2 - 4mx + 1 = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tuỳ theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

Bài tập 3. Cho phương trình: $mx^2 - 6x + m = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tuỳ theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

Bài tập 4. Cho phương trình: $mx^2 - 8x + 1 = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tuỳ theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

Bài tập 5. Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 7)x + m^2 - 4 = 0$.

Xác định m để phương trình:

a. Có hai nghiệm trái dấu.

b. Có hai nghiệm cùng dấu.

Bài tập 6. Cho phương trình: $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 1 = 0$.

Xác định m để phương trình:

a. Có hai nghiệm âm phân biệt.

b. Có hai nghiệm dương phân biệt.

Bài tập 7. Cho phương trình: $(m-1)x^2 + 2mx + m + 1 = 0$.

Xác định m để phương trình:

a. Có hai nghiệm âm phân biệt.

b. Có hai nghiệm đối nhau.

Bài tập 8. Giả sử phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$ có đúng một nghiệm dương, gọi nghiệm đó là x_1. Chứng minh rằng;

a. Phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có đúng một nghiệm dương, gọi nghiệm đó là x_2.

b. $x_1 + x_2 \geq 2$.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Để phương trình có hai nghiệm, điều kiện là:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1.$$

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2, thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 < 0 \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$.

Để chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình, ta xét:

- Nếu $0 < m \leq 1$, phương trình có hai nghiệm âm.
- Nếu $m = 0$, phương trình có hai $x_1 = 0$ và $x_2 = -2$.
- Nếu $m < 0$, phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm.

Bài tập 2. Để phương trình có hai nghiệm, điều kiện là:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |m| > \frac{1}{2}.$$

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2, thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m \\ x_1.x_2 = 1 > 0 \end{cases}$

Để chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình, ta xét:

- Nếu $m \geq \frac{1}{2}$, phương trình có hai nghiệm dương.
- Nếu $m \leq -\frac{1}{2}$, phương trình có hai âm.

Bài tập 3. Để phương trình có hai nghiệm, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9 - m^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -3 \leq m \leq 3 \end{cases}.$$

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2, thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{6}{m} \\ x_1.x_2 = 1 \end{cases}$.

Để chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình, ta xét:

- Nếu $0 < m \le 3$, phương trình có hai nghiệm dương.
- Nếu $-3 \le m < 0$, phương trình có hai nghiệm âm.

Bài tập 4. Để phương trình có hai nghiệm, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 16 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m \le 16.$$

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2, thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{8}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{1}{m} \end{cases}$.

Để chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình, ta xét:

- Nếu $0 < m \le 16$, phương trình có hai nghiệm dương.
- Nếu $m < 0$, phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm.

Bài tập 5.

a. Để phương trình có hai nghiệm trái dấu, điều kiện là:

$$P < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow |m| < 2.$$

Vậy, với $|m| < 2$ phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b. Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu, điều kiện là:

$$\begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+7)^2 - (m^2 - 4) \ge 0 \\ m^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14m + 53 \ge 0 \\ m^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{53}{14} \le m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right..$$

Vậy, với $-\dfrac{53}{14} \le m < -2$ hoặc $m > 2$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

Bài tập 6.

a. $m > 1$.

b. $-\dfrac{1}{2} < m < 1$.

Bài tập 7.

a. Để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt, điều kiện là

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ m^2 - (m-1)(m+1) > 0 \\ \dfrac{m+1}{m-1} > 0 \\ -\dfrac{2m}{m-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với $0 < m < 1$ phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

b. Để phương trình có hai nghiệm đối nhau, điều kiện là

$$\begin{cases} P < 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+1}{m-1} < 0 \\ \dfrac{2m}{m-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy, với m = 0 phương trình có hai nghiệm đối nhau.

Bài tập 8.

a. Theo giả thiết ta được:

$ac < 0 \Leftrightarrow$ phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có đúng một nghiệm dương.

Do x_1 là nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$

suy ra: $ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \xleftrightarrow{x_1^2 \neq 0} a + b\left(\dfrac{1}{x_1}\right) + c\left(\dfrac{1}{x_1^2}\right) = 0.$

Tức là, $\dfrac{1}{x_1}$ là nghiệm dương của phương trình $cx^2 + bx + a = 0$, nên: $x_2 = \dfrac{1}{x_1}$.

b. Ta có ngay: $x_1 + x_2 = x_1 + \dfrac{1}{x_1} \geq 2$, đpcm.

Bài toán 6 TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN

I. PHƯƠNG PHÁP

Với yêu cầu " *Tìm điều kiện để các nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện K* ", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Áp dụng hệ thức Viét, ta được: $\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1.x_2 = g(m) \end{cases}$. (I)

Bước 3: Biểu diễn điều kiện K thông qua (I).

Bước 4: Kết luận.

Chú ý: Trong một vài trường hợp, bài toán còn được phát biểu dưới dạng "*Chứng minh rằng các nghiệm của phương trình thoả mãn hệ thức cho trước* ".

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho phương trình: $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$.

Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn : $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$.

Giải

Để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ 3-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq m \leq 3. \qquad (*)$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-2}{m+1} \end{cases}$ k .

Suy ra: $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2 \Leftrightarrow 4.\dfrac{2(m-1)}{m+1} = 7.\dfrac{m-2}{m+1} \Leftrightarrow m = -6$ thoả mãn (*).

Vậy, với $m = -6$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 2: Xác định m để phương trình: $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

Giải

Trước hết, điều kiện phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \neq 0. \qquad (*)$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+1)}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m+1}{m} \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{4(m+1)^2}{m^2} - \frac{2(m+1)}{m} = 2 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

Vậy, với $m = -\dfrac{2}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 3: Cho phương trình: $x^2 - 2kx - (k - 1)(k - 3) = 0$.

Chứng minh rằng với mọi k, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 3 = 0.$$

Giải

Ta có: $\Delta' = k^2 + (k - 1)(k - 3) = 2k^2 - 4k + 4 = 2(k - 1)^2 + 2 \geq 0, \forall k$

suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k \\ x_1.x_2 = -(k-1)(k-3) \end{cases}.$$

Khi đó:

$$\frac{1}{4}\ x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 3 = \frac{1}{4}\ (2k)^2 - (k-1)(k-3) - 2.2k + 3 = 0,$$

đpcm

Ví dụ 4: Giả sử phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Chứng minh rằng hệ thức: $b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$ là điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương của nghiệm còn lại.

Giải

Theo giả thiết ta được: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$ (I)

Xét biểu thức: $P = (x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - (x_1^3 + x_2^3)$

$$= x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - [(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)]$$

$$= \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} - \left[-\frac{b^3}{a^3} + 3.\frac{c}{a}.\frac{b}{a}\right] = \frac{b^3 + a^2c + ac^2 - 3abc}{a^3}$$

$$\Leftrightarrow P = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - x_2^2 = 0 \\ x_2 - x_1^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2^2 \\ x_2 = x_1^2 \end{array}\right. \text{ (đpcm).}$$

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các bước thực hiện khi giải bài toán " *Tìm điều kiện của tham số để các nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện K* ".

Câu hỏi 2: Nêu các bước thực hiện khi giải bài toán " *Chứng minh rằng các nghiệm của phương trình thoả mãn hệ thức K* ".

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm m để phương trình: $x^2 + 2mx + 4 = 0$
có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó:

a. Tính theo m giá trị các biểu thức :
   - $E = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.
   - $F = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$.

b. Tìm m sao cho $x_1^4 + x_2^4 = 32$.

c. Tìm m sao cho $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 47$.

Bài tập 2. Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$.

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

b. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Bài tập 3. Cho phương trình: $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$.

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm.

b. Tìm m để tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 2.

c. Tìm m để phương trình có hai nghiệm bằng nhau về trị tuyệt đối.

d. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| = 1$.

Bài tập 4. Cho phương trình: $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$.

a. Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu.

b. Tìm m để tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 3.

c. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Bài tập 5. Giả sử phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$

có hai nghiệm x_1, x_2. Chứng minh rằng hệ thức: $(k + 1)^2ac - kb^2 = 0$, với $k \neq 0$ là điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng k lần nghiệm còn lại.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Để phương trình có nghiệm x_1 và x_2, điều kiện là:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq 2.$$

Khi đo, hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1.x_2 = 4 \end{cases}$.

a. Để các biểu thức E và F có nghĩa thì phương trình phải có hai nghiệm không âm, tức ứng với $m \leq -2$.

Khi đó: $E^2 = \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right) = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = -2m + 2\sqrt{4} = 4 - 2m$

$\Leftrightarrow E = \sqrt{4 - 2m}$.

$F^2 = \left(\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}\right) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 2\sqrt[4]{x_1x_2} = 4 - 2m + 2\sqrt[4]{4}$

$\Leftrightarrow F = \sqrt{4 - 2m + \sqrt{2}}$.

b. Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 8$.

$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (4m^2 - 8)^2 - 32$.

Do đó: $x_1^4 + x_2^4 = 32 \Leftrightarrow (4m^2 - 8)^2 - 32 = 32 \Leftrightarrow (4m^2 - 8)^2 = 64$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m^2 - 8 = 8 \\ 4m^2 - 8 = -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m^2 = 16 \\ 4m^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 2 \\ m = 0 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, với $m = \pm 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Ta có: $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 = x_1^4 + x_2^4 = \dfrac{(4m^2 - 8)^2 - 32}{16}$.

Do đó: $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \dfrac{(4m^2 - 8)^2 - 32}{16} = 47$

$$\Leftrightarrow (4m^2 - 8)^2 = 784 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m^2 - 8 = 28 \\ 4m^2 - 8 = -28 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m^2 = 36 \\ 4m^2 = -20 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

Vậy, với $m = \pm 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 2. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 3. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 4. *Học sinh tự làm.*

Bài tập 5. Theo giả thiết ta được: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$. (I)

Xét $P = (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = x_1x_2 - k(x_1^2 + x_2^2) + k^2x_1x_2$

$= x_1x_2 - k[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + k^2x_1x_2$

$= \dfrac{c}{a} - k\left[\dfrac{b^2}{a^2} - 2\dfrac{c}{a}\right] + k^2\dfrac{c}{a} = \dfrac{(k+1)^2 ac - kb^2}{a^2} = 0$

$\Leftrightarrow P = 0 \Leftrightarrow (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - kx_2 = 0 \\ x_2 - kx_1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{array}\right. \text{ (đpcm).}$$

CHỦ ĐỀ 6 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

MỞ ĐẦU

Trong chủ đề này chúng ta sẽ quan tâm tới việc sử dụng phương trình bậc hai để giải các phương trình dạng:

Dạng 1: Phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Dạng 2: Giải phương trình bậc ba: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Dạng 3: Giải phương trình bậc bốn bằng phương pháp phân tích.

Dạng 4: Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Dạng 5: Phương trình hồi quy: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$.

$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$.

Dạng 6: Phương trình dạng: $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$, với $a + b = c + d$.

Dạng 7: Phương trình dạng: $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$.

Dạng 8: Sử dụng ẩn phụ bậc hai.

Dạng 9: Giải phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.

Dạng 10: Giải phương trình vô tỉ.

Bài toán 1 SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HỮU TỈ

I. PHƯƠNG PHÁP

Để chỉ ra được một thuật toán chuẩn, trong việc giải các phương trình hữu tỉ (thường gọi là các *phương trình chứa ẩn ở mẫu*), chúng ta bắt đầu với phương trình:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

và thông thường, các em học sinh bắt đầu ngay với việc quy đồng mẫu số để biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{x^2-(x-1)}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Tới đây, đưa ra lời kết luận rằng phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

Chúng ta đi đánh giá cách làm trên, như sau:

- Việc thực hiện quy đồng mẫu số để chuyển phương trình ban đầu về phương trình bậc hai là ***không sai***.
- Việc giải phương trình bậc hai, từ đó suy ra nghiệm $x = 0$ và $x = 1$ là ***không sai***.
- Tuy nhiên, việc kết luận phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$ là ***sai hoàn toàn***, vì hãy nhìn lại phương trình ban đầu chúng ta thấy ngay tại $x = 0$ và $x = 1$ phương trình đều không có nghĩa. Và sai lầm này xảy ra khi chúng ta đã bỏ mẫu số của phương trình mà chưa đặt điều kiện để biểu thức có nghĩa.

Từ đó, để giải các phương trình có ẩn ở mẫu, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Khử mẫu, đưa phương trình về dạng thông thường.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện cho các nghiệm tìm được rồi kết luận.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{4}{x+2} + \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = 0.$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$. (*)

Thực hiện phép quy đồng và bỏ mẫu, phương trình có dạng:

$$x(x + 2) - 4(x + 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 3$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với $a^2 + b^2 > 0$ phương trình sau luôn có nghiệm:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1.$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng: $f(x) = x^2 - (1 + a^2 + b^2)x + a^2 = 0$. (1)

Nhận xét rằng: $\Delta = (1 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2 = (1 + a^2 + b^2 - 2a)(1 + a^2 + b^2 + 2a)$
$= [b^2 + (a - 1)^2][b^2 + (a + 1)^2] > 0.$

tức là, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Ta đi kiểm tra điều kiện (*) cho nghiệm, ta có: $f(0) = a^2$ và $f(1) = -b^2$.

Do a, b không đồng thời bằng 0 nên ít nhất một trong hai giá trị f(0) và f(1) khác 0.

Vậy, với $a^2 + b^2 > 0$ phương trình luôn có nghiệm.

Chú ý: 1. Trong lời giải của ví dụ trên, các em học sinh cần hiểu thật thấu đáo rằng:

- Do a và b không đồng thời bằng không, nên ít nhất một trong hai giá trị f(0) và f(1) khác 0.
- Do phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, nên cho dù có một nghiệm là 0 hoặc 1 thì nghiệm còn lại vẫn thoả mãn điều kiện.

Tức là, phương trình luôn có ít nhất một nghiệm.

2. Trong một vài trường hợp, việc quy đồng mẫu số không phải là giải pháp tối ưu, đặc biệt khi quy đồng chúng ta nhận được một phương trình bậc cao hơn 2, trong những trường hợp như vậy chúng ta thường nghĩ tới những phương pháp giảm bậc cho phương trình và một trong số đó là phương pháp đặt ẩn phụ. Ví dụ sau sẽ minh hoạ nhận định này.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\frac{x^2+2}{x^2-2x+2} - \frac{x^2+2}{x^2+3x+2} = \frac{5}{2}$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 2x + 2 \neq 0 \\ x^2 + 3x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$. (*)

Nhận xét rằng x = 0 không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả tử và mẫu của VT của phương trình cho $x \neq 0$, ta được:

$$\frac{x+\frac{2}{x}}{x-2+\frac{2}{x}} - \frac{x+\frac{2}{x}}{x+3+\frac{2}{x}} = \frac{5}{2}.$$

Đặt $t = x + \frac{2}{x}$, khi đó phương trình được chuyển về dạng:

$$\frac{t}{t-2} - \frac{t}{t+3} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{t(t+3)-t(t-2)}{(t-2)(t+3)} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5t}{(t-2)(t+3)} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t = (t-2)(t+3) \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{2}{x} = 3 \\ x + \dfrac{2}{x} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

Nhận xét: 1. Như vậy, với bài toán trên nếu chúng ta lựa chọn hướng quy đồng mẫu số thì sẽ nhận được một phương trình bậc 4 và việc giải phương trình này phụ thuộc rất nhiều vào kỹ năng đoán nghiệm cùng phép chia đa thức để chuyển phương trình về dạng tích. Tuy nhiên, một câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra ở đây là " *Tại sao lại có thể nghĩ ra được cách chia cho x rồi đặt ẩn phụ như vậy ?*", câu trả lời có thể được khẳng định ở dạng phương trình tổng quát:

$$\frac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \frac{ax^2 + px + c}{ax^2 + qx + c} = 0.$$

Ta có thể lựa chọn phép chia cả tử và mẫu cho x (hoặc x^2) rồi đặt ẩn phụ $t = ax + \dfrac{c}{x}$ (hoặc $t = a + \dfrac{c}{x}$).

Ý tưởng trên được mở rộng, cho phương trình dạng:

$$\frac{mx}{ax^2 + bx + d} + \frac{nx}{ax^2 + cx + d} = p.$$

2. Việc lựa chọn ẩn phụ, trong hầu hết các trường hợp luôn cần tới những biến đổi đại số để làm xuất hiện dạng của ẩn phụ, để thực hiện tốt công việc này các em học sinh luôn phải thật linh hoạt và sáng tạo. Ví dụ sau sẽ minh hoạ nhận định này.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$.

Giải

Điều kiện: $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. (*)

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2x}{x+2}\right)^2 = 5 - 2.x.\frac{2x}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 + 4.\frac{x^2}{x+2} - 5 = 0.$$

Đặt $t = \frac{x^2}{x+2}$, khi đó phương trình được chuyển về dạng:

$$t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -5 \end{array}\right.$$

- Với t = 1, ta được: $\frac{x^2}{x+2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.
- Với t = –5 : $\frac{x^2}{x+2} = -5 \Leftrightarrow x^2 = -5x - 10 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$, vn.

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = –1 và x = 2.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các bước thực hiện khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Câu hỏi 2: Nêu các phương pháp thường được lựa chọn để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 1$. b. $\frac{9(x^2+x+1)}{x^2-x+1} - \frac{7(x+1)}{x-1} = 0$.

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{x^2-2x-1}{6} - \frac{1}{x^2-2x} = 0$.

b. $\frac{2}{x^2-3x+3} + \frac{1}{x^2-3x+4} = \frac{15}{2(x^2-3x+5)}$.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{2x^2+5x+8}{2x^2+3x+8} + \frac{2x^2+3x+8}{2x^2+7x+8} = 0$. b. $\frac{5x^2+6x+9}{5x^2+4x+9} + \frac{5x^2+10x+9}{5x^2+7x+9} = 0$.

Bài tập 4. Giải các phương trình sau:

a. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+5x+2} + \frac{2x}{x^2-5x+2} = 0$. b. $\frac{2x^2+x+3}{2x^2-7x+3} + \frac{3x}{2x^2+6x+3} = 0$.

Bài tập 5. Giải các phương trình sau:

a. $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} - 8 = 0$. b. $4x^2 + \frac{x^2}{(2x+1)^2} - 5 = 0$.

Bài tập 6. Cho phương trình: $\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}=2$.

a. Tìm a, b để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Tìm a, b để phương trình có nghiệm.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $x=\pm\sqrt{3}$.

b. $x=2$.

Bài tập 2.

a. $x=-1$ và $x=3$.

b. $x=1$ và $x=2$.

Bài tập 3. Chia cả tử và mẫu cho x hoặc x^2.

Bài tập 4. Chia cả tử và mẫu cho x.

Bài tập 5. Thêm vào hai lần tích (2ab).

Bài tập 6.

a. $a\neq 0$ và $b\neq 0$ và $a\neq \pm b$.

b. Với mọi a, b không đồng thời bằng không.

Bài toán 2 SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

I. PHƯƠNG PHÁP

Để giải phương trình: $ax^3+bx^2+cx+d=0$. (1)

ta thực hiện các bước:

Bước 1: Đoán nghiệm x_0 của (1).

Bước 2: Phân tích (1) thành

$$(x-x_0)(ax^2+b_1x+c_1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ g(x)=ax^2+b_1x+c_1=0 \end{array}\right. \quad (2)$$

Bước 3: Giải (2) rồi kết luận về nghiệm cho phương trình.

Chú ý: 1. Dự đoán nghiệm dựa vào các kết quả sau:

a. Nếu $a+b+c+d=0$ thì (1) có nghiệm $x=1$.

b. Nếu $a-b+c-d=0$ thì (1) có nghiệm $x=-1$.

c. Nếu a, b, c, d nguyên và (1) có nghiệm hữu tỷ $\frac{p}{q}$ thì p, q theo thứ tự là ước của d và a.

d. Nếu $ac^3 = bd^3$ (a, d $\neq 0$) thì (1) có nghiệm $x = -\frac{c}{b}$.

2. Với các phương trình bậc ba có chứa tham số thì:

a. Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi: $\begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases}$.

b. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi:

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_g = 0 \ \& \ g(x_0) \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \ \& \ g(x_0) = 0 \end{array}\right.$$

c. Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm khi:

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_g = 0 \ \& \ g(x_0) = 0 \\ \Delta_g < 0 \end{array}\right..$$

3. Với các phương trình có chứa tham số có thể coi tham số là ẩn để thực hiện việc phân tích đa thức.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a. $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$. b. $2x^3 + x + 3 = 0$.

Giải

a. Nhận xét rằng: a + b + c + d = 0 do đó phương trình có nghiệm x = 1.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x-1)(2x^2 + 3x - 2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$.

b. Nhận xét rằng: a − b + c − d = 0 do đó phương trình có nghiệm x = −1.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x+1)(2x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 2x^2-2x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a. $3x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = 0$. b. $x^3 + x^2 - x\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$.

Giải

a. Nhận xét rằng: $a = 3$ có ước là $\pm1, \pm3$ và $d = 2$ có ước là $\pm1, \pm2$ do đó phương trình nếu có nghiệm hữu tỷ thì chỉ có thể là một trong các giá trị ±1, $\pm2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$.

Nhận thấy $x = \frac{2}{3}$ là nghiệm của phương trình.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(3x-2)(x^2-2x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-2=0 \\ x^2-2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3} \\ x=1\pm\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = \frac{2}{3}$, $x = 1-\sqrt{3}$, $x = 1+\sqrt{3}$.

b. Nhận xét rằng: $ac^3 = 1.\left(1-\sqrt{2}\right)^3 = -2\sqrt{2} = bd^3$

do đó phương trình có nghiệm $x = -\frac{c}{b} = \sqrt{2}$.

Biến đổi phương trình về dạng: $\left(x-\sqrt{2}\right)\left[x^2+\left(\sqrt{2}+1\right)x+1\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{2}=0 \\ x^2+(\sqrt{2}+1)x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{2}$.

Chú ý: Khi đã thành thạo các phương pháp nhẩm nghiệm các bạn học sinh không cần nêu nhận xét trong lời giải cho mỗi phương trình.

Ví dụ 3: Cho phương trình: $x^3 - (2m+1)x^2 + 3(m+4)x - m - 12 = 0$. (1)

a. Giải phương trình với $m = -12$.

b. Xác định m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng: $(x-1)(x^2-2mx+m+12)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ g(x)=x^2-2mx+m+12=0 \quad (2) \end{array}\right. \qquad (1)$$

a. Với $m=-12$, hệ (I) có dạng: $\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2+24x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=-24 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x=1$, $x=0$, $x=-24$.

b. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi:

Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-12>0 \\ 13-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ 4<m\neq 13 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m<-3$ hoặc $4<m\neq 13$ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Chú ý: Nếu phương trình có chứa tham số m, ta có thể coi m là ẩn, còn x là tham số. Sau đó tìm lại x theo m.

Ví dụ 4: Xác định m để phương trình:

$$m^2x^3-3mx^2+(m^2+2)x-m=0, \text{ với } m\neq 0. \qquad (1)$$

có ba nghiệm phân biệt.

Giải

Viết lại phương trình về dạng: $(x^3+x)m^2-(3x^2+1)m+2x=0$

Coi m là ẩn, còn x là tham số, ta được phương trình bậc 2 theo m. Giải ra ta được: $m=\dfrac{1}{x}$ hoặc $m=\dfrac{2x}{x^2+1}$

Do đó phương trình được chuyển về dạng:

$$(mx-1)(mx^2-2x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx-1=0 \\ f(x)=mx^2-2x+m=0 \end{array}\right..$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\dfrac{1}{m}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ f(-1/m)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 1-m^2>0 \\ m-1/m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ |m|<1 \end{cases}.$$

Vậy, với $m\in(-1, 1)\setminus\{0\}$ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Chú ý: Nếu các phương pháp nhẩm nghiệm không có tác dụng ta có thể thử vận dụng kiến thức về phân tích đa thức.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^3 - 3x^2\sqrt{3} + 7x - \sqrt{3} = 0$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - x^2\sqrt{3} - 2x^2\sqrt{3} + 6x + x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - \sqrt{3}) - 2x\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + (x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x^2 - 2x\sqrt{3} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \sqrt{3} = 0 \\ x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \pm \sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các bước thực hiện khi sử dụng phương trình bậc hai để giải phương trình bậc ba.

Câu hỏi 2: Nêu các kết quả đoán nghiệm của phương trình bậc ba.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình sau:

a. $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$.

b. $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.

c. $2x^3 + x + 3 = 0$.

d. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

e. $2x^3 - 9x + 2 = 0$.

f. $8x^3 - 4x^2 + 10x - 5 = 0$.

Bài tập 2. Giải phương trình sau, biết rằng phương trình có một nghiệm không phụ thuộc vào a, b và $b > 0$: $x^3 - (2a + 1)x^2 + (a^2 + 2a - b)x - (a^2 - b) = 0$.

Bài tập 3. Cho phương trình: $mx^3 + (3m - 4)x^2 + (3m - 7)x + m - 3 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 3$.

b. Xác định m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt không dương.

Bài tập 4. Cho phương trình: $x^3 - 2mx^2 + mx + m - 1 = 0$. Xác định m để:

a. Phương trình có đúng 1 nghiệm.

b. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

c. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Bài tập 5. Cho phương trình: $x^3 - 2mx^2 + (2m^2 - 1)x - m(m^2 - 1) = 0$.

Xác định m để:

a. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

b. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt dương.

c. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt âm.

Bài tập 6. Xác định m để phương trình:

$$x^3 - (m + 1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m - 1) = 0$$

có 2 nghiệm phân biệt.

Bài tập 7. Cho phương trình: $2x^3 + 2(6m - 1)x^2 - 3(2m - 1)x - 3(1 + 2m) = 0$.

Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt có tổng bình phương bằng 28.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $x = 1$ và $x = \frac{1}{4}$.

b. $x = 1, x = \frac{1}{2}$ và $x = -2$.

c. $x = -1$.

d. $x = -1, x = -\frac{1}{2}$ và $x = -2$.

e. $x = 2, x = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$.

f. $x = \frac{1}{2}$.

Bài tập 2. $x = 1, x = a \pm \sqrt{b}$.

Bài tập 3. Biến đổi phương trình về dạng: $(x + 1)[mx^2 + 2(m - 2)x + m - 3] = 0$

a. $x = -1, x = 0, x = -\frac{2}{3}$.

b. $3 \le m < 4$

Bài tập 4. *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x - 1)[x^2 - (2m - 1)x - m + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ g(x) = x^2 - (2m - 1)x - m + 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right. \qquad (I)$$

a. Phương trình có đúng 1 nghiệm: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ vô nghiệm} \\ (2) \text{ nghiệm kép bằng } 1 \end{array}\right.$.

b. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ có hai nghiệm phân biệt và nhận } x = 1 \text{ làm ngnghiệm} \\ (2) \text{ nghiệm kép khác } 1 \end{array}\right.$$

c. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt: $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Bài tập 5. *Hướng dẫn*:

Biến đổi phương trình về dạng: $(x - m)(x^2 - mx + m^2 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - m = 0 \\ g(x) = x^2 - mx + m^2 - 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right. \qquad (I)$$

a. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt: $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác m.

b. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt dương:

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt dương khác m và $m > 0$.

c. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt âm:

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt âm khác m và $m < 0$.

Bài tập 6. *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x + m)[x^2 - (2m + 1)x + 2(m - 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + m = 0 \\ g(x) = x^2 - (2m+1)x + 2(m-1) = 0 \quad (2) \end{array}\right. . \qquad (I)$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có hai nghiệm phân biệt và nhận } x = -m \text{ làm ngnghiệm} \\ \text{(2) nghiệm kép khác } -m \end{array}\right. .$$

Bài tập 7. Biến đổi phương trình về dạng: $(x - 1)[2x^2 + 12mx + 3(1 + 2m)] = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f(x) = 2x^2 + 12mx + 3(1+2m) = 0 \quad (2) \end{array}\right. .$$

Trước hết, phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36m^2 - 12m - 6 > 0 \\ 17 + 6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{1+\sqrt{7}}{6} \\ -\dfrac{17}{6} \neq m < \dfrac{1-\sqrt{7}}{6} \end{array}\right. .$$

Khi đó: (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -6m \\ x_1.x_2 = \dfrac{3(1+2m)}{2} \end{cases}$.

Tổng bình phương hoành độ các cực trị bằng 28

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 1^2 = 28 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 27 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 27$

$$\Leftrightarrow 36m^2 - 3(1 + 2m) = 27 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{12} \ (l) \end{array}\right. .$$

Vậy, với m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài toán 3 — SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

I. PHƯƠNG PHÁP

Để giải phương trình: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + d\,x + e = 0$. (1)
ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đoán nghiệm x_1, x_2 của phương trình (1).

Bước 2: Phân tích (1) thành: $(x - x_1)(x - x_2)(ax^2 + b_1x + c_1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \\ g(x) = ax^2 + b_1x + c_1 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Bước 3: Giải (2), rồi kết luận nghiệm cho phương trình.

Chú ý: 1. Dự đoán nhận nghiệm dựa vào các kết quả sau :

a. Nếu $a + b + c + d + e = 0$ thì (1) có nghiệm $x = 1$.

b. Nếu $a - b + c - d + e = 0$ thì (1) có nghiệm $x = -1$.

c. Nếu a, b, c, d, e nguyên và (1) có nghiệm hữu tỷ $\frac{p}{q}$ thì p, q theo thứ tự là ước của e và a.

2. Với các phương trình bậc ba có chứa tham số thì:

a. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi :

$x_1 \neq x_2$ và (2) có 2 nghiệm phân biệt khác x_1, x_2.

b. Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi :

$$\left[\begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \ \&\ (2) \text{ có đúng 1 nghiệm khác } x_1, x_2 \\ x_1 = x_2 \ \&\ (2) \text{ có 2 nghiệm khác } x_1 \end{array}\right.$$

c. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi :

$$\left[\begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \ \&\ (2) \text{ vô nghiệm} \\ x_1 \neq x_2 \ \&\ (2) \text{ có nghiệm kép } x_1 \\ x_1 \neq x_2 \ \&\ (2) \text{ có nghiệm kép } x_2 \\ x_1 \neq x_2 \ \&\ (2) \text{ có 2 nghiệm } x_1, x_2 \\ x_1 = x_2 \ \&\ (2) \text{ có nghiệm kép khác } x_1 \\ x_1 = x_2 \ \&\ (2) \text{ có 2 nghiệm \& nhận } x_1 \text{ làm nghiệm} \end{array}\right.$$

d. Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm khi :

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \ \&\ (2) \text{ vô nghiệm} \\ x_1 = x_2 \ \&\ (2) \text{ có nghiệm kép } x_1 \end{array}\right.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$.

Giải

Nhận xét rằng $a + b + c + d + e = 0$ do đó phương trình có nghiệm $x = 1$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-2=0 \\ x^2-x-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=-2 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$x^4 + (2m-1)x^3 + (m^2-2m)x^2 - (m^2-m+1)x - m + 1 = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -1$.

b. Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng: $(x-1)(x^3 + 2mx^2 + m^2x + m - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^3+2mx^2+m^2x+m-1=0 \quad (2) \end{array}\right. . \quad (I)$$

Để tiếp tục phân tích (2), ta viết lại (2) dưới dạng: $xm^2 + (2x^2+1)m + x^3 - 1 = 0$.

Coi m là ẩn, còn x là tham số, ta được phương trình bậc 2 theo m. Giải ra ta

được: $\left[\begin{array}{l} m=1-x \\ m=-\dfrac{x^2+x+1}{x} \end{array}\right.$

Do đó (2) được chuyển về dạng: $(x+m-1)[x^2+(m+1)x+1] = 0$.

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+m-1=0 \\ g(x)=x^2+(m+1)x+1=0 \quad (3) \end{array}\right. . \quad (II)$$

a. Với $m = -1$, hệ (II) có dạng: $\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-2=0 \\ x^2+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy, với $m = 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = 2$.

b. Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 và $1 - m$ và $1 - m \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ g(1-m) \neq 0 \\ 1 - m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ m + 3 \neq 0 \\ 3 - 2m \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < m \neq \dfrac{3}{2} \\ m < -3 \end{array}\right. .$$

Vậy, với $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \backslash \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Chú ý: Nếu các phương pháp nhẩm nghiệm không có tác dụng ta có thể thử vận dụng kiến thức về phân tích đa thức. ý tưởng thường được sử dụng là chuyển đa thức bậc bốn về dạng:

$$A^2 - B^2 = 0 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) = 0$$

khi đó, ta được tích của 2 tam thức bậc 2, do vậy việc giải phương trình bậc bốn được quy về việc giải hai phương trình bậc 2.

Chúng ta cũng cần lưu ý rằng đó chính là ý tưởng chủ đạo để giải mọi phương trình bậc 4.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $x^4 + 2x^3 + 10x - 25 = 0$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng: $(x^4 + 2x^3 + x^2) - (x^2 - 10x + 25) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)^2 - (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 5)(x^2 + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 5 = 0 \\ x^2 + 5 = 0 \text{ (vn)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{6}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các bước thực hiện khi sử dụng phương trình bậc hai để giải phương trình bậc bốn bằng phương pháp phân tích.

Câu hỏi 2: Nêu các kết quả đoán nghiệm của phương trình bậc bốn.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

b. $x^4 - 6x^3 - x^2 + 54x - 72 = 0$.

c. $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8x + 8 = 0$.

d. $2x^4 - 13x^3 + 20x^2 - 3x - 2 = 0$.

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $x^4 - 3x^2 - 4x - 3 = 0$.

b. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Bài tập 3: Cho phương trình: $mx^4 - (m + 2)x^3 + 2(1 - 2m)x^2 + 4(2 + m)x - 8 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Xác định m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

c. Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài tập 4: Cho phương trình: $mx^4 - 6mx^3 + (2 + 11m)x^2 - 6(m + 1)x + 4 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

c. Xác định m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

d. Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài tập 5: Cho phương trình: $x^4 - 4mx^3 + 4(m^2 - 1)x^2 + 12x - 9 = 0$.

a. Xác định m để phương trình có đúng 1 nghiệm.

b. Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

c. Xác định m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

d. Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. Nghiệm $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$.

b. Nghiệm $x = -3, x = 2, x = 3, x = 4$.

c. Nghiệm $x = \pm 2, x = 1 \pm \sqrt{3}$.

d. Nghiệm $x = 2, x = \frac{1}{2}, x = 2 \pm \sqrt{5}$.

Bài tập 2:

a. Biến đổi phương trình về dạng: $(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^2 + 4x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 1)^2 - (x + 2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - x - 3)(x^2 + x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 3 = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \text{ (vn)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

b. *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng:

$(x^4 - 4x^3 + 4x^2) - (x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - (x + 1)^2 = 0$.

Bài tập 3: Biến đổi phương trình về dạng: $(x - 1)(x - 2)(x + 2)(mx - 2) = 0$.

Bài tập 4: *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng:

$(x - 1)(x - 2)(mx^2 - 3mx + 2) = 0$.

Bài tập 5: *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng: $(x^2 - 2mx)^2 - (2x - 3)^2 = 0$.

Bài toán 4 **SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN DẠNG TRÙNG PHƯƠNG**

I. PHƯƠNG PHÁP

Để giải phương trình: $ax^4 + bx^2 + c = 0$. (1)
ta thực hiện các bước:

Bước 1: Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \ge 0$.

Bước 2: Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng: $at^2 + bt + c = 0$. (2)

Bước 3: Giải (2) để tìm nghiệm t, từ đó suy ra nghiệm x cho phương trình.

Chú ý:

1. Nếu phương trình (2) có nghiệm $t_0 \ge 0$ thì phương trình (1) có nghiệm: $x = \pm\sqrt{t_0}$.
2. Với các bài toán có chứa tham số thì:
   a. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất
   $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 \le 0 = t_2$.
   b. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt (trái dấu)
   $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow ac < 0$
   c. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt
   $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2$.
   d. Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt
   $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2$.
3. Nếu phương trình (1) có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3 và x_4 thì:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$
Việc chứng minh kết quả này dựa vào chú ý 1.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Trước tiên, chúng ta thử đi giải một phương trình trùng phương không chứa tham số.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Giải

Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \ge 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \ (l) \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \pm 2$.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $mx^4 - 2(m-1)x^2 + m - 1 = 0$. (1)

Tìm m để phương trình:

a. Có nghiệm duy nhất.

b. Có hai nghiệm phân biệt.

c. Có ba nghiệm phân biệt.

d. Có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \ge 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$f(t) = mt^2 - 2(m-1)t + m - 1 = 0. \quad (2)$$

Ta xét hai trường hợp :

Trường hợp 1: Với $m = 0$, ta được :

$$(2) \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy, với $m = 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Trường hợp 2: Với $m \ne 0$.

a. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 \le 0 = t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S \le 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2(m-1)}{m} \le 0 \\ \dfrac{m-1}{m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

b. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m(m-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Vậy, với $0 \le m < 1$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt .

c. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 = t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ \dfrac{m-1}{m} = 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m} > 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt .

d. Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' > 0\\ P > 0\\ S > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 - m > 0\\ \dfrac{m-1}{m} > 0\\ \dfrac{2(m-1)}{m} > 0\end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy, với $m < 0$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt .

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các bước thực hiện khi sử dụng phương trình bậc hai để giải phương trình bậc bốn dạng trùng phương.

Câu hỏi 2: Nêu các điều kiện để phương trình bậc bốn dạng trùng phương có:

a. Nghiệm duy nhất

b. Hai nghiệm phân biệt.

c. Ba nghiệm phân biệt.

d. Bốn nghiệm phân biệt.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $x^4 - x^2 - 2 = 0.$

b. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0.$

c. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$

d. $x^4 - 4x^2 + 1 = 0.$

Bài tập 2: Cho phương trình: $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 1 = 0.$

Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài tập 3: Cho phương trình: $2x^4 + mx^2 + 2 = 0.$

Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài tập 4: Cho phương trình: $mx^4 + 2x^2 - 2 = 0.$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 5: Cho phương trình: $x^4 - (m + 2)x^2 + m = 0$. Tìm m để phương trình:

a. Có nghiệm duy nhất.

b. Có hai nghiệm phân biệt.

c. Có ba nghiệm phân biệt.

d. Có bốn nghiệm phân biệt.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

b. $x_{1,2} = \pm 1$ và $x_{3,4} = \pm\dfrac{1}{2}$.

c. $x_{1,2} = \pm 1$ và $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

d. $x_{1,2} = \pm\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ và $x_{3,4} = \pm\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Bài tập 2: Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng: $t^2 - 2(m + 1)t + 2m + 1 = 0$. (2)

Phương trình ban đầu có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 2m - 1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \neq 0.$$

Vậy, với $-\frac{1}{2} < m \neq 0$ phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Bài toán 5 — SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN DẠNG HỒI QUY VÀ PHẢN HỒI QUY

I. PHƯƠNG PHÁP

Ta xét hai dạng phương trình:

Dạng 1: (*Phương trình hồi quy*) Để giải phương trình:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0. \quad (1)$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, điều kiện $|t| \geq 2$ suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng: $at^2 + bt + c - 2a = 0$. (3)

Dạng 2: (*Phương trình phản hồi quy*) Để giải phương trình:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0. \quad (1)$$

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng: $at^2 + bt + c + 2a = 0$. (3)

Chú ý: Phương pháp được mở rộng tự nhiên cho dạng phương trình:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

có các hệ số thoả mãn: $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$, $e \neq 0$.

Khi đó ta sử dụng ẩn phụ $t = x + \frac{d}{b}.\frac{1}{x}$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Trước hết chúng ta quan tâm tới phương trình có dạng hồi quy.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$.

Giải.

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, điều kiện $|t| \geq 2$ suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 - \frac{1}{2}t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = 2 \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2} \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^4 + 3x^3 - \frac{35}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$.

Giải

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 + 3x - \frac{35}{4} - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{35}{4} = 0.$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$.

Khi đó phương trình có dạng: $t^2 + 2 + 3t - \frac{35}{4} = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 12t - 27 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{3}{2} \\ t_2 = -\frac{9}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \\ x - \frac{1}{x} = -\frac{9}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ 2x^2 + 9x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \ \& \ x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_{3,4} = \frac{-9 \pm \sqrt{97}}{4} \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt: $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-9 \pm \sqrt{97}}{4}$.

Chú ý: Ví dụ tiếp theo minh họa cho dạng mở rộng với điều kiện cho các hệ số là $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$.

Giải

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được phương trình tương đương:

$$2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{5}{x}\right) + 74 = 0$$

Đặt $t = x + \frac{5}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{25}{x^2} = t^2 - 10$.

Khi đó phương trình trên có dạng: $2t^2 - 21t + 54 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = \frac{9}{2} \end{array}\right.$.

- Với $t = 6$, ta được: $x + \frac{5}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ và $x_2 = 5$.
- Với $t = \frac{9}{2}$, ta được: $x + \frac{5}{x} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2 \ \& \ x_4 = \frac{5}{2}$.

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt là $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{5}{2}$.

Chú ý: Nhiều phương trình ở dạng ban đầu không phải là một phương trình hồi quy hay phản hồi quy, tuy nhiên với phép đặt ẩn phụ thích hợp ta có thể chuyển chúng về dạng hồi quy hoặc phản hồi quy, từ đó áp dụng phương pháp đã biết để giải. Ta đi xem xét hai ví dụ sau.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $(x-2)^4 + (x-2)(5x^2 - 14x + 13) + 1 = 0$.

Giải

Nhận xét rằng đây không phải là một phương trình hồi quy, tuy nhiên nếu đặt ẩn phụ thích hợp ta sẽ có một phương trình hồi quy.

Thật vậy, đặt $y = x - 2$, phương trình được biến đổi về dạng:

$y^4 + y[5(y+2)^2 - 14(y+2) + 13] + 1 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 5y^3 + 6y^2 + 5y + 1 = 0$. (2)

Nhận xét rằng $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $y^2 \neq 0$, ta được phương trình tương đương:

$$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 5\left(y + \frac{1}{y}\right) = 6$$

Đặt $t = y + \frac{1}{y}$, suy ra $y^2 + \frac{1}{y^2} = t^2 - 2$.

Khi đó phương trình trên có dạng: $t^2 + 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -4 \end{array}\right.$.

- Với $t = -1$, ta được: $y + \frac{1}{y} = -1 \Leftrightarrow y^2 - y + 1 = 0$, vô nghiệm.
- Với $t = -4$, ta được: $y + \frac{1}{y} = -4 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = -2 - \sqrt{3} \\ y_2 = -2 + \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $(x^2 - x)^2 - 2x(3x - 5) - 3 = 0$.

Giải

Nhận xét rằng đây không phải là một phương trình phản hồi quy, tuy nhiên nếu đặt ẩn phụ thích hợp ta sẽ có một phương trình phản hồi quy.

Thật vậy, đặt $y = x - 1$, phương trình được biến đổi về dạng:

$[(y+1)^2 - (y+1)] - 2(y+1)[3(y+1) - 5] - 3 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^3 - 5y^2 - 2y + 1 = 0$

Nhận xét rằng $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $y^2 \neq 0$, ta được phương trình tương đương:

$$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 2\left(y - \frac{1}{y}\right) - 5 = 0$$

Đặt $t = y + \frac{1}{y}$, suy ra $y^2 + \frac{1}{y^2} = t^2 + 2$.

Khi đó phương trình trên có dạng: $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right.$.

- Với t = 1, ta được: $y - \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

- Với t = – 3, ta được: $y - \frac{1}{y} = -3 \Leftrightarrow y^2 + 3y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad y_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu phương pháp giải phương trình dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$.

Câu hỏi 2: Nêu phương pháp giải phương trình dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$.

Câu hỏi 3: Nêu phương pháp giải phương trình dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

có các hệ số thoả mãn $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$, $e \neq 0$.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a. $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 - 3x + 2 = 0$.　　b. $2x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x + 2 = 0$.

Bài tập 2. Giải các phương trình:

a. $x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 20x + 16 = 0$.　　b. $16x^4 - 24x^3 + 16x^2 - 6x + 1 = 0$.

Bài tập 3. Giải các phương trình:

a. $x^4 + 4x^3 + 4x + 1 = 0$.　　b. $x^4 + x^3 + x + 1 = 0$.

Bài tập 4. Giải các phương trình:

a. $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$.　　b. $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$.

Bài tập 5. Giải các phương trình:

a. $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = 0$.　　b. $27x^4 - 6x^3 - 37x^2 + 4x + 12 = 0$.

Bài tập 6. Giải các phương trình:

a. $x^4 + (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$.　　b. $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \dfrac{1}{2}$.

Bài tập 2: *Hướng dẫn*:

a. Nhận xét rằng x = 0 không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được: $\left(x^2 + \dfrac{16}{x^2}\right) + 5\left(x + \dfrac{4}{x}\right) + 12 = 0$

Đặt $t = x + \dfrac{4}{x}$, suy ra $x^2 + \dfrac{16}{x^2} = t^2 - 8$.

Khi đó, phương trình trên có dạng: $t^2 + 5t + 4 = 0$.

b. Nhận xét rằng x = 0 không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được: $\left(16x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 6\left(4x + \dfrac{1}{x}\right) + 16 = 0$

Đặt $t = 4x + \dfrac{1}{x}$, suy ra $16x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 8$.

Khi đó, phương trình trên có dạng: $t^2 - 6t + 8 = 0$.

Bài toán 6 SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$, với $a + b = c + d$

I. PHƯƠNG PHÁP

Cho phương trình: $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$ (1)

với $a + b = c + d$.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$[x^2 + (a + b)x + ab].[x^2 + (c + d)x + cd] = m. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x^2 + (a + b)x + ab$, suy ra: $x^2 + (c + d)x + cd = t - ab + cd$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$t(t - ab + cd) = m \Leftrightarrow t^2 - (ab - cd)t - m = 0. \quad (3)$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Giải phương trình: $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4$.

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng: $(x^2 + 12x + 32)(x^2 + 12x + 35) = 4$.

Đặt $t = x^2 + 12x + 32$, suy ra $x^2 + 12x + 35 = t + 3$.

Khi đó, phương trình trên có dạng: $t(t + 3) = 4 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 1 \end{array}\right.$.

- Với $t = -4$, ta được: $x^2 + 12x + 32 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 28 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -6 \pm 2\sqrt{2}$.
- Với $t = 1$, ta được: $x^2 + 12x + 32 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 31 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = -6 \pm \sqrt{5}$.

Vậy, phương trình có 4 nghiệm phân biệt là : $x_{1,2} = -6 \pm 2\sqrt{2}$ và $x_{3,4} = -6 \pm \sqrt{5}$.

Chú ý: Dạng phương trình trên được mở rộng tự nhiên cho lớp phương trình: $(a_1x + a_2)(b_1x + b_2)(c_1x + c_2)(d_1x + d_2) = m$

với điều kiện: $\begin{cases} a_1.b_1 = c_1.d_1 \\ a_1.b_2 + a_2.b_1 = d_1.c_2 + d_2.c_1 \end{cases}$

khi đó ta đặt $t = (a_1x + a_2)(b_1x + b_2)$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $(2x - 1)(x - 1)(x - 3)(2x + 3) = -9$.

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng: $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 3x - 9) = -9$.

Đặt $t = 2x^2 - 3x + 1$, suy ra $2x^2 - 3x - 9 = t - 10$.

Khi đó, phương trình có dạng : $t(t - 10) = -9 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 9 \end{array}\right.$.

- Với $t = 1$, ta được: $2x^2 - 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{array}\right.$
- Với $t = 9$, ta được: $2x^2 - 3x + 1 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{4}$.

Vậy, phương trình có 4 nghiệm phân biệt là : $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{4}$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu phương pháp giải phương trình dạng:

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m \text{ với } a + b = c + d.$$

Câu hỏi 2: Hãy nêu một dạng mở rộng của phương trình trên.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 3$. b. $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) = 9$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $x(x - 2)(x + 2)(x + 4) = 18$. b. $(4x + 1).(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) = 4$.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. Viết lại phương trình dưới dạng: $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 3$.

Đặt $t = x^2 + 5x + 4$, suy ra $x^2 + 5x + 6 = t + 2$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t(t + 2) = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right..$$

- Với $t = 1$, ta được: $x^2 + 5x + 4 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.
- Với $t = -3$, ta được: $x^2 + 5x + 4 = -3 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 7 = 0$ vô nghiệm.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

b. $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{8}$ và $x_3 = -2$.

Bài toán 7 SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN

$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

I. PHƯƠNG PHÁP

Để giải phương trình: $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$. (1)

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt $t = x + \dfrac{a+b}{2}$, suy ra: $\begin{cases} x + a = t + \dfrac{a-b}{2} \\ x + b = t - \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$.

Khi đó, phương trình có dạng: $2t^4 + 12\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2.t^2 + 2\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^4 = c$. (2)

Bước 2: Đặt $u = t^2$, điều kiện $u \ge 0$.

Khi đó, phương trình có dạng: $2u^2 + 12\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2.u + 2\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^4 = c$. (3)

Bước 3: Giải (3) nhận được nghiệm u, từ đó suy ra nghiệm t rồi tới x.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho phương trình: $(x + 1)^4 + (x + 3)^4 = 2m$. (1)

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Đặt $t = x + \frac{1+3}{2} = x + 2$, suy ra $\begin{cases} x+1 = t-1 \\ x+3 = t+1 \end{cases}$.

Khi đó, phương trình (1) được chuyển về dạng:

$(t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 2m \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 2m \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 + 1 - m = 0$. (2)

Đặt $u = t^2$, điều kiện $u \geq 0$.

Khi đó, phương trình (2) được chuyển về dạng:

$f(u) = u^2 + 6u + 1 - m = 0$. (3)

a. Với m =1, ta được: $u^2 + 6u = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = -6\ (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy, với m = 1 phương trình có nghiệm x = – 2.

b. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là:

(3) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy, với m>1 phương trình có hai nghiệm phân biệt.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu phương pháp giải phương trình dạng: $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$.

Câu hỏi 2: Viết biểu thức điều kiện của tham số để phương trình:

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$$

a. Có một nghiệm.

b. Có hai nghiệm phân biệt.

c. Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

d. Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 2$. b. $(x + 1)^4 + (x + 5)^4 = 256$.

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $(x - 2)^4 + (x + 4)^4 = 626$. b. $(2x - 1)^4 + (2x + 3)^4 = 626$.

Bài tập 3: Cho phương trình: $(x + 2)^4 + (x + 6)^4 = m^2 - 2$.

a. Giải phương trình với m = 2.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c. Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

d. Tìm m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. Đặt $t = x + \frac{3+5}{2} = x + 4$, suy ra: $\begin{cases} x+3 = t-1 \\ x+5 = t+1 \end{cases}$.

Khi đó, phương trình được chuyển về dạng:

$$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 2 \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

$\Leftrightarrow$ $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -4$.

Bài toán 8 SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN BẰNG ẨN PHỤ BẬC HAI

I. PHƯƠNG PHÁP

Để giải phương trình: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. (1)
bằng cách sử dụng ẩn phụ bậc hai, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$A(x^2 + b_1x + c_1)^2 + B(x^2 + b_1x + c_1) + C = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x^2 + b_1x + c_1$, khi đó, phương trình được chuyển về dạng:

$$At^2 + Bt + C = 0. \quad (3)$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

<u>**Ví dụ 1:**</u> Giải phương trình: $x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 36x - 36 = 0$. (1)

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng: $(x^2 - 4x)^2 - 9(x^2 - 4x) + 36 = 0$ (2)

Đặt $t = x^2 - 4x$. Khi đó, phương trình có dạng: $t^2 - 9t + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 12 \\ t = -3 \end{array}\right.$.

- Với $t = 12$, ta được: $x^2 - 4x = 12 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 6 \end{array}\right.$.
- Với $t = -3$, ta được: $x^2 - 4x = -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Chú ý: Ta thấy ngay rằng bài toán trên cũng có thể được giải bằng phương pháp đoán nghiệm rồi phân tích thành nhân tử, tuy nhiên phương pháp đặt ẩn phụ luôn được ưu tiên, bởi trong nhiều trường hợp ta đoán được nghiệm x_0 rồi nhưng phương trình $g(x) = 0$ không dự đoán được nghiệm, khi đó ta phải giải một phương trình bậc 3 ở dạng tổng quát và hiển nhiên đây là công việc khó khăn.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $(x^2 - 2x + 3)^2 - (x^2 - 2x) - 5 = 0$.

Giải.

Viết lại phương trình dưới dạng: $(x^2 - 2x + 3)^2 - (x^2 - 2x + 3) + 2 = 0$

Đặt $t = x^2 - 2x + 3$. Khi đó, phương trình có dạng: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \end{array}\right.$.

- Với $t = 2$, ta được: $x^2 - 2x + 3 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Với $t = -1$, ta được: $x^2 - 2x + 3 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$, vô nghiệm.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Chú ý: Cách đặt ẩn phụ cho phương trình bậc 4 rất phong phú, đa dạng, tuỳ thuộc vào đặc thù của mỗi phương trình, phương pháp được trình bày trong hai ví dụ trên trên chỉ minh hoạ một kiểu đặt ẩn phụ, sau đây ta đi xem xét thêm một vài ví dụ.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $2(x^2 - x + 1)^2 + x^3 + 1 = (x + 1)^2$.

Giải

Nhận xét rằng $x = -1$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $(x + 1)^2 \neq 0$, ta được:

$$2\left(\frac{x^2 - x + 1}{x + 1}\right)^2 + \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = 1.$$

Đặt $t = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$. Khi đó, phương trình có dạng: $2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

- Với $t = -1$, ta được: $\frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = -1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = -x - 1 \Leftrightarrow x^2 = -2$ vô nghiệm
- Với $t = \frac{1}{2}$, ta được: $\frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $2x^4 - 3x^2(x^2 + 1) + (x^2 + 1)^2 = 0$

Giải

Chia hai vế của phương trình cho $x^2 + 1 \neq 0$, ta được:

$$2\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 - 3\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + 1 = 0.$$

Đặt $t = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng: $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

- Với $t = 1$, ta được: $\dfrac{x^2}{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$, vô nghiệm.
- Với $t = \dfrac{1}{2}$, ta được: $\dfrac{x^2}{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \pm 1$.

Ví dụ 5: Giải phương trình: $(x - 18)(x - 7)(x + 35)(x + 90) = 2001x^2$.

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng: $(x^2 + 17x - 630)(x^2 + 83x - 630) = 2001x^2$

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, xhia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được: $\Leftrightarrow \left(x + 17 - \dfrac{630}{x}\right)\left(x + 83 - \dfrac{630}{x}\right) = 2001$

Đặt $t = x + 50 - \dfrac{630}{x}$. Khi đó, phương trình có dạng:

$(t - 33)(t + 33) = 2001 \Leftrightarrow t^2 = 3090 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{3090} \Leftrightarrow x + 50 - \dfrac{630}{x} = \pm\sqrt{3090}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = -25 + \dfrac{\sqrt{3090} \pm \sqrt{8110 - 100\sqrt{3090}}}{2} \\ x_{3,4} = -25 + \dfrac{-\sqrt{3090} \pm \sqrt{8110 + 100\sqrt{3090}}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các bước cần thực hiện khi giải phương trình bậc bốn bằng phương pháp sử dụng ẩn phụ bậc hai.

Câu hỏi 2: Để nhận biết được ẩn phụ bậc hai cho phương trình thông thường chúng ta sử dụng những phép biến đổi nào ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho phương trình:

a. $x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 14x + 12 = 0$ b. $x^4 + 4x^3 - 8x + 3 = 0$.

Bài tập 2: Cho phương trình:

a. $4x^2 + 10x(x^2 + 1) + 4(x^2 + 1)^2 = 0$. b. $(x - 2)^2x^2 + 4x^2 = 5(x - 2)^2$.

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $(x^2 - 4)(x^2 - 2x) = 2$.

b. $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1: *Hướng dẫn*:

a. Viết lại phương trình dưới dạng: $(x^2 + 2x + 2)^2 + 3(x^2 + 2x + 2) + 2 = 0$.
Đặt $t = x^2 + 2x + 2$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng: $(x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) + 3 = 0$. Đặt $t = x^2 + 2x$.

Bài tập 2: *Hướng dẫn*:

Viết lại phương trình dưới dạng: $\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2 + 5.\dfrac{2x}{1+x^2} + 4 = 0$.Đặt $t = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Bài toán 9 SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. PHƯƠNG PHÁP

Với các phương trình chứa dấu trị tuyệt đối, có thể được chuyển về phương trình bậc hai bằng một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi tương đương, bao gồm:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \text{. hoặc } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Trước tiên chúng ta quan tâm tới phương trình chứa dấu trị tuyệt đối được chuyển về phương trình bậc hai bằng phương pháp biến đổi tương đương.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $|x^2 - 2x - 2| = |x^2 + 2x|$.

Giải

Phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 2 = x^2 + 2x \\ x^2 - 2x - 2 = -x^2 - 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = \pm 1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \pm 1$.

Nhận xét: Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ cho phép biến đổi tương đương thứ nhất của phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $|x^2 + x| = -x^2 + x + 2$.

Giải

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + x = -x^2 + x + 2 \\ x^2 + x = x^2 - x - 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2 = 2 \\ 2x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm 1$.

Chú ý: Các ví dụ tiếp theo, sẽ minh hoạ việc sử dụng ẩn phụ để chuyển phương trình chứa dấu trị tuyệt đối về phương trình bậc hai.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $(x - 1)^2 + 4|x - 1| + 3 = 0$.

Giải

Đặt $t = |x - 1|$, điều kiện $t \ge 0$. Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 (l) \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow |x - 1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 3 \\ x - 1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm là $x = 4$ và $x = -2$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các cách giải phương trình chứa dấu trị tuyệt đối bằng phương trình bậc hai.

Câu hỏi 2: Khi đặt $t = |f(x)|$, điều kiện tối thiểu của t là gì ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $|x^2 - 3x + 1| = |x + 2|$. b. $|x^2 + 3x - 1| = |3x - 2|$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $|x^2 - 5x + 4| = x + 4$. b. $|x - 1| = x^2 + x + 1$.

c. $|x^2 - 2x - 4| = x^2 - 3x - 3$.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. $|x^2 - 1| = x^2 - 2x + 8$. b. $|x^2 + x - 2| = 2 - x - x^2$.

Bài tập 4: Giải phương trình: $\dfrac{x^2 - 1}{|x - 2|} = x$.

Bài tập 5: Giải phương trình: $|x^2 - 5x + 2| - \dfrac{6}{|x^2 - 5x + 2|} + 1 = 0$

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 5: Đặt $t = |x^2 - 5x + 2|$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$t - \frac{6}{t} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \ (l) \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow |x^2 - 5x + 2| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 2 = 2 \\ x^2 - 5x + 2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm là $x = 0$, $x = 1$, $x = 4$ hoặc $x = 5$.

Bài toán 10 SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

I. PHƯƠNG PHÁP

Với các phương trình chứa căn thức, có thể được chuyển về phương trình bậc hai bằng một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi tương đương, bao gồm:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \geq 0.$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Trước tiên chúng ta quan tâm tới phương trình chứa căn thức được chuyển về phương trình bậc hai bằng phương pháp biến đổi tương đương.

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a. $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{x + 1}$. b. $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{2x^2 - 7x + 9}$.

Giải

a. Phương trình được biến đổi tương đương thành: $x^2 - 4x + 5 = x + 1 \ge 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 4$.

b. Phương trình được biến đổi tương đương thành: $x^2 - 2x + 3 = 2x^2 - 7x + 9 \ge 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 3 \ge 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + 2 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 2$ và $x = 3$.

Nhận xét: Trong ví dụ trên:

1. Ở câu a), chúng ta lựa chọn điều kiện $x + 1 \ge 0$, vì có cảm giác nó đơn giản hơn điều kiện $x^2 - 4x + 5 \ge 0$. Tuy nhiên, thực tế ta thấy điều kiện $x^2 - 4x + 5 \ge 0$ là đơn giản hơn vì:

   $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \ge 0$, luôn đúng

   Và trong trường hợp này, chúng ta không cần kiểm tra lại nghiệm.

2. Ở câu b), chúng ta lựa chọn điều kiện $x^2 - 2x + 3 \ge 0$, vì điều này luôn đúng.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + x - 3} = x - 1$.

Giải

Phương trình được biến đổi tương đương thành:

$$\begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ 2x^2 + x - 3 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{x + 4} - \sqrt{1 - x} = \sqrt{1 - 2x}$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x+4 \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \\ 1-2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x \le \frac{1}{2}$.

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{7}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

Chú ý: Các ví dụ tiếp theo, sẽ minh hoạ việc sử dụng ẩn phụ để chuyển phương trình chứa căn về phương trình bậc hai.

Ví dụ 4: Cho phương trình: $2(x^2-2x) + \sqrt{x^2-2x-3} - 9 = 0$.

Giải

Điều kiện: $x^2-2x-3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le -1 \end{array}\right.$. (*)

Viết lại phương trình dưới dạng : $2(x^2-2x-3) + \sqrt{x^2-2x-3} - 3 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2-2x-3}$, $t \ge 0$. (**)

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2t^2 + t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{3}{2}\ (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3} = 1$$

$\Leftrightarrow$ $x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$ thoả mãn điều kiện (*).

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các cách giải phương trình chứa căn thức bằng phương trình bậc hai.

Câu hỏi 2: Khi đặt $t = \sqrt{f(x)}$, điều kiện tối thiểu của t là gì ?

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $x - \sqrt{2x+3} = 0.$ b. $\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$

c. $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{x-1}$.

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31.$ b. $(x + 5)(2 - x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$.

c. $\sqrt{(x+1)(2-x)} = 1 + 2x - 2x^2.$

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $\sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-3x+6} = 3.$

b. $\sqrt{2x^2+5x+2} - 2\sqrt{2x^2+5x-6} = 1.$

Bài tập 4: Giải phương trình:

a. $\sqrt{x^2+3x+2} - 2\sqrt{2x^2+6x+2} = -\sqrt{2}$.

b. $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} - 2\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2.$

Bài tập 5: Giải phương trình: $(x - 3)(x + 1) + 4(x - 3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -3.$

Bài tập 6: Giải phương trình: $2\sqrt[n]{(1+x)^2} - 3\sqrt[n]{1-x^2} + \sqrt[n]{(1-x)^2} = 0$, với n chẵn.

V. HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. Phương trình được biến đổi tương đương:

$$\sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 2x+3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 3.

b. Điều kiện: $\begin{cases} 3x+4 \ge 0 \\ 2x+1 \ge 0 \\ x+3 \ge 0 \end{cases} \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{2}.$

Phương trình được chuyển về dạng: $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+4}$

$\Leftrightarrow (x + 3) + (2x + 1) + 2\sqrt{(x+3)(2x+1)} = 3x + 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(2x+1)} = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

c. Điều kiện: $\begin{cases} 5x - 1 \geq 0 \\ 3x - 2 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{5x-1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{3x-2}$

$\Leftrightarrow 5x - 1 = x - 1 + 3x - 2 + 2\sqrt{(x-1)(3x-2)} \Leftrightarrow x + 2 = 2\sqrt{(x-1)(3x-2)}$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 4(x-1)(3x-2) \Leftrightarrow 11x^2 - 24x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (vì $x = \frac{2}{11}$ loại).

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Bài tập 2: *Hướng dẫn:*

a. Viết lại phương trình dưới dạng: $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 20$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 11}$, điều kiện $t \geq \sqrt{11}$.

Khi đó, phương trình có dạng: $t^2 + t - 20 = 0$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng: $-(x^2 + 3x - 10) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó, phương trình có dạng $t^2 + 3t - 10 = 0$.

c. Viết lại phương trình dưới dạng $\sqrt{1 + x - x^2} = 2(1 + x - x^2) - 1$.

Đặt $t = \sqrt{1 + x - x^2}$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình có dạng $2t^2 - t - 1 = 0$.

Bài tập 3:

a. Đặt $t = x^2 - 3x + 3$.

Khi đó phương trình có dạng: $\sqrt{t} + \sqrt{t+3} = 3 \Leftrightarrow t + t + 3 + 2\sqrt{t(t+3)} = 9$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{t(t+3)} = 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t(t+3) = (3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1, x = 2$.

Bài tập 4: *Học sinh tự làm.*

Bài tập 5: Điều kiện: $\frac{x+1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$. (*)

Đặt $t = (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$, suy ra $(x-3)(x+1) = t^2$.

Khi đó phương trình có dạng: $t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = -1 \end{array}\right. \begin{cases} t \le 3 \\ t = 1 \end{cases}$.

- Với $t = -3$, ta được: $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ (x-3)(x+1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 12 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{13}.$$

- Với $t = -1$, ta được: $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ (x-3)(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{5}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1 - \sqrt{13}$ và $x = 1 - \sqrt{5}$.

Bài tập 6: Nhận xét rằng $x = \pm 1$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt[n]{(1-x)^2} \neq 0$, ta được: $2\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}} - 3\sqrt[n]{\dfrac{1-x}{1+x}} + 1 = 0$.

Nhận xét rằng: $\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}}.\sqrt[n]{\dfrac{1-x}{1+x}} = 1$,

nên nếu đặt $t = \sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}}$, điều kiện $t \ge 0$, suy ra: $\sqrt[n]{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{t}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2t - \frac{3}{t} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \text{ loại} \end{array}\right.$$

- Với $t = 1$, ta được: $\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} = 1 \Leftrightarrow 1 + x = 1 - x \Leftrightarrow x = 0$.

CHỦ ĐỀ 7 GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Trước hết các em cần ôn lại kiến thức của phương pháp giải toán bằng cách:

1. Lập phương trình bậc nhất một ẩn.
2. Lập hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai một ẩn, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Lập phương trình.

- Chọn ẩn và xác định điều kiện thích hợp cho ẩn. Chú ý phải ghi rõ đơn vị của ẩn
- Biểu thị các đại lượng chưa biết khác theo ẩn.
- Dựa vào các dữ kiện và điều kiện của bài toán để lập phương trình.

Bước 2: Giải phương trình.

Bước 3: Thử lại, nhận định kết quả và trả lời.

Các bài toán được đưa ra thường rơi vào một trong 5 dạng sau:

Dạng 1: Bài toán chuyển động.

Dạng 2: Bài toán về số và chữ số.

Dạng 3: Bài toán vòi nước.

Dạng 4: Bài toán có nội dung hình học.

Dạng 5: Bài toán về phần trăm - năng suất.

Sau đây chúng ta sẽ minh hoạ mỗi dạng toán bằng một thí dụ cùng lời nhận xét, để các em học sinh tiện theo dõi cũng như hiểu được cách thức thực hiện chúng.

Thí dụ 1: (*Bài toán chuyển động*): Một đoàn xe vận tải dự định điều số xe cùng loại để vận chuyển 40 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành, đoàn xe được giao thêm 14 tấn nữa. Do đó phải điều thêm 2 xe cùng loại và mỗi xe ban đầu phải chở thêm nửa tấn nữa. Tính số xe phải điều theo dự định.

Giải

1. Lập phương trình

a. Lựa chọn ẩn

- Gọi x là số xe phải điều theo dự định, điều kiện $0 < x \in \mathbb{N}$.

b. Thiết lập hai phương trình

Với giả thiết:

- Với x xe vận chuyển 40 tấn hàng, suy ra mỗi xe phải chở số hàng theo dự định bằng $\frac{40}{x}$.
- Vì đoàn xe phải nhận thêm 14 tấn hàng nên số hàng lúc sau là: $40 + 14 = 54$.
- Vì đoàn xe phải điều thêm 2 xe nên số xe lúc sau là $x + 2$ và mỗi xe phải chở số hàng lúc sau bằng $\frac{54}{x+2}$.
- Vì mỗi xe phải chở thêm nửa tấn nên ta có phương trình: $\frac{40}{x} + \frac{1}{2} = \frac{54}{x+2}$

2. Giải phương trình $80(x + 2) + x(x + 2) - 108x = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 26x + 160 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 10 \\ x_2 = 16 \end{array}\right.$$

3. Kết luận: Vậy, số xe dự định phải điều là 10 xe hoặc 16 xe.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Chúng ta lựa chọn ẩn x cho giá trị cần tìm là số xe phải điều.
2. Việc thiết lập phương trình dựa trên phép so sánh khối lượng mỗi xe phải chở.
3. Lời giải được trình bày thành ba phần độc lập nhau, với mục đích minh hoạ để giúp các em học sinh hiểu được cách trình bày bài toán theo thuật toán đã được chỉ ra. Tuy nhiên, kể từ các thí dụ sau chúng ta không cần phân tách như vậy mà chỉ yêu cầu các em học sinh khi đọc phải biết mình đang ở bước nào.

Thí dụ 2: (*Bài toán về số và chữ số*): Tìm hai số biết hiệu của chúng bằng 8 và tổng các bình phương của chúng bằng 424.

Giải

Gọi số thứ nhất là x.

Với giả thiết:

- Hiệu của chúng bằng 8 nên ta có số thứ hai là $x + 8$.
- Tổng bình phương của hai số bằng 424 nên ta có phương trình:

$$x^2 + (x + 8)^2 = 424 \Leftrightarrow 2x^2 + 16x - 360 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 10 \\ x_2 = -18 \end{array}\right.$$

Vậy:

- Nếu số thứ nhất là 10 thì số thứ hai bằng 18.
- Nếu số thứ nhất là -18 thì số thứ hai bằng -10.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Cho dù bài toán yêu cầu chúng ta đi tìm hai số (điều này có thể khiến học sinh hiểu theo hướng cần hai ẩn) nhưng cần hiểu rằng, số thứ hai được xác định thông qua số thứ nhất (bởi hiệu giữa chúng bằng 8). Do đó, chúng ta lựa chọn ẩn x cho số thứ nhất và dễ thấy số thứ hai là $x + 8$.
2. Việc thiết lập phương trình là đơn giản, khi đã có được hai số cần tìm.
3. Với nhận định trong 1, bài toán có thể được giải thông qua hệ hai ẩn x, y (với x là số thứ nhất và y là số thứ hai), cụ thể:
   - Hiệu của chúng bằng 8 nên: $x - y = 8$. (1)
   - Tổng bình phương của hai số bằng 424 nên:
     $x^2 + y^2 = 424$. (2)

   Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 8 \\ x^2 + y^2 = 424 \end{cases}$.

   Học sinh tự giải bằng cách chuyển về phương trình bậc hai.

Thí dụ 3: (*Bài toán vòi nước*): Có hai vòi nước. Người ta mở vòi thứ nhất cho nước chảy đầy một bể cạn rồi khoá lại. Sau đó mở vòi thứ hai cho nước chảy ra hết với thời gian lâu hơn so với thời gian vòi một chảy là 4 giờ. Nếu cùng mở cả hai vòi thì bể đầy sau 19 giờ 15 phút. Hỏi vòi thứ nhất chảy trong bao lâu mới đầy bể khi vòi hai khoá lại.

Giải

Ta thực hiện đổi đơn vị: 19 giờ 15 phút $= 19.\dfrac{15}{60} = \dfrac{77}{4}$

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy đầy bể là x (giờ), điều kiện $x > 0$.

Suy ra, mỗi giờ vòi một chảy vào bể được: $\dfrac{1}{x}$ (bể)

Với giả thiết:

- Thời gian vòi thứ hai chảy cạn bể là: $x + 4$, suy ra mỗi giờ vòi hai chảy ra được: $\dfrac{1}{x+4}$ (bể).

- Nếu mở cả hai vòi thì sau 19 giờ 15 phút mới đầy bể, suy ra mỗi giờ cả hai vòi cùng chảy thì được: $\frac{1}{77/4} = \frac{4}{77}$ (bể).

Từ đó, ta có phương trình: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{4}{77} \Leftrightarrow 77(x+4) - 77x - 4x(x+4) = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 16x - 308 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = -11 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, sau 7 giờ thì vòi thứ nhất chảy đầy bể khi vòi hai khóa.

Chú ý: Trong bài toán trên, các em học sinh cần lưu ý:

- Vòi thứ nhất chảy để cho nước vào bể.
- Vòi thứ hai chảy để lấy nước từ bể ra.

Do đó khi lập phương trình ta phải lấy thời gian của vòi thứ nhất trừ thời gian của vòi thứ hai: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{4}{77}$

Còn trong trường hợp cả hai vòi cùng chảy vào bể thì ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{4}{77}$$

Thí dụ 4: (*Bài toán có nội dung hình học*): Tính chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật. Biết hình chữ nhật đó có chu vi bằng 340m và diện tích bằng $7200m^2$.

Giải

- Gọi chiều dài của hình chữ nhật là x (x > 0, m).
- Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là y (0 < y < x, m).

Do hình chữ nhật đó có chu vi bằng 340m và diện tích bằng $7200m^2$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x+y) = 340 \\ xy = 7200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 170 \\ xy = 7200 \end{cases}$

Theo định lí Viét, x và y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 170X + 7200 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 80 \\ X = 90 \end{array}\right..$$

Vậy, hình chữ nhật có chiều dài bằng 90 m và chiều rộng bằng 80 m.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Với hai giá trị phải tìm chúng ta lựa chọn nó cho hai ẩn tương ứng. Từ đó, cần đi thiết lập một hệ hai phương trình theo hai ẩn đó.
2. Hệ phương trình được giải nhờ hệ thức Viét.

Thí dụ 5: (*Bài toán về năng suất*): Muốn làm xong một việc cần 480 công thợ. Người ta có thể thuê một trong hai nhóm thợ A hoặc B. Biết nhóm A ít hơn nhóm B là 4 người và nếu giao cho nhóm B thì công việc hoàn thành sớm hơn 10 ngày so với nhóm A. Hỏi số người của mỗi nhóm.

Giải

Gọi số người của nhóm A là x (x > 0, người).

Suy ra, số người của nhóm B là: x + 4 (người).

Với giả thiết:

- Nếu thuê nhóm A thì thời gian hoàn thành công việc là: $\frac{480}{x}$.
- Nếu thuê nhóm B thì thời gian hoàn thành công việc là: $\frac{480}{x+4}$.
- Do nhóm B hoàn thành sớm hơn so với nhóm A là 10 ngày nên ta có phương trình: $\frac{480}{x} - 10 = \frac{480}{x+4} \Leftrightarrow 48(x+4) - x(x+4) - 48x$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x - 192 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -16 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, nhóm A có 12 người và nhóm B có 16 người.

Chú ý: Với thí dụ trên, ta có thể gọi x là số người nhóm A và y là số người nhóm B. Sau đó ta thiết lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - x = 4 \\ \dfrac{480}{y} - \dfrac{480}{x} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 16 \end{cases}.$$

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Một người đi xe máy trên quãng đường AB dài 120 km với vận tốc định trước. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc đó, người lái xe tăng vận tốc thêm 10 km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường. Biết người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

Giải

Đổi: 24 phút = $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$ (giờ).

Gọi vận tốc dự định của người đi xe máy là x (x > 0, km/h).

Suy ra, thời gian dự định để đi hết quãng đường AB là: (giờ).

Với giả thiết:

- Thời gian người đi xe máy đi hết $\frac{1}{3}$ quãng đường (tương ứng với $\frac{120}{3} = 40$ km) là: $\frac{40}{x}$ (giờ).
- $\frac{2}{3}$ quãng đường còn lại người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h nên thời gian người đi xe máy đi hết $\frac{2}{3}$ quãng đường là: $\frac{80}{x+10}$ (giờ).
- Do người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{3} = \frac{40}{x} + \frac{80}{x+10} + \frac{2}{5}$$

$\Leftrightarrow$ $120.5(x + 10) = 40.5(x + 10) + 80.5x + 2x(x + 10)$

$\Leftrightarrow$ $2x^2 + 20x + 4000 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40 \\ x = -50 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Vậy:

- Vận tốc dự định là 40 km/h và thời gian dự định là $\frac{120}{40} = 3$giờ.
- Thời gian xe lăn bánh trên đường là thời gian dự định trừ thời gian đến sớm bằng: $3 - \frac{2}{5} = 2\frac{3}{5}$ (giờ) = 2 giờ 36 phút.

Ví dụ 2. Hai bến sông A và B cách nhau 40 km. Cùng một lúc với canô đi xuôi từ A có một chiếc bè trôi từ A với vận tốc 3km/h. Sau khi đến B canô trở về bến A ngay và gặp bè khi đã trôi được 8 km. Tính vận tốc riêng của canô. Biết vận tốc của canô không thay đổi.

Giải

Một chiếc bè trôi với vận tốc 3 km/h, tức là vậy vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Gọi vận tốc riêng của canô là x (x > 0, km/h).

Từ giả thiết, suy ra:

- Vận tốc canô đi xuôi dòng là: x + 3.
- Vận tốc canô đi ngược dòng là: x – 3.

Vậy thời gian canô đi xuôi từ A đến B là: $\frac{40}{x+3}$.

Khi đi từ B trở về A, canô gặp bè đã trôi được 8 km, suy ra:

- Thời gian để bè trôi được 8 km là: $\frac{8}{3}$.
- Quãng đường từ B đến chỗ gặp bè là: 40 – 8 (km)

Vậy thời gian canô đi từ B đến chỗ gặp bè là: $\frac{32}{x-3}$

Nhận thấy rằng, canô và bè cùng khởi hành một lúc và thời gian chuyển động của hai vật đến chỗ gặp là như nhau.

Vậy ta có phương trình:

$$\frac{40}{x+3} + \frac{32}{x-3} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 120(x-3) + 96(x+3) - 8(x+3)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x^2 - 216x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 27 \end{array}\right.$$

Vậy, vận tốc thực của canô là 27 km/h.

Ví dụ 3. Một lớp học được nhà trường phát phần thưởng ba lần và chia đều cho các em học sinh. Lần thứ nhất chia hết 66 quyển vở nhưng vắng 5 em, lần thứ hai chia hết 125 quyển vở nhưng vắng 2 em còn lần thứ ba thì không vắng em nào và chia hết 216 quyển vở. Biết một học sinh có mặt cả ba lần đã nhận được số vở (trong lần ba) bằng tổng số vở đã nhận trong hai lần đầu. Tính số học sinh.

Giải

Gọi số học sinh là x (x > 0, em).

Trong lần phát phần thưởng thứ nhất:

- Số học sinh được nhận vở là: x – 5.
- Và mỗi em được nhận: $\frac{66}{x-5}$

Trong lần phát phần thưởng thứ hai:

- Số học sinh được nhận vở là: x – 2.
- Và mỗi em được nhận: $\frac{125}{x-2}$

Trong lần phát phần thưởng thứ ba:

- Số học sinh được nhận vở là: x.
- Và mỗi em được nhận: $\frac{216}{x}$.

Biết một học sinh có mặt cả ba lần đã nhận được số vở (trong lần ba) bằng tổng số vở đã nhận trong hai lần đầu nên ta có phương trình:

$$\frac{66}{x-5} + \frac{125}{x-2} = \frac{216}{x} \Leftrightarrow 66x(x-2) + 125x(x-5) - 216(x-2)(x-5)$$

$$\Leftrightarrow \quad 25x^2 - 755x + 2160 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{16}{5} \text{ (loại)} \\ x = 27 \end{array}\right.$$

Vậy, trong lớp có 27 em học sinh.

Ví dụ 4. Một tổ sản xuất theo kế hoạch phải làm được 720 sản phẩm. Nếu tăng năng xuất lên 10 sản phẩm mỗi ngày thì so với giảm năng xuất đi 20 sản phẩm mỗi ngày thời gian hoàn thành ngắn hơn 4 ngày. Tính năng xuất dự định.

Giải

Gọi năng xuất dự định là x ($x > 0$, sản phẩm/ngày).

Nếu tăng năng xuất lên 10 sản phẩm mỗi ngày thì thời gian hoàn thành công việc là: $\dfrac{720}{x+10}$.

Nếu giảm năng xuất đi 20 sản phẩm mỗi ngày thì thời gian hoàn thành công việc là: $\dfrac{720}{x-10}$.

Do thời gian chênh lệch là 4 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{720}{x+10} + 4 = \frac{720}{x-10} \Leftrightarrow 720(x-20) + 4(x+10)(x-20) - 720(x+10)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 - 40x - 22400 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 80 \\ x = -70 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, năng suất dự định là 80 sản phẩm một ngày.

Ví dụ 5. Cho một thửa ruộng hình chữ nhật, một người đi theo chiều dài hết 1 phút 5 giây, đi theo chiều rộng hết 39 giây. Người ta làm một lối đi xung quanh thửa ruộng rộng 1,5 m thì diện tích còn lại là 5529 m^2. Tính kích thước của thửa đất.

Giải

Đổi: 1 phút 5 giây = 65 giây.

Gọi chiều dài của thửa ruộng là x ($x > 0$, m).

Gọi chiều rộng của thửa ruộng là y ($y > 0$, m).

Một người đi bộ theo chiều dài hết 65 giây, theo chiều rộng hết 39 giây nên ta có tỉ số: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{65}{39} = \dfrac{5}{3}$. (1)

Người ta làm một lối đi xung quanh thửa ruộng rộng 1,5 m do đó:

- Chiều dài còn lại là: $x - 2\times1{,}5 = x - 3$.
- Chiều rộng còn lại là: $y - 2\times1.5 = y - 3$.

Biết diện tích còn lại là 5529 m^2 nên ta có phương trình:

$(x-3)(y-3) = 5529$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \\ (x-3)(y-3) = 5529 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5y}{3} & (3) \\ (x-3)(y-3) = 5529 & (4) \end{cases}$$

Thay (3) vào (4), ta được: $\left(\frac{5y}{3} - 3\right)(y - 3) = 5529 \Leftrightarrow (5y - 9)(y - 3) = 16587.$

$$\Leftrightarrow \quad 5y^2 - 24x - 16560 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 60 \\ y = -\frac{276}{5} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với $y = 60 \Rightarrow x = 100$.

Vậy, thửa ruộng có chiều rộng bằng 60 m và chiều dài bằng 100 m.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÍ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu các bước cần thực hiện khi giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai một ẩn.

Câu hỏi 2: Việc lựa chọn ẩn cho bài toán được dựa trên yếu tố gì ?

Câu hỏi 3: Một bài toán có thể được giải bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình được không ?

IV. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1: Tìm hai số biết hiệu của chúng bằng 5 và tổng các bình phương của chúng bằng 125.

Bài tập 2: Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 25 và hiệu các bình phương của chúng cũng bằng 25.

Bài tập 3: Lúc 7 giờ sáng một ôtô khởi hành từ A để đến B cách A 120 km. Sau khi đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường ôtô dừng lại 20 phút để nghỉ rồi đi chậm hơn trước 8 km/h. Ôtô đến B lúc 10 giờ. Hỏi nó nghỉ lúc mấy giờ ?

Bài tập 4: Một người đi từ A đến B rồi lại trở về A. Lúc về đi được 30 km người đó nghỉ 20 phút. Sau khi nghỉ xong, người đó đi với vận tốc nhanh hơn trước 6 km/h. Tính vận tốc lúc đi. Biết quãng đường AB dài 90 km và thời gian đi bằng thời gian về kể cả nghỉ.

Bài tập 5: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 33 km với vận tốc xác định. Khi từ B về A, người đó đi bằng đường khác dài hơn đường trước 29 km nhưng với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi 3 km/h. Tính vận tốc lúc đi. Biết thời gian về nhiều hơn thời gian đi là 1 giờ 30 phút.

Bài tập 6: Một ôtô đi từ A đến B rồi quay trở về A ngay. Sau khi ôtô đi được 15 km thì một người đi xe đạp từ B về A. Tính vận tốc mỗi xe. Biết:

- Quãng đường AB dài 24 km.
- Vận tốc ôtô nhanh hơn xe đạp 37 km.
- Ôtô quay trở về A sớm hơn xe đạp đến B là 44 phút.

Bài tập 7: Một ôtô dự định đi quãng đường AB dài 60 km. Trong một thời gian nhất định, trên nửa quãng đường AB do đường xấu nên ôtô chỉ đi với vận tốc ít hơn dự định 6 km/h. Để đến B đúng dự định, ôtô phải đi quãng đường còn lại với vận tốc nhanh hơn vận tốc dự định 10 km/h. Tính thời gian dự định đi hết quãng đường.

Bài tập 8: Một tổ lao động hoàn thành đào đắp 8000 m^3 đất trong một thời gian nhất định. Nếu mỗi ngày vượt mức 50 m^3 thì tổ lao động hoàn thành kế hoạch sớm 8 ngày. Tính thời gian dự định.

Bài tập 9: Một nông trường phải trồng 75 ha rừng với năng suất đã định từ trước. Nhưng trong thực tế, khi bắt tay vào trồng rừng thì mỗi tuần nông trường trồng thêm được 5 ha. Do vậy, họ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 1 tuần. Tính năng suất dự định của nông trường.

Bài tập 10: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m. Người ta làm một lối đi xung quanh khu vườn rộng 2 m. Diện tích còn lại là 4256. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Bài tập 11: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn nếu cả hai vòi cùng chảy một lúc thì sau 4 giờ thì đầy bể. Nếu từng vòi chảy một thì thời gian vòi I chảy nhanh hơn vòi II là 6 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể.

Bài tập 12: Hai vòi nước cùng chảy vào bể trong 6 giờ 40 phút. Nếu chảy riêng từng vòi một thì mỗi vòi phải chảy trong bao lâu mới đầy bể. Biết rằng vòi thứ hai chảy lâu hơn vòi thứ nhất 3 giờ.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Ôn tập các kiến thức trong chương theo các câu hỏi sau:

Câu hỏi 1: Cho hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$.

a. Hãy chỉ ra tập xác định của hàm số.

b. Chứng minh tính chất biến thiên của hàm số.

c. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$.

d. Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$.

e. Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$ nhận trục Oy làm trục đối xứng. Từ đó suy ra một cách vẽ khác cho đồ thị hàm số.

Câu hỏi 2: *Phương trình bậc hai một ẩn*

a. Phát biểu định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn và cho ví dụ.

b. Viết dạng phương trình bậc hai khuyết b. Nêu phương pháp giải phương trình bậc hai khuyết b và minh hoạ bằng một ví dụ.

c. Viết dạng phương trình bậc hai khuyết c. Nêu phương pháp giải phương trình bậc hai khuyết b và minh hoạ bằng một ví dụ.

d. Với phương trình bậc hai dạng đầy đủ chúng ta thường chọn cách giải nào trước và vì sao ?

e. Viết bảng tóm tắt về nghiệm của phương trình bậc hai.

f. Viết bảng tóm tắt về nghiệm của phương trình bậc hai có $b = 2b'$.

Câu hỏi 3: Hệ thức Viét

a. Phát biểu và chứng minh hệ thức Viét.

b. Nêu các ứng dụng của hệ thức Viét.

c. Hãy nêu ý tưởng của phương pháp sử dụng hệ thức Viét để nhẩm nghiệm cho phương trình bậc hai.

d. Hãy nêu thuật toán của phương pháp sử dụng hệ thức Viét để tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng.

e. Hãy nêu thuật toán của phương pháp sử dụng hệ thức Viét để tính giá trị của các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm.

f. Hãy nêu thuật toán của phương pháp sử dụng hệ thức Viét để tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số.

g. Hãy nêu thuật toán của phương pháp sử dụng hệ thức Viét để xét dấu các nghiệm của phương trình.

h. Hãy nêu thuật toán của phương pháp sử dụng hệ thức Viét để tìm điều kiện của tham số để các nghiệm của phương trình thoả mãn tính chất K.

Câu hỏi 4: Hãy nêu phương pháp sử dụng phương trình bậc hai để giải các dạng phương trình sau:

Dạng 1: Phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Dạng 2: Giải phương trình bậc ba: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Dạng 3: Giải phương trình bậc bốn bằng phương pháp phân tích.

Dạng 4: Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Dạng 5: Phương trình hồi quy:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0.$$

Dạng 6: Phương trình dạng: $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$, với $a + b = c + d$.

Dạng 7: Phương trình dạng: $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$.

Câu hỏi 5: Giải toán bằng cách lập phương trình bậc hai một ẩn.

a. Nêu các bước cần thực hiện khi giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai một ẩn.

b. Việc lựa chọn ẩn cho bài toán được dựa trên yếu tố gì ?

c. Một bài toán có thể được giải bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình được không ?

Phần 2

Hình học

CHƯƠNG I - CHU VI ĐƯỜNG TRÒN VÀ DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

Trong chương này, chúng ta sẽ thu nhận được khái niệm:

1. **Đa giác đều**
2. **Chu vi đường tròn**
3. **Diện tích hình tròn**

CHỦ ĐỀ 1

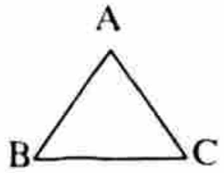
ĐA GIÁC ĐỀU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

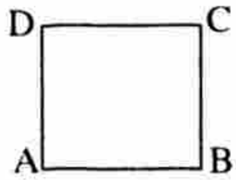
1. ĐỊNH NGHĨA

***Định nghĩa** : Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.*

Thí dụ 1: Chúng ta đã biết tam giác đều và hình vuông là một tứ giác đều.



Tam giác đều



Tứ giác đều

Chú ý: 1. Trong hình n - giác, ta có:

- Tất cả $\dfrac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.
- Tổng các góc trong bằng $(n-2).180^0$.
- Tổng các góc ngoài bằng 360^0.

2. Hình n - giác đều có số đo mỗi góc trong bằng $\dfrac{(n-2).180^0}{n}$.

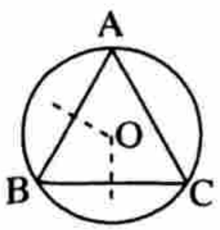
2. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP ĐA GIÁC ĐỀU

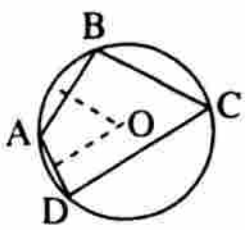
Ta có định nghĩa đường tròn ngoại tiếp đa giác như sau:

***Định nghĩa**: Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác đó và khi đó đa giác được gọi là nội tiếp đường tròn.*

Thí dụ 2: Chúng ta đã biết:

- Mọi tam giác luôn có một đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm của hai đường trung trực.

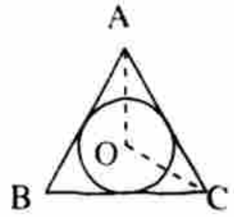




- Mọi tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180^0 luôn có một đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh kề nhau.

Ta có định nghĩa đường tròn nội tiếp đa giác như sau:

> ***Định nghĩa*** : *Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác đó và khi đó đa giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn.*



Thí dụ 3: Chúng ta đã biết mọi tam giác luôn có một đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm của hai đường phân giác.

Với đa giác đều bất kì ta luôn có:

> ***Định lí*** : *Bất kì đa giác đều nào cũng có một đường tròn ngoại tiếp và một đường tròn nội tiếp.*

Ta có:

- Tâm chung của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp một đa giác đều gọi là *tâm của đa giác đều* đó.
- Khoảng cách từ tâm của đa giác đều đến cạnh của nó gọi là *trung đoạn* (cũng là bán kính của đường tròn nội tiếp).

Thí dụ 4: Số đo mỗi góc của lục giác đều bằng bao nhiêu?

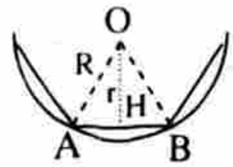
Giải

Số đo mỗi góc của lục giác đều bằng 120^0.

3. BÁN KÍNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP ĐA GIÁC ĐỀU

Gọi R, r, n và a lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp, số cạnh và độ dài mỗi cạnh.

Xét ΔOHA, ta có: $\widehat{AOB} = \dfrac{180^0}{n} \Rightarrow \widehat{AOH} = \dfrac{180^0}{2n}$.



$$R = OA = \frac{AH}{\sin\widehat{AOH}} = \frac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{n}} \Rightarrow \sin\frac{180^0}{n} = \frac{a}{2R}.$$

$$r = OH = \frac{AH}{\tan\widehat{AOH}} = \frac{a}{2\tan\dfrac{180^0}{n}} \Rightarrow \tan\frac{180^0}{n} = \frac{a}{2r}.$$

Yêu cầu: Các em học sinh hãy giải thích tại sao $\widehat{AOB} = \frac{180^0}{n}$.

Thí dụ 5: Cho đường tròn (O, R). tính theo R:

a. Cạnh của tam giác đều nội tiếp. b. Cạnh của hình vuông nội tiếp.

c. Cạnh của lục giác đều nội tiếp.

Giải

a. Ta có: $a = 2R.\sin\frac{180^0}{3} = 2R.\sin60^0 = R\sqrt{3}$.

b. Ta có: $a = 2R.\sin\frac{180^0}{4} = 2R.\sin45^0 = R\sqrt{2}$.

c. Ta có: $a = 2R.\sin\frac{180^0}{6} = 2R.\sin30^0 = R$.

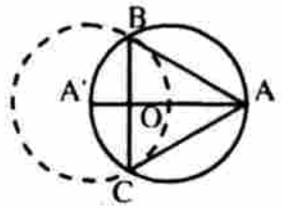
***Định lí**: Với mọi đa giác đều có cùng số cạnh, tỉ số giữa chu vi đa giác với đường kính của đường tròn ngoại tiếp không phụ thuộc độ dài của đường kính.*

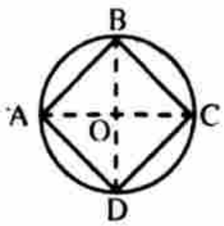
Phương pháp chứng minh định lí này được miêu tả trong phần các ví dụ minh hoạ.

4. CÁCH VẼ CÁC ĐA GIÁC ĐỀU THÔNG DỤNG BẰNG THƯỚC VÀ COMPA

a. Để vẽ ΔABC đều, nội tiếp đường tròn (O), ta thực hiện:

- Vẽ đường kính AA'.
- Vẽ đường tròn (A', A'O), cắt (O) ở B và C.

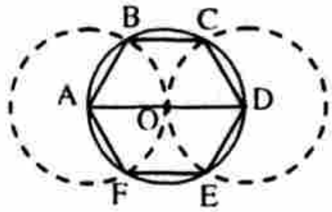




b. Để vẽ hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O), ta vẽ hai đường kính vuông góc là AC và BD.

c. Để vẽ luc giác đều ABCDEF nội tiếp đường tròn (O), ta thực hiện:

- Vẽ đường kính AD.
- Vẽ đường tròn (A; AO), cắt (O) ở B và F.
- Vẽ đường tròn (D; DO), cắt (O) ở C và E.



II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Một đường tròn có bán kính R.

a. Tính diện tích tam giác đều nội tiếp đường tròn đó theo R.

b. Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó theo R.

c. Tính diện tích lục giác đều nội tiếp đường tròn đó theo R.

Giải

a. Gọi a là độ dài cạnh tam giác đều, ta có: $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{3}} \Rightarrow a = 2R\sin60^0 = R\sqrt{3}$

Khi đó diện tích tam giác được cho bởi: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

b. Gọi a là độ dài cạnh hình vuông, ta có: $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{4}} \Rightarrow a = 2R.\sin45^0 = R\sqrt{2}$

Khi đó diện tích hình vuông được cho bởi: $S = a^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$.

c. Diện tích lục giác đều gồm 6 tam giác đều có cạnh bằng R, do đó:

$$S = 6.\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Nhận xét: Như vậy, để tính diện tích của một đa giác đều bất kì chúng ta chỉ cần xác định được độ dài của cạnh đa giác đều đó và đối với các đa giác đều chúng ta đã có được công thức liên hệ giữa cạnh với bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp.

Ví dụ 2: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O.

a. Gọi a là độ dài cạnh lục giác đều. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp lục giác.

b. Gọi M là một điểm bất kì trong ΔAOB. Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên OA, OB, CF. Chứng minh rằng năm điểm M, H, I, O, K cùng thuộc một đường tròn.

c. Chứng minh rằng ΔHIK là tam giác đều.

Giải

a. Gọi R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp lục giác đều, ta

có: $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{6}} = \dfrac{a}{2\sin30^0} = a$.

$r = \dfrac{a}{2\text{tg}\dfrac{180^0}{6}} = \dfrac{a}{2\text{tg}30^0} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b. Nhận xét rằng: $\widehat{OHM} = \widehat{OIM} = \widehat{OKM} = 90^0$

$\Rightarrow$ H, I, K thuộc đường tròn có đường kính OM

$\Rightarrow$ H, I, K, O, M cùng thuộc một đường tròn.

c. Giả sử K thuộc đoạn thẳng OF.

Xét đường tròn đi qua năm điểm H, I, K, O, M, ta có:

$\widehat{HKI} = \widehat{HOI} = 60^0$ – vì góc nội tiếp cùng chắn một cung.

Trong ΔHIK ta có: $\widehat{HIK} = \widehat{HOK} = 60^0$ nên ΔHIK là tam giác đều.

Nhận xét: 1. Trong lời giải ở câu a), ta tính được R, r dựa trên công thức đã biết, tuy nhiên cũng có thể sử dụng việc xét tam giác vuông để xác định R, r.

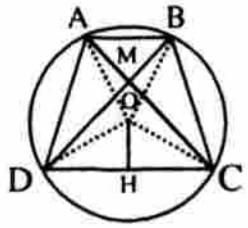
2. Nhờ chứng minh được năm điểm M, H, I, O, K cùng thuộc một đường tròn, các góc $\widehat{HKI}$ và $\widehat{HOI}$ là hai góc nội tiếp của đường tròn đó, do đó áp dụng tính chất của góc nội tiếp, ta tính được: $\widehat{HIK} = 60^0$ và $\widehat{IKH} = 60^0$.

Ví dụ 3: Trên một đường tròn bán kính R, ta lần lượt đặt theo cùng một chiều, kể từ một điểm A, một cung $\overset{\frown}{AB} = 60^0$ rồi một cung $\overset{\frown}{BC} = 90^0$ và một cung $\overset{\frown}{CD} = 120^0$.

a. Tứ giác ABCD là hình gì ?

b. Chứng minh rằng hai đường chéo của nó vuông góc với nhau.

c. Tính các cạnh và đường chéo của tứ giác ABCD theo R.



Giải

a. Ta có: $\widehat{BDC} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC} = 45^0$

$\text{sđ}\overset{\frown}{AD} = 360^0 - (60^0 + 90^0 + 120^0) = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AD} = 45^0 = \widehat{BDC} \Rightarrow AB \,//\, CD$, vì so le trong

do đó, ABCD là hình thang và hình thang nội tiếp đường tròn nên nó là hình thang cân.

b. Gọi M là giao điểm của AC và BD, vì góc $\widehat{AMD}$ là vì góc có đỉnh ở bên trong đường tròn nên: $\widehat{AMD} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{90^0 + 90^0}{2} = 90^0 \Rightarrow AC \perp BD$.

c. Ta lần lượt có nhận xét:

- ΔOAB đều nên $AB = OA = R$.
- ΔOAD vuông cân nên: $AD = OA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = BC$.

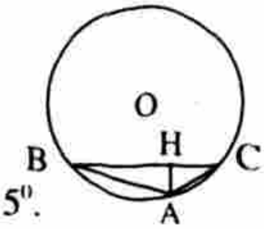
Kẻ $OH \perp CD$, ta có: $CD = 2CH = 2.\,R\sin 60^0 = 2.\,R\,.\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Tiếp theo: $BD = AC = AM + MC = AB.\sin 45^0 + CD.\sin 45^0 = \dfrac{R}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

Nhận xét: Trong lời giải của câu a) chúng ta có thể thực hiện đơn giản hơn, bằng cách: sđ $\overset{\frown}{AD}$ = sđ $\overset{\frown}{BC} = 90^0 \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow AB \,//\, CD$.

Ví dụ 4: Cho đường tròn (O, R). Cho một dây cung AB bằng cạnh hình vuông nội tiếp và một dây cung BC bằng cạnh tam giác đều nội tiếp (C và A nằm cùng phía đối với BO). Tính các cạnh của ΔABC và đường cao AH của nó theo R.

Giải



Theo giả thiết, ta có: $AB = R\sqrt{2}$, $BC = R\sqrt{3}$.

Trong đường tròn (O), ta có:

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = 120^0 - 90^0 = 30^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 15^0.$$

Trong ΔABH, ta có: $AH = AB.\sin 15^0 = R\sqrt{2}.0{,}2588 \approx 0{,}37R$.

Vì ΔAHC vuông cân: $AC = AH\sqrt{2} = 2R.\,0{,}2588 \approx 0{,}52R$.

Nhận xét: Ví dụ trên thuộc dạng toán tính toán đơn giản. Tuy nhiên, để thực hiện được nó các em học sinh cần nhớ được công thức tính độ dài của tam giác đều và tứ giác đều nội tiếp trong đường tròn (O, R).

Ví dụ 5: Chứng minh rằng đối với tất cả các đa giác đều có cùng số cạnh, tỉ số giữa chu vi đa giác với đường kính của đường tròn ngoại tiếp không phụ thuộc độ dài của đường kính.

Giải

Xét hai đa giác đều có cùng n cạnh. Gọi a và a' là cạnh các đa giác đều trên, gọi p và p' là chu vi của các đa giác ấy, R và R' là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các đa giác trên. Ta có : p = n. a, p' = n. a'.

Ta cần chứng minh : $\dfrac{p}{2R} = \dfrac{p'}{2R'}$.

Ta có: $a = R.2\sin\dfrac{180^0}{n} \Rightarrow \dfrac{p}{2R} = \dfrac{n.R.2\sin\dfrac{180^0}{n}}{2R} = n.\sin\dfrac{180^0}{n}$

$$a' = R'.2\sin\frac{180^0}{n} \Rightarrow \frac{p'}{2R'} = \frac{n.R'.2\sin\frac{180^0}{n}}{2R'} = n.\sin\frac{180^0}{n}$$

Vậy, ta luôn có: $\dfrac{p}{2R} = \dfrac{p'}{2R'}$, đpcm.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa đa giác đều. Cho ví dụ về đa giác đều và vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 2: Phát biểu định nghĩa đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp đa giác. Cho ví dụ và vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 3: Nêu cách xác định tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp một đa giác đều.

Câu hỏi 4: Chứng minh rằng bất kì đa giác đều nào cũng có một đường tròn ngoại tiếp và một đường tròn nội tiếp.

Câu hỏi 5: Chứng minh rằng với mọi đa giác đều có cùng số cạnh, tỉ số giữa chu vi đa giác với đường kính của đường tròn ngoại tiếp không phụ thuộc độ dài của đường kính.

Câu hỏi 6: Viết và chứng minh công thức tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp đa giác đều.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Một đa giác đều nội tiếp đường tròn (O, R). Biết độ dài mỗi cạnh của nó là $R\sqrt{2}$. Hỏi đa giác đó là hình gì ?

Bài tập 2. Cho lục giác đều ABCDEF cạnh a. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, và chúng cắt đường thẳng EF theo thứ tự tại N và P.

a. Chứng minh rằng ΔMNP là tam giác đều.

b. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMNP.

Bài tập 3. Cho ngũ giác đều ABCDE. Hai đường chéo AC và AD cắt BE lần lượt tại M và N.

a. Tính tỉ số giữa các bán kính của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều đó.

b. Chứng minh rằng các tam giác ΔAMN và ΔCMB là tam giác cân.

c. Chứng minh rằng AB . BC = BM . AC.

Bài tập 4. Cho tam giác đều nội tiếp đường tròn (O) có cạnh 3cm.

a. Tính bán kính của đường tròn (O).

b. Tính cạnh lục giác đều ngoại tiếp đường tròn (O).

Bài tập 5. Cho ΔABC đều, nội tiếp đường tròn (O, R). Gọi D, E, F theo thứ tự là điểm chính giữa các cung AB, BC, CA.

a. Chứng minh rằng ADBECF là lục giác đều.

b. Tính diện tích ΔABC và diện tích lục giác đều nói trên theo R.

V. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Gọi a, n theo thứ tự là số đỉnh, độ dài cạnh của đa giác đều đó, ta có:

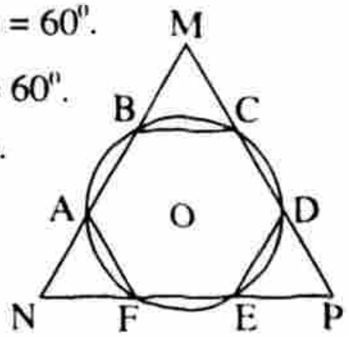
$$a = R\sqrt{2}\ ;\ \sin\frac{180^0}{n} = \frac{a}{2R} = \frac{R\sqrt{2}}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^0 \Rightarrow \frac{180^0}{n} = 45^0 \Leftrightarrow n = 4.$$

Vậy đa giác cần tìm là tứ giác đều (hình vuông).

Bài tập 2.

a. Hình lục giác đều có số đo mỗi góc trong bằng: $\dfrac{(6-2).180^0}{6} = 120^0$.

suy ra, số đo mỗi góc ngoài bằng: $180^0 - 120^0 = 60^0$.



Xét ΔMBC, ta có ngay: $\widehat{BMC} = n\ 180^0 - (\widehat{MBC} + \widehat{MCB}) = 60^0$.

Xét ΔAFN, ta có ngay: $\widehat{ANF} = 180^0 - (\widehat{NAF} + \widehat{NFA}) = 60^0$.

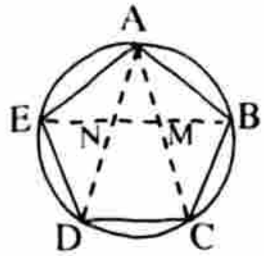
Vậy, ΔMNP có hai goác bằng 60^0 nên nó là tam giác đều.

b. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMNP, ta có:

$$R = \frac{MN}{2\sin\frac{180^0}{3}} = \frac{3a}{2\sin 60^0} = a\sqrt{3}.$$

Bài tập 3.

a. Gọi a, R, r theo thứ tự là độ dài mỗi cạnh, bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp ABCDE, ta có:



$$R = \frac{a}{2\sin 36^0} \text{ và } r = \frac{a}{2tg36^0} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\frac{a}{2tg36^0}}{\frac{a}{2\sin 36^0}} = \frac{\sin 36^0}{tg36^0} \approx \frac{4}{5}.$$

b. Vì ABCDE là ngũ giác đều nên: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EA}$.

Trong ΔAMN, ta có: $\widehat{AMN} = \frac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{EA} + sđ\overset{\frown}{BC}) = \frac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{AB} + sđ\overset{\frown}{DE}) = \widehat{ANM}$

$\Leftrightarrow$ ΔAMN cân tại A.

Trong ΔCMB, ta có: $\widehat{BMC} = \frac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{BC} + sđ\overset{\frown}{EA}) = \frac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{CD} + sđ\overset{\frown}{DE}) = \widehat{MBC}$

$\Leftrightarrow$ ΔCMB cân tại B.

c. Nhận xét rằng: $\Delta ABC \sim \Delta AMB \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{MB} \Leftrightarrow BM . AC = AB . BC$, đpcm.

CHỦ ĐỀ 2

CHU VI ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. SỐ π

Tỉ số giữa độ dài đường tròn và đường kính của nó là một số không đổi, kí hiệu là π.

Như vậy nếu dùng kí hiệu C là độ dài của đường tròn, ta có: $\frac{C}{2R} = \pi \approx 3,1416$.

2. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN

Đường tròn có bán kính R có độ dài được xác định bằng công thức: $C = 2\pi R$.

Thí dụ 1: Tính độ dài của đường tròn, biết:

a. Có bán kính bằng 6cm. b. Có đường kính bằng 8cm.

c. Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều có cạnh bằng $2\sqrt{3}$ cm.

Giải

a. Với giả thiết, ta có: $R = 6cm \Rightarrow C = 2\pi R = 2\pi.6 = 12\pi$ cm.

b. Với giả thiết, ta có: $2R = 8cm \Leftrightarrow R = 4cm \Rightarrow C = 2\pi R = 2\pi.4 = 8\pi$ cm.

c. Với giả thiết, ta có: $R = \frac{2\sqrt{3}}{2\sin 60^0} = 2cm \Rightarrow C = 2\pi R = 2\pi.2 = 4\pi$ cm.

3. ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Độ dài cung tròn 1^0 của đường tròn bán kính R là : $\ell = \frac{\pi R}{180}$.

Độ dài của cung tròn n^0 của đường tròn bán kính R là : $\ell = \frac{\pi Rn}{180}$.

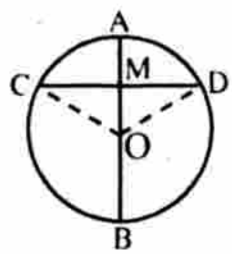
Thí dụ 2: Vĩ độ của Hà Nội là $21^0 03'$. Giả thiết đường kinh tuyến là đường tròn và có độ dài 40000km. Tìm độ dài cung tròn có chu vi 40000km.

Giải

Ta có ngay: $l = \frac{40\,000.21^0 03'}{360^0} \approx 2340\,\text{km}$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ dây CD vuông góc với AB tại M. Giả sử AM = 1cm, $CD = 2\sqrt{3}$cm. Tính:



a. Độ dài đường tròn.

b. Độ dài của cung CAD.

Giải

a. Từ giả thiết ta có $AB \perp CD$ nên: $MC = MD = \sqrt{3}$ cm.

$\widehat{ACB} = 90^0$ – vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

Trong tam giác vuông ΔCAB, áp dụng hệ thức $h^2 = b'c'$, ta được:

$$CM^2 = MA \cdot MB \Rightarrow MB = \frac{CM^2}{MA} = \frac{(\sqrt{2})^2}{1} = 3\text{cm}.$$

Khi đó: $AB = AM + MB = 1 + 3 = 4$ cm $\Rightarrow R = 2$ cm.

Độ dài đường tròn là : $C = 2\pi R = 4\pi$ cm.

b. Ta có: $OA = 2$cm, $MA = 1$cm $\Rightarrow MA = MO$.

Từ giả thiết: $CM \perp OA \Rightarrow CA = CO$ và $OC = OA$

$\Rightarrow CA = OC = OA \Rightarrow \Delta OAC$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^0$, do đó $\widehat{DOC} = 120^0$.

Độ dài của cung CAD là $\ell = \frac{\pi Rn}{180} = \frac{\pi.2.120}{180} = \frac{4\pi}{3}$ cm.

Nhận xét: 1. Trong câu a), để tính được độ dài đường tròn chúng ta cần đi tìm bán kính R dựa trên việc tính độ dài của đường kính AB. Tuy nhiên, ta cũng có thể tính được R bằng cách:

Trong tam giác vuông ΔOMC, ta có:

$$OC^2 = OM^2 + MC^2 = (OA - AM)^2 + MC^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = (R-1)^2 + (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow R = 2\text{cm}.$$

2. Trong câu b), với yêu cầu "*Tính độ dài của cung CAD*", chúng ta cần thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Tính số đo của cung CAD, tức là tính $\widehat{COA}$.

Bước 2: Sử dụng công thức tính độ dài cung.

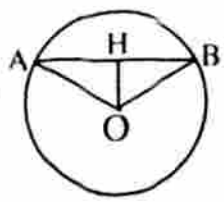
Ví dụ 2: Cho đường tròn (O), dây AB = 9cm có khoảng cách đến tâm bằng một nửa bán kính của đường tròn.

a. Tính chu vi đường tròn. b. Tính độ dài cung AB (cung nhỏ).

Giải

a. Kẻ $OH \perp AB$, khi đó trong tam giác vuông ΔOHB, ta có:

$$OH = \frac{OB}{2} \Rightarrow \widehat{OBH} = 30^0 \text{ và } \widehat{BOH} = 60^0.$$



$$OB = \frac{HB}{\sin 60^0} = \frac{4,5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}\text{cm}.$$

Chu vi đường tròn: $C = 2\pi.3\sqrt{3} = 6\pi\sqrt{3}$cm.

b. Ta có: $\widehat{AOB} = 120^0 \Rightarrow \text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = 120^0$.

Khi đó, độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi: $l_{AB} = 6\pi\sqrt{3}.\frac{1}{3} = 2\pi\sqrt{3}$cm.

Nhận xét: 1. Để tính chu vi đường tròn hoặc độ dài cung tròn, bao giờ ta cũng phải tính bán kính của nó. Bán kính này là cạnh huyền OB của tam giác vuông OHB. Tam giác đó có cạnh góc vuông OH bằng một nửa cạnh huyền. Hãy nhớ lại: nếu một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng một nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó bằng 30^0. Có thể chứng minh trực tiếp điều này vào bài toán : $\sin B = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 30^0$.

Trong lời giải câu b, ta tính trực tiếp độ dài cung AB, đó là $\dfrac{1}{3}$ chu vi đường tròn (vì AOB = 120^0). Nếu áp dụng công thức tính độ dài cung 120^0 ta có: $\dfrac{\pi R.120}{180} = \dfrac{\pi 3\sqrt{3}.120}{180} = 2\pi\sqrt{3}$ cm

Ví dụ 3: Cho hai đường tròn có bán kính R = 1km và R' = 1m. Nếu độ dài của mỗi đường tròn ấy đều tăng thêm 1m thì bán kính của mỗi đường tròn tăng thêm bao nhiêu? Giải thích.

Giải

Xét đường tròn bán kính R, gọi chu vi của nó là C.

Sau khi chu vi tăng 1m, bán kính lúc sau R_1 , chu vi lúc sau là C_1 (ta có ngay $C_1 - C = 1$). Cần tính $R_1 - R$.

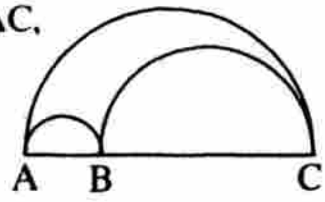
Ta có: $R = \dfrac{C}{2\pi}$, $R_1 = \dfrac{C_1}{2\pi}$ nên: $R_1 - R = \dfrac{C_1}{2\pi} - \dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{C_1 - C}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}$ m.

Vậy, chu vi tăng 1m thì bán kính đường tròn tăng $\dfrac{1}{2\pi}$ m.

Nhận xét: Như vậy, để thực hiện được yêu cầu của bài toán chúng ta đã tìm cách thiết lập được mối liên hệ giữa R_1 và R thông qua các giá trị tương ứng C_1 và C.

Ví dụ 4: Cho ba điểm A, B, C liên tiếp trên một đường thẳng. Chứng minh rằng độ dài của nửa đường tròn có đường kính AC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn có đường kính AB và BC.

Giải



Gọi độ dài các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự AC, AB, BC là l_1, l_2, l_3, ta có:

$$l_1 = \frac{1}{2}\pi.AC,\ l_2 = \frac{1}{2}\pi.AB,\ l_3 = \frac{1}{2}\pi.BC.$$

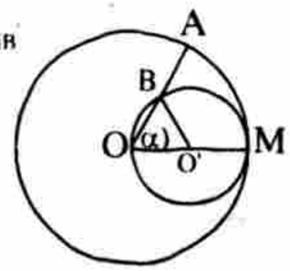
Nhận xét rằng: $l_2 + l_3 = = \dfrac{1}{2}\pi.AB + \dfrac{1}{2}\pi.BC = \dfrac{1}{2}\pi(AB + BC) = \dfrac{1}{2}\pi.AC = l_1$.

Nhận xét: 1. Người ta có thể phát biểu bài toán trên theo chiều ngược lại, như sau " *Cho ba điểm A, B, C. Biết rằng độ dài đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài hai đường tròn đường kính AB và BC. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng và điểm B nằm giữa A và C*".

2. Từ đó, ta có kết quả tổng quát: $C_{(AC)} \le C_{(AB)} + C_{(BC)}$.

Ví dụ 5: Trong một đường tròn (O) lấy một bán kính OM. Vẽ đường tròn (O') có đường kính OM. Một bán kính OA của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') ở B. Chứng minh rằng hai cung MA và MB dài bằng nhau.

Giải



Đặt $\widehat{BOM} = \alpha$ thì $\widehat{BO'M} = 2\alpha$. Cần chứng minh $l_{MA} = l_{MB}$

Áp dụng công thức tính độ dài cung $l = \dfrac{\pi Rn}{180}$, ta có:

$$l_{MA} = \frac{\pi.2O'M.\alpha}{180},\ l_{MB} = \frac{\pi.O'M.2\alpha}{180}.$$

Vậy, ta được $l_{MA} = l_{MB}$, đpcm.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa số Pi.

Câu hỏi 2: Viết công thức tính độ dài đường tròn có bán kính bằng R.

Câu hỏi 3: Viết công thức tính độ dài cung 1^0 và cung n^0.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Một tam giác đều và một hình vuông cùng có chu vi là 72cm. Hỏi độ dài đường tròn ngoại tiếp hình nào lớn hơn? Lớn hơn bao nhiêu?

Bài tập 2. Cho đoạn thẳng AD = 12cm. Các điểm B, C thuộc đoan thẳng AD sao cho AB = CD. Vẽ các đường tròn có đường kính theo thứ tự là AD và BC. Biết chu vi đường tròn lớn bằng ba lần chu vi đường tròn nhỏ. Tính chu vi của đường tròn nhỏ.

Bài tập 3. Cho hai đường tròn (O, R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại B, cắt đường tròn (O') tại C. Chứng minh rằng nếu $R' = \dfrac{1}{2}R$ thì độ dài của cung AC bằng nửa độ dài của cung AB (chỉ xét các cung AC, AB nhỏ hơn nửa đường tròn).

Bài tập 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Cung AD có tâm B bán kính 2R, cung BE có tâm A bán kính 2R, cung DE có tâm C bán kính CD.

a. Chứng minh rằng hai cung AC và AD dài bằng nhau.

b. Tính độ dài của đường cong ADEB do ba cung AD, DE, EB chắp nối thành.

Bài tập 5. Cho ΔABC vuông ở A, $\widehat{C} = 30^0$ và AB = 4cm. Vẽ đường cao AH. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

a. Chứng minh rằng tứ giác AMHN nội tiếp được.

b. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMHN.

Bài tập 6. Cho hình vuông ABCD có AC = 4cm. Ở phía ngoài hình vuông, vẽ các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, BC, CD, DA. Bốn nửa đường tròn đó tạo thành hình hoa bốn cánh. Tính chu vi của hình hoa ấy.

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Gọi a_1, a_2 theo thứ tự là độ dài cạnh của tam giác đều và hình vuông, suy ra: $3a_1 = 72 \Leftrightarrow a_1 = 24cm.$; $4a_2 = 72 \Leftrightarrow a_2 = 18cm.$

Gọi R_1, R_2 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều và hình vuông, suy ra:

$$R_1 = \frac{a_1}{2\sin\frac{180^0}{3}} = \frac{24}{2\sin 60^0} = 8\sqrt{3}\text{ cm} \Rightarrow C_1 = 2\pi R_1 = 16\pi\sqrt{3} \approx 87.06\text{cm}.$$

$$R_2 = \frac{a_2}{2\sin\frac{180^0}{4}} = \frac{18}{2\sin 45^0} = 9\sqrt{2}\text{ cm} \Rightarrow C_2 = 2\pi R_1 = 18\pi\sqrt{2} \approx 79.97\text{cm}.$$

Từ đó, ta thấy $C_1 > C_2$ và $C_1 - C_2 \approx 7.08$cm.

CHỦ ĐỀ 3 DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHÁI NIỆM DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

Định nghĩa: *Lấy một đa giác đều tuỳ ý nội tiếp một đường tròn rồi gấp đôi mãi số cạnh của nó sao cho các đa giác liên tiếp thu được đều là đa giác đều thì diện tích đa giác đều sẽ tăng lên và ngày càng gần một giá trị xác định (không phụ thuộc đa giác đều chọn ban đầu), giá trị đó gọi là diện tích hình tròn.*

2. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

Diện tích hình tròn bán kính R là: $S = \pi R^2$.

Thí dụ 1: Tính diện tích hình tròn, biết:

a. Bán kính bằng 8cm.

b. Đường kính bằng 12cm.

c. Chu vi của đường tròn đó bằng 18π.

Giải

a. Với giả thiết, ta có: $R = 8cm \Rightarrow S = \pi.8^2 = 64\pi\ cm^2$.

b. Với giả thiết, ta có: $2R = 8cm \Leftrightarrow R = 4cm \Rightarrow S = \pi.4^2 = 16\pi\ cm^2$.

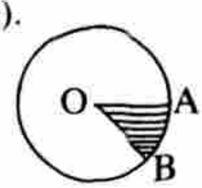
c. Với giả thiết, ta có: $2\pi R = 18\pi \Leftrightarrow R = 9cm \Rightarrow S = \pi.9^2 = 81\pi\ cm^2$.

3. DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN

Trước tiên ta có định nghĩa:

> ***Định nghĩa**: Hình quạt tròn là một phần hình tròn bao gồm giữa một cung tròn và hai bán kính qua hai đầu mút của cung đó.*

Trong hình minh hoạ bên, ta có hình quạt tròn AOB (hình gạch kẻ).



Diện tích hình quạt n^0 bán kính R được cho bởi: $S_{quạt} = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$.

Thí dụ 2: Tính diện tích hình quạt tròn có bán kính bằng 6cm và góc ở tâm tương ứng là 36^0.

Giải Ta có ngay: $S_{quạt} = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi.6^2.36}{360} \approx 11.3\ cm^2$.

4. DIỆN TÍCH HÌNH VIÊN PHÂN

Trước tiên ta có định nghĩa:

> ***Định nghĩa**: Hình viên phân là một phần hình tròn bao gồm giữa một cung tròn và dây trương cung đó.*

Trong hình minh hoạ bên, ta có hình viên phân AmB (hình gạch kẻ).

Diện tích hình viên phân AmB được cho bởi:

$$S_{AmB} = S_{quạt\ AOB} - S_{\Delta AOB}.$$

Thí dụ 3: Tính diện tích hình viên phân AmB (hình trên), biết $\widehat{AOB} = 60^0$ và bán kính đường tròn bằng 8cm.

Giải

Ta có ngay: $S_{AmB} = S_{quạt\ AOB} - S_{\Delta AOB} = \dfrac{\pi.8^2.60}{360} - \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} \approx 5.79\ cm^2$.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Hình chữ nhật ABCD có $AB = 2\sqrt{3}cm$, BC = 2cm. Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp hình chữ nhật này.

a. Tính diện tích hình tròn (O).

b. Tính tổng diện tích của bốn hình viên phân.

c. Tính diện tích hình viên phân do dây BC tạo với cung nhỏ BC.

Giải

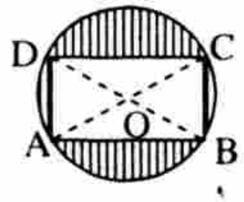
a. Tâm O của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật là giao điểm của hai đường chéo. Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông ABC ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 16 \Rightarrow AC = 4(CM),\ r = 2CM.$$

Diện tích hình tròn tâm O là : $S = \pi R^2 = \pi.2^2 = 4\pi(cm^2)$.

b. Diện tích hình chữ nhật ABCD là: $S_1 = AB.BC = 2\sqrt{3}.2 = 4\sqrt{3}(cm^2)$.

Tổng diện tích bốn hình viên phân là:



$$S_2 = S - S_1 = 4\pi - 4\sqrt{3} = \pi(\pi - \sqrt{3}).$$

c. ΔBOC có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều.

Vậy $BOC = 60^0$.

Diện tích hình quạt OBC là: $S_3 = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi.2^2.60}{360} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Diện tích tam giác đều OBC là: $S_4 = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}.2.\dfrac{2.\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,cm^2$

Vậy diện tích hình viên phân cần tìm là: $S_5 = S_3 - S_4 = \dfrac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = \dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}cm^2$

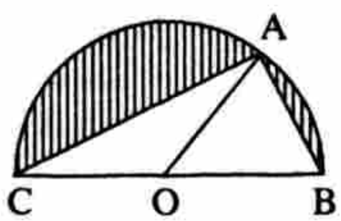
Nhận xét: Ở câu b) và câu c) ta đã dùng tính chất sau để giải:
" *Nếu hình H được chia thành hai hình H_1 và H_2 thì diện tích H = diện tích H_1 + diện tích H_2* ".
Suy ra diện tích H_1 = diện tích H - diện tích H_2.

Ví dụ 2: Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 10m, \widehat{B} = 60^0$. Vẽ nửa đường tròn (O) đường kính BC và đi qua điểm A. Tính tổng diện tích hai hình viên phân ứng với cung AB và cung AC.

Giải

Tổng diện tích hai hình viên phân bằng diện tích nửa hình tròn trừ đi diện tích ΔABC.

Diện tích nửa hình tròn: $\dfrac{\pi.OB^2}{2} = \dfrac{\pi.100}{2} = 50\pi\,m^2$.



Với ΔABC, ta có: $AC = AB.\tan 60^0 = 10\sqrt{3}\,m$.

$$BC = 2AB = 20\ m$$

$$S_{ABC}\frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.10.10\sqrt{3} = 50\sqrt{3}\,m^2.$$

Tổng diện tích hai hình viên phân: $50\pi - 50\sqrt{3} = 50(\pi - \sqrt{3})\ m^2$

Nhân xét: Có thể giải bằng cách tính diện tích của từng viên phân:

Trong ΔAOB cân có $\hat{B} = 60^0$ nên là tam giác đều.

$$S_{quạt AOB} = \frac{\pi.OA^2}{6} = \frac{\pi.100}{6} = \frac{50}{3}\pi m^2.$$

$$S_{AOB} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{100.\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}\, m^2$$

$$S_{viên\ phân} AB = \frac{50}{3}\pi - 25\sqrt{3}\, m^2$$

$$S_{quạt AOC} = \frac{\pi.OA^2}{3} = \frac{\pi.100}{3} = \frac{100}{3}\pi m^2$$

$$S_{AOC} = \frac{OC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{100.\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}\, m^2$$

$$S_{viên\ phân} = \frac{100}{3}p - 25\sqrt{3}\, m^2$$

Tổng diện tích hai hình viên phân:

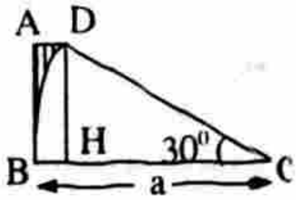
$$\left(\frac{50}{3}\pi - 25\sqrt{3}\right) + \left(\frac{100}{3}\pi - 25\sqrt{3}\right) = 50\pi - 50\sqrt{3}$$

$$= 50(\pi - \sqrt{3})\, m^2$$

Cách 2 không gọn bằng cách 1.

Ví dụ 3: Tính diện tích của phần gạch sọc trên hình.

Giải



Diện tích phải tìm bằng hiệu của diện tích hình thang vuông ABCD và hình quạt 30^0.

Kẻ $DH \perp BC$, ta được: $DH = CD\sin 30^0 = \frac{a}{2}$,

$$HC = CD\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AD = BH = BC - HC = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Khi đó: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(a + a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

$$S_{quạt} = \frac{\pi a^2}{12}.$$

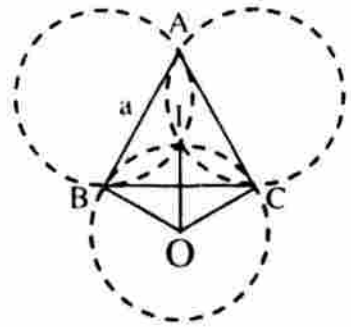
Diện tích phải tìm: $S = S_{ABCD} - S_{quạt}$

$$= \frac{a^2}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi a^2}{12} = \frac{a^2}{24}(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi) \approx 0,025a^2.$$

Ví dụ 4: Trong một tam giác đều, vẽ những cung tròn đi qua tâm của tam giác và từng cặp đỉnh của nó. Biết cạnh tam giác bằng a. Tính diện tích hình hoa thị gạch sọc.

Giải

Diện tích phải tìm là tổng diện tích của 6 hình viên phân nhỏ, mỗi viên phân có bán kính R, ứng với góc 60^0.



Diện tích của mỗi viên phân nhỏ tính theo R:

$$S_{\text{quạt OIC}} - S_{OIC} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Diện tích phải tìm tính theo R:

$$S = 6.\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{R^2}{2}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Ta tính R theo a bằng cách xét ΔOAC vuông: $R = a.tg30^0 = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow R^2 = \frac{a^2}{3}$.

Do đó diện tích phải tìm: $S = \frac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

III. CÂU HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Câu hỏi 1: Nêu khái niệm diện tích hình tròn. Viết công thức tính diện tích hình tròn và chứng minh công thức đó.

Câu hỏi 2: Phát biểu định nghĩa hình quạt tròn. Viết công thức tính diện tích hình quạt tròn và chứng minh công thức đó.

Câu hỏi 3: Phát biểu định nghĩa hình viên phân. Viết công thức tính diện tích hình viên phân và chứng minh công thức đó.

IV. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Một hình vuông và một hình tròn có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn ?

Bài tập 2. Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O; 6cm). Tính diện tích viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC.

Bài tập 3. Hình vành khăn là phần hình tròn bao gồm giữa hai đường tròn đồng tâm. Tính diện tích hình vành khăn tạo thành bởi đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác đều có cạnh 6cm.

Bài tập 4. Một đường tròn có độ dài là 72cm. Tính diện tích hình viên phân tạo thành bởi một cạnh của tam giác đều nội tiếp và cung nhỏ bị trương.

Bài tập 5. Cho đường tròn (O; 2cm), một điểm M có $MO = 2\sqrt{2}$cm. Qua M vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là tiếp tuyến điểm). Tính diện tích giới hạn bởi các đoạn thẳng MA, MB và cung nhỏ AB.

Bài tập 6. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R, C là điểm chính giữa của cung AB. Vẽ cung AB có tâm C bán kính CA. Tính diện tích hình trăng giới hạn bởi cung AB của đường tròn (C) và cung AB không chứa C của đường tròn (O).

V. HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Gọi C là độ dài chu vi của hình vuông và hình tròn.

Gọi a là độ dài cạnh hình vuông, suy ra:

$$C = 4a \Leftrightarrow a = \frac{C}{4} \Rightarrow S_{hv} = a^2 = \frac{C^2}{16}.$$

Gọi R là bán kính của hình tròn, suy ra:

$$C = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{C}{2\pi} \Rightarrow S_{htr} = \pi.R^2 = \pi.\frac{C^2}{4\pi^2} = \frac{C^2}{4\pi} > \frac{C^2}{16}.$$

Vậy, hình tròn có diện tích lớn hơn hình vuông.

Bài tập 2. *Hướng dẫn:*

Ta có ngay: $S_{BmC} = S_{quạtBOC} - S_{\Delta BOC}$.

Bài tập 3. Gọi R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều, ta có:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{3}} = \frac{6}{2\sin 60^0} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \quad S_{ngoại\ tiếp} = \pi R^2 = \pi.(2\sqrt{3})^2 = 12\pi \text{ cm}^2.$$

$$r = \frac{a}{2tg\frac{180^0}{3}} = \frac{6}{2tg60^0} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \quad S_{nội-tiếp} = \pi r^2 = \pi.(\sqrt{3})^2 = 3\pi \text{ cm}^2.$$

Khi đó, hình vành khăn có diện tích:

$$S = S_{ngoại-tiếp} - S_{nội-tiếp} = 12\pi - 3\pi = 9\pi \text{ cm}^2.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. CÁC HỎI ÔN TẬP LÝ THUYẾT

Ôn tập các kiến thức trong chương theo các câu hỏi sau:

Câu hỏi 1: Phát biểu định nghĩa đa giác đều. Cho ví dụ về đa giác đều và vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 2: Phát biểu định nghĩa đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp đa giác. Cho ví dụ và vẽ hình minh hoạ.

Câu hỏi 3: Nêu cách xác định tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp một đa giác đều.

Câu hỏi 4: Chứng minh rằng bất kì đa giác đều nào cũng có một đường tròn ngoại tiếp và một đường tròn nội tiếp.

Câu hỏi 5: Chứng minh rằng với mọi đa giác đều có cùng số cạnh, tỉ số giữa chu vi đa giác với đường kính của đường tròn ngoại tiếp không phụ thuộc độ dài của đường kính.

Câu hỏi 6: Viết và chứng minh công thức tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp đa giác đều.

Câu hỏi 7: Phát biểu định nghĩa số Pi.

Câu hỏi 8: Viết công thức tính độ dài đường tròn có bán kính bằng R.

Câu hỏi 9: Viết công thức tính độ dài cung 1^0 và cung n^0.

Câu hỏi 10: Nêu khái niệm diện tích hình tròn. Viết công thức tính diện tích hình tròn và chứng minh công thức đó.

Câu hỏi 11: Phát biểu định nghĩa hình quạt tròn. Viết công thức tính diện tích hình quạt tròn và chứng minh công thức đó.

Câu hỏi 12: Phát biểu định nghĩa hình viên phân. Viết công thức tính diện tích hình viên phân và chứng minh công thức đó.

II. BÀI TẬP ÔN TẬP

Bài tập 1. Cho đường tròn O, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau.

a. Chứng minh rằng tứ giác ACBD là hình vuông.

b. Vẽ đường tròn nội tiếp hình vuông ACBD. Tính các tỉ số giữa các chu vi, giữa các diện tích của hai hình tròn.

Bài tập 2. Cho một hình vuông cạnh a và một hình tròn có cùng chu vi với hình vuông.

a. Tính diện tích hình tròn.

b. Trong hai hình trên, hình nào có diện tích lớn hơn?

Bài tập 3. Cho bốn điểm A, C, D, B theo thứ tự đó và AC = DB trên một đường thẳng. Vẽ về một phía đối với AB ba nửa đường tròn có đường kính AB, AC, DBA. Về phía kia vẽ nửa đường tròn có đường kính CD. Chứng minh rằng diện tích giới hạn bởi bốn nửa đường tròn trên bằng diện tích của hình tròn có đường kính AD.

Bài tập 4. Cho đường tròn tâm O, vẽ hai dây AC và BD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Chứng minh rằng:

a. Tứ giác ABCD là hình thang cân.

b. Tổng diện tích hai hình quạt AOB và COD bằng tổng diện tích hai hình quạt AOD và BOC (các hình quạt ứng với các cung nhỏ).

Bài tập 5. Cho nửa đường tròn đường kính BC = 5cm và dây BA = 4cm. Vẽ ra phía ngoài của ΔABC các nửa đường tròn đường kính AB và AC.

a. Tính diện tích ΔABC.

b. Tính chu vi đường tròn và diện tích của nửa hình tròn đó.

c. Tính tổng diện tích hai hình viên phân.

Bài tập 6. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O, R) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn.

a. Chứng minh rằng tứ giác ABOC nội tiếp được trong một đường tròn (gọi tâm của nó là O')

b. Giả sử hình quạt BOC ứng với cung nhỏ BC của đường tròn (O) có diện tích là $\dfrac{\pi R^2}{3}$, chứng minh rằng hai hình tròn (O) và (O') có chu vi bằng nhau.

c. Tính diện tích hình tạo bởi hai đoạn thẳng AB, AC và cung nhỏ BC của đường tròn (O).

Bài tập 7. Cho ΔABC có BC = 6cm, $\widehat{A} = 45^0$ và nội tiếp đường (O).

a. Tính diện tích hình tròn (O).

b. Tính diện tích hình viên phân BC (ứng với cung nhỏ BC).

c. Xác định vị trí của điểm A để diện tích tam giác ABC lớn nhất. Tính diện tích đó.

Bài tập 8. Hai đường tròn (O; 3R) và (O'; R) tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC (B $\in$ (O), C $\in$ (O')).

a. Tính số đo góc O'ÔB.

b. Tính độ dài BC.

c. Tính diện tích hình giới hạn bởi tiếp tuyến BC và các cung AB, AC của hai đường tròn.

Bài tập 9. Cho ΔABC đều ngoại tiếp đường tròn (O, R). Gọi D, E là các tiếp điểm trên AB, AC. Tia OA cắt đường tròn (O) ở I.

a. Chứng minh rằng ADOE là tứ giác nội tiếp.

b. Chứng minh rằng I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADOE.

c. Tính độ dài cung nhỏ DE của đường tròn (O).

d. Tính diện tích hình giới hạn bởi các đoạn thẳng AD, AE và cung nhỏ DE nói trên.

Bài tập 10. Cho lục giác đều ABCDEF cạnh a ngoại tiếp đường tròn (O). Các tiếp điểm trên AB, CD, EF thứ tự là H, I, K.

a. Tính diện tích lục giác.

b. Tính độ dài các cạnh của ΔHIK.

c. Tính chu vi của đường tròn (O).

d. Tính diện tích phần mặt phẳng nằm trong lục giác nhưng nằm ngoài đường tròn (O).

Bài tập 11. Cho hình vuông ABCD cạnh 2a. Gọi O là giao điểm hai đường chéo hình vuông. Vẽ trong hình vuông bốn nửa đường tròn có đường kính là mỗi cạnh của hình vuông.

a. Chứng minh rằng các nửa đường tròn đó đều đi qua điểm O.

b. Bốn nửa đường tròn nói trên làm thành hình hoa bốn cánh. Tính chu vi của hình hoa bốn cánh đó.

c. Tính diện tích hình giới hạn bởi nửa đường tròn có đường kính AB và các đoạn thẳng OA, OB.

d. Tính diện tích hoa bốn cánh nói trên.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : (04) 9 724852 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 9 714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc : **PHÙNG QUỐC BẢO**
Tổng biên tập : **NGUYỄN BÁ THÀNH**

Biên tập
NS. Bình Thạnh

Chế bản
NS. Bình Thạnh

Trình bày bìa
Xuân Duyên

Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
Địa chỉ :
2bisA Đinh Tiên Hoàng - P.Đakao - Q.1 - TP.HCM
ĐT : 08 9111564 - Fax : 08 9102915
Email: binhthanhbookstore@yahoo.com

ĐỂ HỌC TỐT TOÁN 9 TẬP 2
Mã số : 1L – 251 ĐH2007
In 3.000 cuốn, khổ 16×24 cm, tại Công ty in VIỆT HƯNG.
Số xuất bản : 769 – 2007/CXB/07 – 114/ĐHQGHN ngày 21/09/2007
Quyết định xuất bản số : 578 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2008.