PHAN DOÃN THOẠI (Chủ biên)
NGUYỄN XUÂN BÌNH – CHU TUẤN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 9

THEO CHỦ ĐỀ

PHẦN ĐẠI SỐ

(BÁM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

27-2011/CXB/93-2126/GD

Mã số : T9T83S1-TTS

Lời nói đầu

Chương trình toán trung học cơ sở được trình bày theo các chủ đề. Trong mỗi chủ đề có quy định chuẩn (mức độ cần đạt) về kiến thức và kĩ năng tương đối chi tiết. Do những quy định về thời lượng dạy học, mỗi chủ đề được phân phối trong một hoặc nhiều bài học của SGK. Để giúp học sinh THCS nắm vững kiến thức và phương pháp giải toán, chúng tôi biên soạn bộ sách :

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN THEO CHỦ ĐỀ

Bộ sách gồm 8 quyển. Mỗi lớp hai quyển, một quyển bao gồm các chủ đề Số học (lớp 6), Đại số (lớp 7, 8, 9), một quyển bao gồm các chủ đề Hình học.

Sách được phân chia thành các chương với tên chương như trong SGK. Mỗi chương gồm các chủ đề. Mỗi chủ đề gồm hai phần :

A. **Kiến thức cần nhớ**. Phần này trình bày tóm tắt những kiến thức cơ bản và nâng cao cần thiết cho việc giải toán.

B. **Các dạng bài tập cơ bản**. Dựa vào những nội dung cơ bản của từng chủ đề, chúng tôi đưa ra các dạng bài tập để thực hành và luyện tập các nội dung phục vụ cho chủ đề. Trong mỗi dạng bài tập có ba nội dung chính sau đây : **Phương pháp giải**; **Ví dụ**; **Bài tập**. Mỗi phương pháp giải đưa ra một số ví dụ minh họa tiêu biểu.

Hệ thống bài tập, về cơ bản gồm hai loại : Loại 1, áp dụng trực tiếp phương pháp và các ví dụ nêu trên; Loại 2, gồm các bài tập vận dụng một cách tổng hợp các phương pháp đó.

Các tác giả đã dành nhiều thời gian để sắp xếp các chủ đề theo thứ tự lôgic của chương trình; lựa chọn các ví dụ và bài tập từ dễ đến khó và cố gắng đáp ứng nhu cầu nắm vững kiến thức cơ bản của đa số học sinh, đồng thời hướng học sinh đi sâu (ở một số bài tập có dấu "*"), phát triển những kiến thức được truyền thụ và rèn luyện kĩ năng.

Mặc dù bộ sách đã được các tác giả nhiều năm kinh nghiệm giảng dạy dày công biên soạn nhưng cũng không thể tránh khỏi thiếu sót, rất mong được bạn đọc góp ý.

Mọi thư từ góp ý xin gửi về :

P. Khai thác và Quản lí Đề tài – Công ty CP Sách Giáo dục tại Tp Hà Nội.

Địa chỉ : Lô B1 DN 14/3 – Nguyễn Khánh Toàn – Quan Hoa – Cầu Giấy – Hà Nội.

Hà Nội, ngày 01 tháng 01năm 2011.

Các tác giả

Chương 1

CĂN BẬC HAI – CĂN BẬC BA

Chủ đề 1

CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Căn bậc hai

1. **Khái niệm:** Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.
2. **Tính chất:**

Số âm không có căn bậc hai (vì $a = x^2 \geq 0$ với mọi x).

Số 0 chỉ có một căn bậc hai là 0.

Số dương a có đúng hai căn bậc hai:

– Một số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$;

– Một số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

II. Căn bậc hai số học

1. **Định nghĩa:** Với một số dương a, số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a. Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.

Ta viết: $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$

2. Phép khai phương là phép toán tìm căn thức bậc hai số học của số không âm.
3. Từ định nghĩa ta thu được hai kết quả sau:

KQ1: Với $a \geq 0$ thì $a = (\sqrt{a})^2$.

KQ2: $\sqrt{a} \geq 0$ với mọi $a \geq 0$.

III. So sánh các căn bậc hai số học

Với hai số a và b không âm, ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÌM CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH $x^2 = a$

I. Phương pháp giải

1. Xác định dấu của số cần tìm căn để kết luận có mấy căn bậc hai.

2. Sử dụng định nghĩa để xác định căn bậc hai.

3. Nghiệm của phương trình $x^2 = a$ là các căn bậc hai của a.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Tìm căn bậc hai của mỗi số sau:

a) 9; b) $\frac{9}{16}$;

c) 0,25; d) 2.

Giải

a) Do $9 > 0$ nên 9 có hai căn bậc hai là 3 và -3, vì $(\pm 3)^2 = 9$.

b) Do $\frac{9}{16} > 0$ nên $\frac{9}{16}$ có hai căn bậc hai là $\frac{3}{4}$ và $-\frac{3}{4}$, vì $\left(\pm\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$;

c) Do $0,25 > 0$ nên 0,25 có hai hai căn bậc hai là 0,5 và $-0,5$, vì $(\pm 0,5)^2 = 0,25$;

d) Do $2 > 0$ nên 2 có hai căn bậc hai là $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$, vì $(\pm\sqrt{2})^2 = 2$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 = 1$; b) $x^2 = \frac{4}{9}$;

c) $x^2 = 0,36$; d) $x^2 = 3$;

e) $x^2 = 0$.

Giải

a) Do $1 > 0$ nên 1 có hai căn bậc hai là 1 và -1, suy ra $x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Vậy $S = \{1, -1\}$.

b) Do $\frac{4}{9} > 0$ nên $\frac{4}{9}$ có hai căn bậc hai là $\frac{2}{3}$ và $-\frac{2}{3}$.

Suy ra $x^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3} \\ x=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$. Vậy $S=\left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$.

c) Do $0,36 > 0$ nên $0,36$ có hai căn bậc hai là $0,6$ và $-0,6$. Suy ra $x^2 = 0,36$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,6 \\ x=-0,6 \end{array}\right.$. Vậy $S = \{0,6; -0,6\}$.

d) Do $3 > 0$ nên 3 có hai căn bậc hai là $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$.

Do đó $x^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right.$. Vậy $S = \left\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}$.

e) Do 0 chỉ có một căn bậc hai là 0 nên $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy $S = \{0\}$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + 1 = 0$; b) $2x^2 + 3 = 0$.

Giải

a) Ta có $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$. Vì $-1 < 0$ nên -1 không có căn bậc hai. phương trình vô nghiệm.

b) Ta có $2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{3}{2}$. Vô nghiệm, vì $-\frac{3}{2} < 0$ không có căn bậc hai.

III. Bài tập

1. Trong các số sau, số nào là căn bậc hai số học của 9?

$\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{3^2}$, $-\sqrt{3^2}$, $-\sqrt{(-3)^2}$.

2. Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau:

a) 16; 169; 25; 49; 225. b) $\frac{4}{25}; \frac{25}{169}; \frac{64}{121}; \frac{169}{196}; \frac{81}{625}$.

c) 1,21; 0,16; 1,96; 2,56; 6,25.

3. Giải các phương trình sau:

a) $4x^2 - 1 = 0$; b) $9x^2 + 2 = 0$;

c) $(x + 1)^2 = 2$; d) $(x - 2)^2 = 7$.

Dạng 2

KHAI PHƯƠNG MỘT SỐ
TÌM MỘT SỐ BIẾT CĂN BẬC HAI SỐ HỌC CỦA NÓ

I. Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa căn bậc hai số học

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Tìm căn bậc hai số học của các số sau:

a) 25; b) 64;

c) $\frac{9}{16}$; d) 1,44.

Giải

a) $\sqrt{25} = 5$, vì $5 \ge 0$ và $5^2 = 25$.

b) $\sqrt{64} = 8$, vì $8 \ge 0$ và $8^2 = 64$.

c) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$, vì $\frac{3}{4} \ge 0$ và $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

d) $\sqrt{1,44} = 1,2$ vì $1,2 \ge 0$ và $1,2^2 = 1,44$.

Ví dụ 2: Tìm số x không âm, biết

a) $\sqrt{x} = 5$; b) $\sqrt{x} = \sqrt{7}$;

c) $\sqrt{x} = 0$; d) $\sqrt{x} = -3$.

Giải

a) $\sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \ge 0 \\ x = 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 25$. Vậy x = 25 là giá trị cần tìm.

b) Vì $\sqrt{x} = \sqrt{7} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7} \ge 0 \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7$. Vậy x = 7 là giá trị cần tìm.

c) Vì $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \ge 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$. Vậy x = 0 là giá trị cần tìm.

d) $\sqrt{x} = -3$. Không tồn tại x thoả mãn, vì không có căn bậc hai số học nào là một số âm (KQ 2).

III. Bài tập

4. Hãy giải thích vì sao không được viết: $\sqrt{4} = \pm 2$.

5. Tìm căn bậc hai số học của các số sau:

a) 36; 121; 144; 169; 225; 256; 289; 324; 361; 400.

b) 2,25; 0,01; 0,04; 0,09; 0,16; 0,25.

c) $\frac{1}{4}; \frac{4}{25}; \frac{49}{64}; \frac{121}{81}; \frac{169}{100}$.

6. Tìm số x không âm, biết:

$2\sqrt{x} = 6$; $3\sqrt{x} = 1$; $4 - 5\sqrt{x} = -1$; $4\sqrt{x} = -3$.

7. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$;

b) $(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3) = 0$;

c) $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2) = 0$.

Dạng 3
SO SÁNH CÁC CĂN BẬC HAI SỐ HỌC

I. Phương pháp giải

Sử dụng định lý: Với hai số a và b không âm ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: So sánh

a) 2 và $\sqrt{3}$;

b) 3 và $\sqrt{8}$;

c) 4 và $\sqrt{17}$;

d) 5 và $\sqrt{17} + 1$.

Giải

a) Vì $0 < 3 < 4$ nên $\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$. Vậy $\sqrt{3} < 2$.

b) Vì $0 < 8 < 9$ nên $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$. Vậy $\sqrt{8} < 3$.

c) Vì $0 < 16 < 17$ nên $4 = \sqrt{16} < \sqrt{17}$. Vậy $4 < \sqrt{17}$.

d) Vì $0 < 16 < 17$ nên $4 = \sqrt{16} < \sqrt{17}$. Vậy $5 < \sqrt{17} + 1$.

Ví dụ 2: Tìm số x không âm biết:

a) $\sqrt{x} > 3$;

b) $\sqrt{x} < 2$;

c) $\sqrt{x} \geq 4$;

d) $\sqrt{x} \leq 0,1$.

Giải

a) Vì $x \geq 0$ và $3 = \sqrt{9} > 0$ nên $\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{9} \Leftrightarrow x > 9$. Vậy $x > 9$.

b) Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$ nên $\sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} < \sqrt{4} \Leftrightarrow 0 \leq x < 4$.

Vậy $0 \leq x < 4$.

c) Vì $x \geq 0$ và $4 = \sqrt{16} > 0$ nên $\sqrt{x} \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 16$. Vậy $x \geq 16$.

d) Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$ nên $\sqrt{x} \leq 0,1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 0,1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 0,01$.

Vậy $0 \leq x \leq 0,01$.

III. Bài tập

8. So sánh:

a) 4 và $\sqrt{15}$;
b) 5 và $\sqrt{26}$;

c) 3 và $\sqrt{15} - 1$;
c) 6 và $\sqrt{26} + 1$.

9. Tìm số x không âm biết

a) $\sqrt{x} < 3$;
b) $\sqrt{2x} \leq 4$;

c) $3\sqrt{x} > 6$;
d) $\sqrt{3x} \geq 9$.

Chủ đề 2

CĂN BẬC HAI CỦA MỘT BIỂU THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Căn thức bậc hai

1. Định nghĩa: Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A, còn A gọi là biểu thức lấy căn hay *biểu thức dưới dấu căn*.

2. Điều kiện xác định (hay có nghĩa) của một căn thức bậc hai.

$\sqrt{A}$ xác định hay có nghĩa $\Leftrightarrow$ $A \geq 0$.

3. Muốn khai căn một biểu thức thường dùng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$.

II. Nhắc lại về giá trị tuyệt đối

Định nghĩa $|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$

Hệ quả: a) Hằng bất đẳng thức: $|A| \geq 0$ với mọi A

b) $|A| = |-A|$

c) $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$

d) $|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0$; $|A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$.

Khái niệm giá trị tuyệt đối thường được dùng để rút gọn một biểu thức, giải một phương trình hay bất phương trình, hoặc vẽ đồ thị một hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

III. Nhắc lại về dấu của một tích, dấu của một thương

1. $a.b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$

2. $a.b \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

3. $\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \leq 0 \\ b < 0 \end{cases}$

4. $\frac{a}{b} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \leq 0 \\ b > 0 \end{cases}$

5. $\frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow a > 0$.

IV. Bổ sung kiến thức: căn thức đồng dạng

1. Hai căn thức bậc hai gọi là *đồng dạng* nếu chúng có cùng biểu thức dưới dấu căn.

Ví dụ: a) Các biểu thức $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5}$ được gọi là đồng dạng với nhau.

b) Các biểu thức $\frac{1}{2}\sqrt{a}, 4\sqrt{a}, -\frac{2}{5}\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$ được gọi là đồng dạng với nhau.

2. Cộng trừ các căn thức bậc hai:

Muốn cộng trừ các căn thức bậc hai ta thu gọn các căn thức đồng dạng.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT CĂN THỨC BẬC HAI XÁC ĐỊNH

I. Phương pháp giải

1. $\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) $\Leftrightarrow A \geq 0$.

2. Giải bất phương trình $A \geq 0$.

3. Kết luận.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{3x}$; b) $\sqrt{5-2x}$;

c) $\sqrt{-x}$; d) $\sqrt{-x^2}$.

Giải

a) Vì $\sqrt{3x}$ là căn thức bậc hai của 3x, nên $\sqrt{3x}$ xác định

$$\Leftrightarrow 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Vậy $x \geq 0$ là điều kiện cần tìm.

b) Vì $\sqrt{5-2x}$ là căn thức bậc hai của $5-2x$, nên $\sqrt{5-2x}$ xác định

$$\Leftrightarrow 5-2x \geq 0 \Leftrightarrow 5 \geq 2x \Leftrightarrow \frac{5}{2} \geq x.$$

Vậy $x \leq \frac{5}{2}$ là điều kiện cần tìm.

c) $\sqrt{-x}$ là căn thức bậc hai của $-x$, nên $\sqrt{-x}$ xác định

$$\Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq x.$$

Vậy $x \leq 0$ là điều kiện cần tìm.

d) $\sqrt{-x^2}$ là căn thức bậc hai của $-x^2$ nên $\sqrt{-x^2}$ xác định

$$\Leftrightarrow -x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq x^2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy $x = 0$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Với giá trị nào của a thì mỗi căn thức sau có nghĩa?

a) $\sqrt{\frac{a}{2}}$; b) $\sqrt{-4a}$;

c) $\sqrt{3a+2}$; d) $\sqrt{5-a}$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{a}{2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{a}{2} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$.

Vậy $a \geq 0$ là giá trị cần tìm.

b) $\sqrt{-4a}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -4a \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq 4a \Leftrightarrow 0 \geq a$.

Vậy $a \leq 0$ là giá trị cần tìm.

c) $\sqrt{3a+2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 3a+2 \geq \Leftrightarrow 3a \geq -2 \Leftrightarrow a \geq \frac{-2}{3}$.

Vậy $a \geq \frac{-2}{3}$ là giá trị cần tìm.

d) $\sqrt{5-a}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 5 - a \geq 0 \Leftrightarrow 5 \geq a$.

Vậy $a \leq 5$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Tìm x để các căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$; b) $\sqrt{\frac{-2}{x+3}}$;

c) $\sqrt{x^2}$; d) $\sqrt{-4x^2}$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy $x > 1$ là giá trị cần tìm.

b) $\sqrt{\frac{-2}{x+3}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{-2}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$.

Vậy $x < -3$ là giá trị cần tìm.

c) $\sqrt{x^2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 \geq 0$ (đúng với mọi x). Vậy $x \in R$ là giá trị cần tìm.

d) $\sqrt{-4x^2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $x = 0$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Ví dụ 4*: Tìm x để mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$; b) $\sqrt{x^2-4}$;

c) $\sqrt{1-x^2}$; d) $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$.

Giải

a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow (x-1)(x-3) \ge 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-3 \ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-1 \le 0 \\ x-3 \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \le 1 \\ x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \le 1$ hoặc $x \ge 3$.

Vậy $x \le 1$ hoặc $x \ge 3$ là các giá trị cần tìm.

b) $\sqrt{x^2-4}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \ge 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x+2 \ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-2 \le 0 \\ x+2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x \ge -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \le 2 \\ x \le -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \le -2$ hoặc $x \ge 2$.

Vậy $x \le -2$ hoặc $x \ge 2$ là giá trị cần tìm.

c) $\sqrt{1-x^2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow (1-x^2) \ge 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) \ge 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0 \\ 1+x \ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 1-x \le 0 \\ 1+x \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \\ x \le 1 \end{cases}$. hoặc $\begin{cases} 1 \le x \\ x \le -1 \end{cases}$ (loại) $\Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

Vậy $-1 \le x \le 1$ là giá trị cần tìm.

d) $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x+3} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-2 \le 0 \\ x+3 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x > -3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \le 2 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$ hoặc $x < -3$.

Vậy $x \ge 2$ hoặc $x < -3$ là các giá trị cần tìm.

III. Bài tập

10. Tìm x để mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{3x-1}$; b) $\sqrt{4-2x}$; c) $\sqrt{x^2+1}$;

d) $\sqrt{\dfrac{4}{2x-1}}$; e) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$; f) $\sqrt{4x^2-1}$.

11. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$; b) $B = \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3}$;

c) $C = \sqrt{(x-2)(x+3)}$; d) $D = \sqrt{\dfrac{2x-3}{x-1}}$.

Dạng 2

KHAI CĂN MỘT BIỂU THỨC
TÍNH GIÁ TRỊ MỘT BIỂU THỨC CHỨA CĂN

I. Phương pháp giải

1. Khai căn nhờ hằng đẳng thức: $\sqrt{A^2} = |A|$.

2. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối nhờ tính chất:

$$|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0; |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0.$$

3. Thu gọn.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Tính

a) $\sqrt{11^2}$; b) $\sqrt{(-5)^2}$;

c) $\sqrt{(0,4)^2}$; d) $-\sqrt{(-1,2)^2}$;

e) $-0,3\sqrt{(-1,4)^2}$; f) $\sqrt{\sqrt{16}}$.

Giải

a) $\sqrt{11^2} = |11| = 11$. b) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

c) $\sqrt{(0,4)^2} = |0,4| = 0,4$. d) $-\sqrt{(-1,2)^2} = -|-1,2| = -1,2$.

e) $-0,3\sqrt{(-1,4)^2} = -0,3|-1,4| = -0,3.\ 1,4 = -0,42$.

f) Vì $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = |4| = 4$ nên $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$.

Ví dụ 2: Tính

$A = \sqrt{16}.\sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$; $B = 36 : \sqrt{2.3^2.18} - 2\sqrt{169}$;

$C = \sqrt{5^2 + 12^2}$.

Giải

a) Vì $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = |4| = 4$; $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = |5| = 5$; $\sqrt{196} = \sqrt{14^2} = |14| = 14$

và $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = |7| = 7$ nên $A = 4.5 + 14:7 = 20 + 2 = 22$.

b) Ta có $\sqrt{2.3^2.18} = \sqrt{18^2} = |18| = 18$; $\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = |13| = 13$; nên

$B = 36 : 18 - 2.13 = 2 - 26 = -24$.

c) $C = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$.

Ví dụ 3: Tính

a) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$;　　　　b) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$;

c) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$.

Giải

a) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \left|\sqrt{2}-1\right| = \sqrt{2}-1$ (vì $\sqrt{2} > 1$)

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = \left|\sqrt{3}-2\right| = 2-\sqrt{3}$ (vì $\sqrt{3} < 2$)

c) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \left|\sqrt{5}-2\right| = \sqrt{5}-2$ (vì $\sqrt{5} > 2$)

Ví dụ 4: Tính

a) $\sqrt{(x-1)^2}$ với $x \geq 1$;　　　　b) $\sqrt{a^6}$ với $a < 0$;

c) $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x < 2$　　　　d) $\sqrt{a^4}$.

Giải

a) $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = x-1$ (vì $x \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0$).

b) $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = \left|a^3\right| = -a^3$ (vì $a < 0 \Leftrightarrow a^3 < 0$).

c) $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = -x+2$ (vì $x < 2 \Leftrightarrow x-2 < 0$).

d) $\sqrt{a^4} = \sqrt{(a^2)^2} = \left|a^2\right| = a^2$ (vì $a^2 \geq 0$ với mọi a).

III. Bài tập

12. Tính

a) $2\sqrt{(-3)^6} + 3\sqrt{(-2)^4}$;　　　　b) $-4\sqrt{(-3)^6} + \sqrt{\sqrt{(-2)^8}}$;

c) $\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$;　　　　d) $\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}$.

13. Tính

a) $M = \sqrt{(-1)^2} + \sqrt{2^2} - \sqrt{(-3)^2}$;

b) $N = 3\sqrt{(-0,2)^2} - (\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{(-3)^2}$;

c) $P = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{(-\frac{1}{2})^2} - 3\sqrt{(-\frac{1}{3})^2}$.

Dạng 3
PHÂN TÍCH THÀNH NHÂN TỬ

I. Phương pháp giải

1. Viết $A \geq 0$ thành $(\sqrt{A})^2$.

2. Sử dụng $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

3. Sử dụng $A^2 + B^2 \pm 2AB = (A \pm B)^2$.

4. Thêm, bớt tạo thành hằng đẳng thức.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Phân tích thành nhân tử

a) $x^2 - 1$; b) $x^2 - 2$;

c) $x^2 - 3$; d) $x^2 - 4$.

Giải

a) $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$.

b) Vì $2 = (\sqrt{2})^2$ nên $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

c) Vì $3 = (\sqrt{3})^2$ nên $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

d) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$.

Ví dụ 2: Phân tích thành nhân tử

a) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ b) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$

c) $x + 2\sqrt{x} + 1$ d) $x - 4\sqrt{x} + 4$

Giải

Vì $2 = (\sqrt{2})^2$ nên $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})^2$.

Vì $3 = (\sqrt{3})^2$ nên $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = x^2 - 2\sqrt{3}x + (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})^2$.

Vì $x = (\sqrt{x})^2$ nên $x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2$.

Vì $x = (\sqrt{x})^2$ nên $x - 4\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x})^2 - 2.2\sqrt{x} + 2^2 = (\sqrt{x} - 2)^2$.

Ví dụ 3: Cho các biểu thức $P = x + 2\sqrt{x-1}$; $Q = x - 2\sqrt{x-1}$

a) Hãy phân tích P và Q thành nhân tử.

b) Thay x lần lượt bằng 3; 4 vào P, Q để được một bình phương.

Giải

a) Vì $\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = x-1$ nên

$$P = x-1+2\sqrt{x-1}+1 = (\sqrt{x-1})^2+2\sqrt{x-1}+1 = (\sqrt{x-1}+1)^2.$$

Vậy $\quad P = (\sqrt{x-1}+1)^2$.

Tương tự

$$Q = x-1-2\sqrt{x-1}+1 = (\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x-1}+1 = (\sqrt{x-1}-1)^2.$$

Vậy $\quad Q = (\sqrt{x-1}-1)^2$.

b) Với x = 3 thì

$$P = 3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1^2 = (\sqrt{2}+1)^2;$$

$$Q = 3-2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+1^2 = (\sqrt{2}-1)^2.$$

Với x = 4 thì

$$P = 4+2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1^2 = (\sqrt{3}+1)^2;$$

$$Q = 4-2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2 = (\sqrt{3}-1)^2.$$

III. Bài tập

14. Phân tích thành nhân tử

a) x^2-7; b) $4x^2-5$;

c) $3x^2-1$; d) $x-1$ với $x \geq 0$;

e) $x-4$ với $x \geq 0$; g) $9x-4$ với $x \geq 0$.

15. Phân tích thành nhân tử

a) $11+2\sqrt{10}$; b) $12-2\sqrt{11}$;

c) $23+2\sqrt{22}$.

16*. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử với $a < 0$.

a) $a+3$; b) $4a+1$;

c) $2a+3$.

Dạng 4
RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN

I. Phương pháp giải

1. Rút gọn đồng nghĩa với thu gọn.

Bước 1: Khai căn một biểu thức.

Bước 2: Thu gọn.

2. Rút gọn đồng nghĩa với giản ước.

Bước 1: Phân tích tử và mẫu thành nhân tử hoặc khai căn 1 biểu thức.

Bước 2: Giản ước cho nhân tử chung.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $M = 3\sqrt{a^2} - 5a$ với $a < 0$. b) $N = \sqrt{4a^2} + 3a$ với $a \geq 0$;

c) $P = \sqrt{9a^4} + a^2$; d) $Q = 3\sqrt{4a^6} - 3a^3$ với $a < 0$.

Giải

a) Vì $\sqrt{a^2} = |a| = -a$ (do $a < 0$) nên $M = 3(-a) - 5a = -8a$.

b) Vì $\sqrt{4a^2} = \sqrt{(2a)^2} = |2a| = 2a$ (do $a \geq 0$) nên $N = 2a + 3a = 5a$.

c) Vì $\sqrt{9a^4} = \sqrt{(3a^2)^2} = \left|3a^2\right| = 3a^2$ (do $3a^2 \geq 0$ với mọi a) nên

$$P = 3a^2 + a^2 = 4a^2.$$

d) Vì $\sqrt{4a^6} = \sqrt{(2a^3)^2} = \left|2a^3\right| = -2a^3$ (do $a < 0$) nên

$$Q = 3(-2a^3) - 3a^3 = -9a^3.$$

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$; b) $B = 2\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$;

c) $C = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$; d) $D = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$.

Giải

Vì $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \left|\sqrt{3} - 1\right| = \sqrt{3} - 1$ (do $\sqrt{3} > 1$) nên

$$A = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} = -1.$$

b) Vì $\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \left|\sqrt{5}-1\right| = \sqrt{5}-1$ (do $\sqrt{5} > 1$) nên

$$B = 2\sqrt{5} - (\sqrt{5}-1) = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1 = \sqrt{5}+1.$$

c) Ta có $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \left|\sqrt{3}+1\right| = \sqrt{3}+1$;

$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \left|\sqrt{3}-1\right| = \sqrt{3}-1$ (do $\sqrt{3} > 1$) nên

$$C = \sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1 = 2\sqrt{3}.$$

d) Ta có $\sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6}-1)^2} = \left|\sqrt{6}-1\right| = \sqrt{6}-1$ (do $\sqrt{6} > 1$);

$\sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6}+1)^2} = \left|\sqrt{6}+1\right| = \sqrt{6}+1$;

Do đó $D = \sqrt{6}-1-\sqrt{6}-1 = -2$.

Ví dụ 3: Rút gọn các biểu thức

a) $M = \sqrt{9x^2} - 2x$ với $x \ge 0$; b) $N = x - 2 - \sqrt{4-4x+x^2}$ với $x > 2$;

c) $P = \sqrt{25x^2} + 3x$ với $x < 0$; c) $Q = 3 - x + \sqrt{x^2+6x+9}$ với $x > -3$.

Giải

a) Vì $\sqrt{9x^2} = \sqrt{(3x)^2} = |3x| = 3x$ (do $x \ge 0$) nên $M = 3x - 2x = x$.

b) Vì $\sqrt{4-4x+x^2} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x-2$ (do $x > 2$) nên

$$N = x - 2 - (x-2) = 0.$$

c) Vì $\sqrt{25x^2} = \sqrt{(5x)^2} = |5x| = -5x$ (do $x < 0$) nên $P = -5x + 2x = -3x$.

d) Vì $\sqrt{x^2+6x+9} = \sqrt{(3+x)^2} = |3+x| = 3+x$ (do $x > -3 \Leftrightarrow x+3 > 0$) nên

$$Q = 3 - x + x + 3 = 6.$$

Ví dụ 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$; b) $B = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$;

c) $C = \dfrac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{x^2-2}$; d) $D = \dfrac{x+\sqrt{5}}{x^2+2\sqrt{5}x+5}$.

Giải

a) Phân tích tử thành nhân tử:

$$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

Ta được: $A = \dfrac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{1.(x+\sqrt{3})} = x - \sqrt{3}$.

b) Phân tích mẫu thành nhân tử:

$$x - 4 = (\sqrt{x})^2 - 2^2 = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$$

Ta được: $B = \dfrac{1.(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$.

c) Phân tích tử thành nhân tử:

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x-\sqrt{2})^2$$

Ta được: $C = \dfrac{(x-\sqrt{2})^2}{1.(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = \dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$.

d) Phân tích mẫu thành nhân tử:

$$x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = x^2 + 2\sqrt{5}x + (\sqrt{5})^2 = (x+\sqrt{5})^2$$

Ta được: $D = \dfrac{1.(x+\sqrt{5})}{(x+\sqrt{5})^2} = \dfrac{1}{x+\sqrt{5}}$.

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức.

a) $M = \dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ với $x > 1$; b) $N = \dfrac{2(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+4}}$ với $x < -2$;

c) $P = \dfrac{3\sqrt{1-4x+4x^2}}{2x-1}$ với $x > \dfrac{1}{2}$; d) $Q = \dfrac{4(3x-1)}{\sqrt{x^2+4x+4}}$ với $x < \dfrac{1}{3}$.

Giải

a) Khai căn tử thức: $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = x-1$ (vì $x > 1$) nên $M = \dfrac{x-1}{x-1} = 1$.

b) Khai căn mẫu thức: $\sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = -(x+2)$ (vì $x < 2$) nên $N = \dfrac{2(x+2)}{-(x+2)} = -2$.

c) Khai căn tử thức: $\sqrt{1-4x+x^2} = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = 2x-1$ (vì $x > \dfrac{1}{2}$) nên $P = \dfrac{3(2x-1)}{1.(2x-1)} = 3$.

Khai căn mẫu thức:

$$\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = \sqrt{(3x-1)^2} = |3x - 1| = -3(x-1) \text{ (vì } x < \frac{1}{3}\text{)}$$

nên $Q = \dfrac{4(3x-1)}{-(3x-1)} = -4$.

III. Bài tập

Hãy rút gọn các biểu thức trong các bài sau đây:

17. a) $M = \sqrt{16a^2} - 5a$ với $a \geq 0$;

b) $N = \sqrt{25b^2} + 3b$ với $b \leq 0$;

c) $P = \sqrt{x^2 - 10x + 25} - x$ với $x \geq 5$;

d) $Q = 3x + 2 - \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$ với $x > \dfrac{1}{3}$.

18. a) $A = \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} - \sqrt{7}$;

b) $B = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$;

c) $C = \sqrt{14 - 2\sqrt{13}} + \sqrt{14 + 2\sqrt{13}}$;

d) $D = \sqrt{22 - 2\sqrt{21}} - \sqrt{22 + 2\sqrt{21}}$.

19*. a) $M = |x - 1| - |1 - 2x|$ với $x < \dfrac{1}{2}$;

b) $N = 2x - \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ với $x > \dfrac{1}{2}$;

c) $P = \sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2}$ với $x \geq 0$.

d) $Q = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} + 4$ với $x \geq 1$.

20*. a) $A = |x - 2| + \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$ với $x > 2$;

b) $B = |4 - x| + \dfrac{4 - x}{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}$ với $x < 4$;

c) $C = |x - 3| - \dfrac{3 - x}{\sqrt{9 - 6x + x^2}}$ với $x < 3$.

Dạng 5
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

I. Phương pháp giải

1. Khai căn một biểu thức.

2. Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Tìm x biết:

a) $\sqrt{x^2} = 3$; b) $\sqrt{x^2} = |-4|$;

c) $\sqrt{4x^2} = 6$; d) $\sqrt{9x^2} = |-12|$.

Giải

a) Vì $\sqrt{x^2} = |x|$ và $3 = |3|$ nên $\sqrt{x^2} = 3 \Leftrightarrow |x| = |3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Vậy x = 3 và x = –3 là hai giá trị cần tìm.

b) Vì $\sqrt{x^2} = |x|$ và $|-4| = |4|$ nên $\sqrt{x^2} = |-4| \Leftrightarrow |x| = |4| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -4 \end{array}\right.$

Vậy x = 4 và x = –4 là hai giá trị cần tìm.

c) Vì $\sqrt{4x^2} = \sqrt{(2x)^2} = |2x|$ và $6 = |6|$ nên $\sqrt{4x^2} = 6$

$$\Leftrightarrow |2x| = |6| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 6 \\ 2x = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Vậy x = 3 và x = –3 là hai giá trị cần tìm.

d) Vì $\sqrt{9x^2} = \sqrt{(3x)^2} = |3x|$ và $|-12| = |12|$ nên $\sqrt{9x^2} = |-12|$

$$\Leftrightarrow |3x| = |12| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 12 \\ 3x = -12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

Vậy x = 4 và x = –4 là hai giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

a) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$; b) $x^2 + 2\sqrt{11}x + 11 = 0$;

c) $\sqrt{x^4} = 3$; d) $\sqrt{\sqrt{x^4}} = 5$.

Giải

Ta có: $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

Vậy $S = \left\{\sqrt{3}\right\}$.

b) Ta có: $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{11})^2 = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{11} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{11}$

Vậy $S = \left\{\sqrt{11}\right\}$.

c) Ta có: $\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = x^2$ nên $\sqrt{x^4} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3$

Vì $3 > 0$ nên có hai căn bậc hai là $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$

Do đó $x^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$ Vậy $S = \left\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}$.

d) Vì $\sqrt{x^4} = x^2$ nên $\sqrt{\sqrt{x^4}} = \sqrt{x^2} = |x|$

Do đó: $\sqrt{\sqrt{x^4}} = 5 \Leftrightarrow |x| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Vậy $S = \{5; -5\}$.

Ví dụ 3*: Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x + 1$; b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$;

c) $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x - 1} - 1$; d) $\sqrt{4 - 3\sqrt{3}} = x - 1$.

Giải

a) Vì $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|$ nên phương trình đã cho trở thành:

$$|x - 1| = x - 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Vậy $S = \{x / x \geq 1\}$.

b) Vì $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|$ và $2 - x = -1(x - 2)$ nên phương trình đã cho trở thành

$$|x - 2| = -(x - 2) \Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Vậy $S = \{x / x \leq 2\}$.

c) Vì $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = \sqrt{(\sqrt{x - 1} - 1)^2} = \left|\sqrt{x - 1} - 1\right|$ nên phương trình đã cho trở thành

$$\left|\sqrt{x-1}-1\right| = \sqrt{x-1}-1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 2.$$

Vậy $S = \{x / x \ge 2\}$.

d) Vì $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \left|\sqrt{3}-1\right| = \sqrt{3}-1$ (do $\sqrt{3} > 1$) nên phương trình đã cho trở thành

$$x - 1 = \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}.$$

Vậy $S = \left\{\sqrt{3}\right\}$.

Ví dụ 4*. Giải phương trình:

a) $\sqrt{25x^2} = x - 12$; b) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3x + 2$.

Giải

a) Vì $\sqrt{25x^2} = \sqrt{(5x)^2} = |5x|$ nên phương trình đã cho trở thành:

$|5x| = x - 12$ (1)

Do $|5x| = 5x$ khi $5x \ge 0$ hay $x \ge 0$

$|5x| = -5x$ khi $5x < 0$ hay $x<0$

Vậy để giải phương trình (1), ta quy về giải hai phương trình sau:

• Phương trình $5x = x - 12$ với điều kiện $x \ge 0$.

Ta có $5x = x - 12 \Leftrightarrow 4x = -12 \Leftrightarrow x = -3$. Giá trị $x = -3$ không thoả mãn điều kiện $x \ge 0$ nên -3 không phải là nghiệm của (1).

• Phương trình $-5x = x - 12$ với điều kiện $x < 0$.

Ta có $-5x = x - 12 \Leftrightarrow 12 = 6x \Leftrightarrow x = 2$.

Giá trị $x= 2$ không thoả mãn điều kiện $x < 0$ nên 2 không là nghiệm của phương trình (1).

Tổng hợp kết quả trên, ta có tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \varnothing$.

b) Vì $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ nên phương trình đã cho trở thành

$|x-1| = 3x + 2$ (2)

Do $|x-1| = x - 1$ khi $x - 1 \ge 0$ hay $x \ge 1$;

$|x-1| = -(x-1)$ khi $x - 1 < 0$ hay $x < 1$.

Vậy để giải phương trình (2), ta quy về giải hai phương trình sau:

• Phương trình $x - 1 = 3x + 2$ với điều kiện $x \ge 1$.

Ta có $x - 1 = 3x + 2 \Leftrightarrow -2 = 2x \Leftrightarrow x = -1$.

Giá trị $x = -1$ không thoả mãn điều kiện $x \geq 1$ nên -1 không là nghiệm của phương trình (2).

• Phương trình $x - 1 = 3x + 2$ với điều kiện $x \geq 1$.

Ta có $-(x-1) = 3x + 2 \Leftrightarrow -1 = 4x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$.

Giá trị $x = -\dfrac{1}{4}$ thoả mãn điều kiện $x < 1$ nên $-\dfrac{1}{4}$ là nghiệm của phương trình (2).

Tổng hợp các kết quả trên, ta có tập nghiệm của phương trình (2) là $S = \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$.

III. Bài tập

Giải các phương trình (bài 21, 22, 23, 24):

21. a) $\sqrt{(-2x)^2} = 4$; b) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = |-3|$;

c) $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 2$; d) $\sqrt{3x^2} = \left|-\sqrt{6}\right|$.

22. a) $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$; b) $x^2 + 4\sqrt{5}x + 20 = 0$;

c) $\sqrt{x^4} = 4$; d) $\sqrt{\sqrt{x^4}} = 7$.

23. a) $|2x - 1| = 1 - 2x$; b) $|3x + 2| = 3x + 2$;

c) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 3x - 1$; d) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 3 - 2x$.

24. a) $\sqrt{25x^2} - 3x - 2 = 0$; b) $\sqrt{(-3x)^2} + x - 1 = 0$;

c) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = x + 4$; d) $\sqrt{x^2 + 12x + 36} = 2x + 5$.

Chủ đề 3

CĂN BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH, MỘT THƯƠNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Căn bậc hai của một tích

1. Quy tắc khai phương một tích: Muốn khai phương một tích các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân kết quả với nhau.

2. Quy tắc nhân các căn bậc hai: Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

   Tổng quát: Với hai biểu thức A và B không âm ta có:

$$\sqrt{AB}=\sqrt{A}.\sqrt{B}.$$

3. Lũy thừa của một căn bậc hai

   Từ quy tắc nhân các căn bậc hai ta thu được các kết quả sau:

   KQ1: $(\sqrt{A})^2=\sqrt{A^2}$;   KQ2: $(\sqrt{A})^3=\sqrt{A^3}$.

II. Căn bậc hai của một thương

1. Quy tắc khai phương một thương: Muốn khai phương một thương $\frac{a}{b}$, trong đó số a không âm và số b dương, ta có thể lần lượt khai phương số a và số b, rồi lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.
2. Quy tắc chia hai căn bậc hai: Muốn chia căn bậc hai của một số a không âm cho căn bậc hai của một số b dương, ta có thể chia số a cho số b rồi khai phương kết quả đó.

   Tổng quát: Với biểu thức A không âm và biểu thức B dương ta có:

$$\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1

KHAI PHƯƠNG MỘT TÍCH – NHÂN CÁC CĂN BẬC HAI

I. Phương pháp giải

1. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, nhân các căn bậc hai.
2. Phân tích các số trong dấu căn thành nhân tử nhằm xuất hiện bình phương.
3. Khi khai triển chú ý hằng đẳng thức $(\sqrt{a})^2=a$ $(a\geq 0)$.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính

a) $\sqrt{4.1,44.225}$;   b) $\sqrt{2^4.(-3)^2}$;

c) $\sqrt{16,9.250}$; d) $\sqrt{3^2.5^4}$.

Giải

a) $\sqrt{4.1,44.225}=\sqrt{4}\ \sqrt{1,44}\ \sqrt{225}\ = 2.1,2.15 = 36$.

b) $\sqrt{2^4.(-3)^2}=\sqrt{2^4}\ \sqrt{(-3)^2}==2^2.|-3|=4.3=12$.

c) Vì 16,9.250=169.25 nên

$$\sqrt{16,9.250}=\sqrt{169.25}=\sqrt{169}\ .\sqrt{25}=13.5=65.$$

d) $\sqrt{3^2.5^4}=\sqrt{3^2}\ \sqrt{5^4}=3.5^2=75$.

Ví dụ 2: Áp dụng quy tắc nhân các căn thức, hãy tính:

a) $\sqrt{2}.\sqrt{18}$; b) $\sqrt{1,6}.\sqrt{30}\sqrt{48}$;

c) $\sqrt{0,4}.\sqrt{2,5}$; d) $\sqrt{6,4}\sqrt{5}.\sqrt{0,5}$.

Giải

a) $\sqrt{2}.\sqrt{18}=\sqrt{2.18}=\sqrt{(2.3)^2}=6$.

b) $\sqrt{1,6}.\sqrt{30}\sqrt{48}=\sqrt{1,6.30.48}=\sqrt{(4.12)^2}=48$.

c) $\sqrt{0,4}.\sqrt{2,5}=\sqrt{0,4.2,5}=\sqrt{1}=1$.

d) $\sqrt{6,4}\sqrt{5}.\sqrt{0,5}=\sqrt{6,4.5.0,5}=\sqrt{16}=4$.

Ví dụ 3: Khai triển:

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$; b) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$;

c) $(2-\sqrt{3}).(2+\sqrt{3})$.

Giải

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6}$.

b) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=5-2\sqrt{15}+3=8-2\sqrt{15}$.

c) $(2-\sqrt{3}).(2+\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$.

Ví dụ 4: Làm tính nhân:

a) $(\sqrt{12}-3\sqrt{75})\sqrt{3}$; b) $(\sqrt{18}-4\sqrt{72})2\sqrt{2}$;

c) $(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+7)$; d) $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-5)$.

Giải

a) $(\sqrt{12}-3\sqrt{75})\sqrt{3}=\sqrt{12}.\sqrt{3}-3\sqrt{75}\sqrt{3}=\sqrt{36}-3\sqrt{225}=6-3.15=-39$.

b) $(\sqrt{18}-4\sqrt{72})2\sqrt{2}=\sqrt{18}.2\sqrt{2}-4\sqrt{72}.2\sqrt{2}$

$$=2\sqrt{36}-8\sqrt{144}=2.6-8.12=-84$$

c) $(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+7)=(\sqrt{6})^2+5\sqrt{6}-14=6-14+5\sqrt{6}=-8+5\sqrt{6}$.

d) $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-5)=(\sqrt{3})^2-3\sqrt{3}-10=3-3\sqrt{3}-10=-7-3\sqrt{3}$.

III. Bài tập

25. Tính:

a) $\sqrt{12.147}$;   b) $\sqrt{15.240}$;

c) $\sqrt{3.30.6,4}$;   d) $\sqrt{1,6.2,5}$;

e) $\sqrt{33.27.44}$;   f) $\sqrt{12,1.3,6.25}$.

26. Khai triển:

a) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2$;   b) $(\sqrt{11}-\sqrt{5})^2$;

c) $(\sqrt{13}+\sqrt{7})^2$;   d) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$;

e) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$;   f) $(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$.

27. Làm tính nhân:

a) $(\sqrt{3}+4)(\sqrt{3}+1)$;   b) $(\sqrt{5}-6)(\sqrt{5}+4)$;

c) $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)$;   d) $(\sqrt{y}-3)(\sqrt{y}-4)$.

Dạng 2
KHAI PHƯƠNG MỘT THƯƠNG, CHIA CÁC CĂN BẬC HAI

I. Phương pháp giải

1. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, chia các căn bậc hai.

2. Giản ước các phân số trong dấu căn, làm xuất hiện bình phương của một số.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{\dfrac{36}{169}}$;

b) $\sqrt{\dfrac{4}{9}:\dfrac{25}{36}}$;

c) $\sqrt{0,0144}$;

d) $\sqrt{\dfrac{4,9}{2,5}}$.

Giải

a) $\sqrt{\dfrac{36}{169}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}} = \dfrac{6}{13}$.

b) $\sqrt{\dfrac{4}{9}:\dfrac{25}{36}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}}:\sqrt{\dfrac{25}{36}} = \dfrac{2}{3}:\dfrac{5}{6} = \dfrac{4}{5}$.

c) $\sqrt{0,0144} = \sqrt{\dfrac{144}{10000}} = \dfrac{12}{100} = 0,12$.

d) $\sqrt{\dfrac{4,9}{2,5}} = \sqrt{\dfrac{49}{25}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \dfrac{7}{5}$.

Ví dụ 2: Tính:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}$;

b) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$;

d) $\dfrac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3.3^5}}$.

Giải

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\dfrac{2}{50}} = \sqrt{\dfrac{1}{25}} = \dfrac{1}{5}$.

b) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$.

c) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}} = \sqrt{\dfrac{15}{735}} = \sqrt{\dfrac{1}{49}} = \dfrac{1}{7}$.

d) $\dfrac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3.3^5}} = \sqrt{\dfrac{2^5.3^5}{2^3.3^5}} = \sqrt{4} = 2$.

Ví dụ 3: Tính:

a) $\sqrt{1\dfrac{9}{6}.5\dfrac{4}{9}.0,01}$;

b) $\sqrt{1,44.1,21-1,44.0,4}$;

c) $\sqrt{\dfrac{165^2-124^2}{164}}$;

d) $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$.

Giải

a) $\sqrt{1\dfrac{9}{6}.5\dfrac{4}{9}.0,01} = \sqrt{\dfrac{25}{16}}.\sqrt{\dfrac{49}{9}}.\sqrt{0,01} = \dfrac{5}{4}.\dfrac{7}{3}.0,1 = \dfrac{7}{24}$.

b) $\sqrt{1,44.1,21-1,44.0,4} = \sqrt{1,44.(1,21-0,4)}$

$= \sqrt{1,44.0,81} = \sqrt{1,44}.\sqrt{0,81} = 1,2.\ 0,9 = 1,08$.

c) $\sqrt{\dfrac{165^2-124^2}{164}} = \sqrt{\dfrac{(165-124)(165+124)}{164}} = \sqrt{\dfrac{41.289}{164}} = \sqrt{\dfrac{289}{4}} = \dfrac{17}{2}$.

d) $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{457^2-384^2}} = \sqrt{\dfrac{(149-76)(149+76)}{(457-384)(457+384)}} = \sqrt{\dfrac{73.225}{73.841}} = \dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}} = \dfrac{15}{29}$.

Ví dụ 4: Làm phép chia:

a) $(\sqrt{48}-\sqrt{27}+4\sqrt{12}):\sqrt{3}$;

b) $(\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}):\sqrt{xy}$;

c) $(\sqrt{20}-3\sqrt{45}+6\sqrt{180}):\sqrt{5}$;

d) $(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}-ab):\sqrt{ab}$.

Giải

a) $(\sqrt{48}-\sqrt{27}+4\sqrt{12}):\sqrt{3} = \sqrt{48}:\sqrt{3}-\sqrt{27}:\sqrt{3}+4\sqrt{12}:\sqrt{3}$

$= \sqrt{16}-\sqrt{9}+4\sqrt{4} = 4-3+4.2 = 9$.

b) $\left(\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}\right):\sqrt{xy} = \sqrt{x^2y}:\sqrt{xy}-\sqrt{xy^2}:\sqrt{xy} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$

c) $\left(\sqrt{20}-3\sqrt{45}+6\sqrt{180}):\sqrt{5}\right) = \sqrt{20}:\sqrt{5}-3\sqrt{45}:\sqrt{5}+6\sqrt{180}:\sqrt{5}$

$= \sqrt{4}-3\sqrt{9}+6\sqrt{36} = 2-3.3+6.6 = 29$.

d) $\left(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}-ab):\sqrt{ab}\right) = \sqrt{a^3b}:\sqrt{ab}+\sqrt{ab^3}:\sqrt{ab}-\left(\sqrt{ab}\right)^2:\sqrt{ab}$

$= \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{ab} = a+b-\sqrt{ab}$.

III. Bài tập

28. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính:

a) $\sqrt{\dfrac{16}{289}}$;

b) $\sqrt{\dfrac{49}{25}}$;

c) $\sqrt{1\frac{15}{49}}$; d) $\sqrt{3\frac{13}{81}}$.

29. Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai, hãy tính:

a) $\frac{\sqrt{1300}}{\sqrt{13}}$; b) $\frac{\sqrt{4,8}}{\sqrt{0,3}}$;

c) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$; d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{216}}$.

30. Làm tính chia:

a) $(2\sqrt{20}-3\sqrt{45}+4\sqrt{80}):\sqrt{5}$; b) $(3\sqrt{24}+4\sqrt{54}-5\sqrt{96}):\sqrt{6}$;

c) $(3\sqrt{x^2y}-4\sqrt{xy^2}+5xy):\sqrt{xy}$; d) $\left(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}-3\sqrt{ab}\right):\sqrt{ab}$.

Dạng 3
PHÂN TÍCH BIỂU THỨC THÀNH NHÂN TỬ

I. Phương pháp giải

1. Đặt nhân tử chung.
2. Dùng hằng đẳng thức.
3. Nhóm các số hạng.
4. Thêm, bớt nhằm xuất hiện nhân tử chung hoặc hằng đẳng thức.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Phân tích thành nhân tử:

a) $2-\sqrt{2}$; b) $5+\sqrt{5}$;

c) $ab-\sqrt{a}$; d) $\sqrt{x^2y}+\sqrt{xy^2}$;

e) $\sqrt{x^3y}-\sqrt{xy^3}$; f) $a-\sqrt{a}$.

Giải

Vì $2=(\sqrt{2})^2$ nên $2-\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}.1=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

$5+\sqrt{5}=(\sqrt{5})^2+1.\sqrt{5}=\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)$.

$ab-\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2b-1.\sqrt{a}=\sqrt{a}(b\sqrt{a}-1)$.

$\sqrt{x^2y}+\sqrt{xy^2}=\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

$$\sqrt{x^3y}-\sqrt{xy^3}=\sqrt{xy}(\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2})=\sqrt{xy}(x-y).$$

$$a-\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2-1.\sqrt{a}=\sqrt{a}(\sqrt{a}-1).$$

Ví dụ 2: Phân tích thành nhân tử:

a) x^2-2; b) $3x^2-1$;

c) $4x^2-5$; d) $\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}$;

e) $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}$; f) $\sqrt{x^3}-8$.

Giải

a) $x^2-2=x^2-(\sqrt{2})^2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

b) $3x^2-1=(x\sqrt{3})^2-1=(x\sqrt{3}-1)(x\sqrt{3}+1)$.

c) $x^2-2=x^2-(\sqrt{2})^2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

d) Vì $\sqrt{x^3}=(\sqrt{x})^3$, $\sqrt{y^3}=(\sqrt{y})^3$ nên

$$\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}=(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x^2}-\sqrt{xy}+\sqrt{y^2})$$
$$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y).$$

e) Vì $\sqrt{a^3}=(\sqrt{a})^3$, $\sqrt{b^3}=(\sqrt{b})^3$ nên

$$\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}=(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a^2}+\sqrt{ab}+\sqrt{b^2})$$
$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b).$$

f) Vì $\sqrt{x^3}=(\sqrt{x})^3$ nên $\sqrt{x^3}-8=(\sqrt{x})^3-2^3=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x^2}+2\sqrt{x}+2^2)$

$$=(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4).$$

Ví dụ 3: Cho hai biểu thức

$R=x+y+2\sqrt{xy}$;

$Q=x+y-2\sqrt{xy}$ với $x\geq 0$; $y\geq 0$.

a) Hãy viết R, Q thành bình phương một nhị thức.

b) Thay các cặp số (x, y)= (2; 3)(3; 4)(7; 5) vào R, Q để được các bình phương một nhị thức.

Giải

Với với $x\geq 0$; $y\geq 0$ thì $x=(\sqrt{x})^2, y=(\sqrt{y})^2$ và $\sqrt{x.y}=\sqrt{x}.\sqrt{y}$

Nên $P=(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+2\sqrt{x.y}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ (1)

$Q=(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2-2\sqrt{x.y}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ (2)

b) Với x = 2; y = 3 ta có

$$5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2.3}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$$

$$5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2.3}=(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2;$$

x = 3; y = 4 ta có

$$7+2\sqrt{12}=(\sqrt{4})^2+(\sqrt{3})^2+2\sqrt{4.3}=(2+\sqrt{3})^2$$

$$7-2\sqrt{12}=(\sqrt{4})^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{4.3}=(2-\sqrt{3})^2;$$

x = 7; y = 5 ta có

$$12+2\sqrt{35}=(\sqrt{7})^2+(\sqrt{5})^2+2\sqrt{7.5}=(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2$$

$$12-2\sqrt{35}=(\sqrt{7})^2+(\sqrt{5})^2-2\sqrt{7.5}=(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2.$$

Ví dụ 4: Phân tích thành nhân tử bằng phương pháp nhóm các số hạng:

a) $1+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}$; b) $\sqrt{ax}-\sqrt{by}-\sqrt{ay}+\sqrt{bx}$;

c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x^2y}+\sqrt{xy^2}$; d) $x+2\sqrt{xy}+y-4$.

Giải

a) $1+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}=1(1+\sqrt{a})+\sqrt{b}(1+\sqrt{a})=(1+\sqrt{a})(1+\sqrt{b})$.

b) $\sqrt{ax}-\sqrt{by}-\sqrt{ay}+\sqrt{bx}=\sqrt{ax}+\sqrt{bx}-\sqrt{ay}-\sqrt{by}$

$=\sqrt{x}(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{y}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$.

c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x^2y}+\sqrt{xy^2}=1.(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1+\sqrt{xy})$.

d) $x+2\sqrt{xy}+y-4=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-4=(\sqrt{x}+\sqrt{y}-2)(\sqrt{x}+\sqrt{y}+2)$.

Ví dụ 5: Phân tích thành nhân tử bằng cách tách hoặc thêm bớt các số hạng:

a) $x-\sqrt{x}-6$; b) $x+\sqrt{x}-12$;

c) $2a+\sqrt{ab}-3b$ với $a\ge 0$; $b\ge 0$; d) $2a-5\sqrt{ab}+3b$ với $a\ge 0$; $b\ge 0$.

Giải

a) $x-\sqrt{x}-6=(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}+2\sqrt{x}-6=\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+2(\sqrt{x}-3)$

$=(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)$.

b) $x+\sqrt{x}-12=(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}+4\sqrt{x}-12$

$=\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)-3(\sqrt{x}+4)=(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-3)$.

c) Với $a\geq 0; b\geq 0$ thì $a=(\sqrt{a})^2$, $b=(\sqrt{b})^2$ và $\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$ nên

$2a+\sqrt{ab}-3b=2(\sqrt{a})^2+3\sqrt{ab}-2\sqrt{ab}-3(\sqrt{b})^2$

$=\sqrt{a}(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})-\sqrt{b}(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})$

$=(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

d) Với $a\geq 0$; $b\geq 0$ thì $a=(\sqrt{a})^2$, $b=(\sqrt{b})^2$ và $\sqrt{ab}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$ nên

$2a-5\sqrt{ab}+3b=2(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}+3(\sqrt{b})^2$

$=2\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})-3\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

$=(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

III. Bài tập

Phân tích thành nhân tử (các bài 31, 32, 33):

31. a) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$; b) $\sqrt{3}+\sqrt{15}$;

c) $a+2\sqrt{a}$; d) $4+5\sqrt{2}$;

e) $3+\sqrt{3}$; f) $b+3a\sqrt{b}$.

32. a) $6x-\sqrt{x}-1$; b) $4x-3\sqrt{x}-1$;

c) $3a-2\sqrt{ab}-b$ với $a>0; b>0$; d) $5x+3\sqrt{xy}-8y$ với $x>0; y>0$.

33. a) $10+2\sqrt{21}$; b) $12-2\sqrt{27}$;

c) $11+2\sqrt{30}$; d) $14-2\sqrt{45}$.

Dạng 4
RÚT GỌN BIỂU THỨC

I. Phương pháp giải

1. Rút gọn thường đi kèm với khai triển.
2. Rút gọn đồng nghĩa với thu gọn và giản ước (xem dạng 4 chủ đề 2).

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{2a}.\sqrt{18a}$ với $a \geq 0$;

b) $\sqrt{3a.27ab^2}$;

c) $\sqrt{\dfrac{9a^2}{16}}$;

d) $\sqrt{\dfrac{2a^2b^4}{98}}$.

Giải

a) $\sqrt{2a}.\sqrt{18a} = \sqrt{2a.18a} = \sqrt{(6a)^2} = |6a| = 6a$ Vì $a \geq 0$.

b) $\sqrt{3a.27ab^2} = \sqrt{(9ab)^2} = |9ab|$.

c) $\sqrt{\dfrac{9a^2}{16}} = \dfrac{\sqrt{9a^2}}{\sqrt{16}} = \dfrac{\sqrt{9}.\sqrt{a^2}}{4} = \dfrac{3|a|}{4}$.

d) $\sqrt{\dfrac{2a^2b^4}{98}} = \dfrac{\sqrt{a^2b^4}}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sqrt{b^4}.\sqrt{a^2}}{7} = \dfrac{|a||b^2|}{7} = \dfrac{b^2|a|}{7}$.

Ví dụ 2: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{0,16a^2}$ với $a < 0$;

b) $\sqrt{a^4(3-a)^2}$ với $a \geq 3$;

c) $\dfrac{y}{x}\sqrt{\dfrac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0$, $y \neq 0$;

d) $2y^2.\sqrt{\dfrac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$.

Giải

a) $\sqrt{0,16a^2} = \sqrt{0,16}.\sqrt{a^2} = |0,4|.|a| = -0,4.a$ vì $a < 0$.

b) $\sqrt{a^4(3-a)^2} = \sqrt{a^4}.\sqrt{(a-3)^2} = |a^2||a-3| = a^2(a-3)$

Vì $a^2 \geq 0$ với mọi a và $a \geq 3$.

c) $\dfrac{y}{x}\sqrt{\dfrac{x^2}{y^4}} = \dfrac{y\sqrt{x^2}}{x\sqrt{y^4}} = \dfrac{y|x|}{x|y^2|} = \dfrac{yx}{xy^2} = \dfrac{1}{y}$ Vì $x > 0$ và $y^2 > 0$.

d) $2y^2.\sqrt{\dfrac{x^4}{4y^2}} = 2y^2\dfrac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{4y^2}} = \dfrac{2y^2|x^2|}{\sqrt{4}\sqrt{y^2}} = \dfrac{2y^2x^2}{-2y} = -x^2y$.

Vì $y < 0$ và $x^2 \geq 0$ với mọi x.

Ví dụ 3: Rút gọn phân thức:

a) $M = \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\sqrt{21}-\sqrt{14}}$;

c) $N = \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{30}+\sqrt{18}}$;

c) $P = \dfrac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}}$ với $a > 0, b > 0$;

d) $Q = \dfrac{1 + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}}{1 + \sqrt{y}}$ với $x > 0, y > 0$.

Giải

a) Vì $\sqrt{15} - \sqrt{10} = \sqrt{5}\sqrt{3} - \sqrt{5}\sqrt{2} = \sqrt{5}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;

$\sqrt{21} - \sqrt{14} = \sqrt{7}\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{7} = \sqrt{7}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;

nên $M = \dfrac{\sqrt{15} - \sqrt{10}}{\sqrt{21} - \sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{5}{7}}$.

b) Vì $\sqrt{10} + \sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{5} + \sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})$;

$\sqrt{30} + \sqrt{18} = \sqrt{6}\sqrt{5} + \sqrt{6}\sqrt{3} = \sqrt{6}(\sqrt{5} + \sqrt{3})$;

nên $N = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{6}(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{2}{6}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

c) Vì $a + \sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2 + \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$b + \sqrt{ab} = (\sqrt{b})^2 + \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

nên $P = \dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

d) Vì $1 + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy} = 1(1 + \sqrt{x}) + \sqrt{y}(1 + \sqrt{x}) = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{y})$

nên $Q = \dfrac{(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{y})}{1(1 + \sqrt{y})} = 1 + \sqrt{x}$.

Ví dụ 4*: Rút gọn:

a) $A = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{3}$;

b) $B = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$;

c) $C = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$;

d) $D = \sqrt{9 - 2\sqrt{14}} - \sqrt{9 + 2\sqrt{14}}$.

Giải

a) Vì $A = 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ nên

$$A = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{2}.$$

b) Vì $B = 8 - 2\sqrt{15} = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{3} = (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$ nên

$$B = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{3} = 2\sqrt{5}.$$

c) Vì $7+2\sqrt{10}=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}=(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

$7-2\sqrt{10}=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{5}\sqrt{2}=(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$

nên $C=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

d) Vì $9-2\sqrt{14}=(\sqrt{7})^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{7}\sqrt{2}=(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2$

$9+2\sqrt{14}=(\sqrt{7})^2+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{7}\sqrt{2}=(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$

nên $D=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{2}+\sqrt{7}+\sqrt{2}=2\sqrt{7}$

(do $\sqrt{7}>\sqrt{2}$).

III. Bài tập

Rút gọn biểu thức (các bài 34, 35, 36, 37)

34. a) $\dfrac{\sqrt{45x^3}}{\sqrt{5x}}$ với $x>0$; b) $\dfrac{\sqrt{75y^3}}{\sqrt{3y^5}}$ với $y>0$;

c) $\dfrac{\sqrt{80ab^2}}{\sqrt{125a}}$ với $a>0$, $b>0$; d) $\dfrac{\sqrt{81x^4y^6}}{\sqrt{729x^6y^6}}$ với $x<0$, $y\neq 0$.

35. a) $\sqrt{9(x-2)^2}$ với $x\le 2$; b) $\sqrt{16(y-1)^2}$ với $y\ge 1$;

c) $\sqrt{x^2(x+3)^2}$ với $x\ge 0$; d) $\sqrt{y^2(y-2)^2}$ với $y<0$.

36. a) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}$;

c) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}$; d) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

e) $\dfrac{y-2\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2}$.

37. a) $M=\dfrac{x+2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$; b) $N=\dfrac{4y+3\sqrt{y}-7}{4\sqrt{y}+7}$;

c) $P=\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; d) $Q=\dfrac{x-3\sqrt{x}-4}{x-\sqrt{x}-12}$.

Dạng 5

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN BẬC HAI

I. Phương pháp giải

Biến đổi phương trình về một trong 4 dạng sau:

1. $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ a = x^2 \end{cases}$ (định nghĩa căn bậc hai số học)

2. $x^2 = a$ (tìm căn bậc hai của a)

3. $|x| = a$

4. $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a = b \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b \geq 0 \\ a = b \end{cases}$

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Tìm x biết:

a) $\sqrt{3x} = 6$; b) $\sqrt{2x} = \sqrt{3}$;

c) $\sqrt{4(x-1)} = 6$; d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$.

Giải

a) $\sqrt{3x} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \geq 0 \\ 3x = 6^2 \end{cases} \Leftrightarrow 3x = 36 \Leftrightarrow x = 12$. Vậy $x = 12$ là giá trị cần tìm.

b) $\sqrt{2x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Vậy $x = \frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) $\sqrt{4(x-1)} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \geq 0 \\ 4(x-1) = 6^2 \end{cases} \Leftrightarrow 4(x-1) = 36 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10$

Vậy $x = 10$ là giá trị cần tìm.

d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0 \Leftrightarrow |2(x-1)| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(x-1) = 6 \\ 2(x-1) = -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Vậy $x = 4$ và $x = -2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

a) $\sqrt{2}x - \sqrt{6} = 0$; b) $\sqrt{3}x + \sqrt{3} = \sqrt{12} + \sqrt{27}$;

c) $\sqrt{6}x^2 - \sqrt{20} = 0$; d) $\frac{x^2}{\sqrt{3}} - \sqrt{12} = 0$.

Giải

a) $\sqrt{2}x-\sqrt{6}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x=6 \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{6}{2}}=\sqrt{3}$ Vậy $S=\{\sqrt{3}\}$.

b) $\sqrt{3}x+\sqrt{3}=\sqrt{12}+\sqrt{27} \Leftrightarrow \sqrt{3}(x+1)=\sqrt{3}(\sqrt{4}+\sqrt{9})$

$\Leftrightarrow x+1=2+3 \Leftrightarrow x=4$. Vậy $S=\{4\}$.

c) $\sqrt{5}x^2-\sqrt{20}=0 \Leftrightarrow \sqrt{5}x^2=\sqrt{20} \Leftrightarrow x^2=\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{20}{5}}=\sqrt{4}=2$.

Vì $2>0$ nên có hai căn bậc hai là $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$. Suy ra $x^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy $S=\{\sqrt{2};-\sqrt{2}\}$.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

a) $(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}-8)=x+11$;

b) $(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-5)=x-17$;

c) $1-\dfrac{2\sqrt{x}-5}{6}=\dfrac{3-\sqrt{x}}{4}$;

d) $(\sqrt{x}+3)^2-x+3=0$.

Giải

a) $(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}-8)=x+11$

$\Leftrightarrow x-15\sqrt{x}+56=x+11$

$\Leftrightarrow 56-11=x-x+15\sqrt{x} \Leftrightarrow 45=15\sqrt{x} \Leftrightarrow 3=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=9$

Vậy $S=\{9\}$.

b) $(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-5)=x-17$

$\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-15=x-17$

$\Leftrightarrow -15+17=x-x+2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2=2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy $S=\{1\}$.

c) $1-\dfrac{2\sqrt{x}-5}{6}=\dfrac{3-\sqrt{x}}{4}$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{2(2\sqrt{x}-5)}{12}=\dfrac{3-\sqrt{x}}{4}$

$\Leftrightarrow 12-2(2\sqrt{x}-5)=3(3-\sqrt{x})$

$\Leftrightarrow 12-4\sqrt{x}+10=9-3\sqrt{x})$

$\Leftrightarrow 12+10-9=-3\sqrt{x}+4\sqrt{x}) \Leftrightarrow 13=\sqrt{x} \Leftrightarrow 169=x$.

Vậy $S=\{169\}$.

d) $(\sqrt{x}+3)^2-x+3=0$

$\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1-x+3=0 \Leftrightarrow 4=2\sqrt{x} \Leftrightarrow x=4$.

Vậy $S=\{4\}$.

III. Bài tập

Giải phương trình (các bài 38, 39, 40)

38. a) $\sqrt{5x}=15$; b) $\sqrt{3x}=\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{9(x-2)}=6$; d) $\sqrt{9(x-3)^2}=12$.

39. a) $2\sqrt{2x}-\sqrt{8}=0$; b) $\sqrt{6}x+\sqrt{6}=\sqrt{54}+\sqrt{24}$;

c) $\sqrt{7}x^2-\sqrt{63}=0$; d) $\dfrac{x^2}{\sqrt{10}}-\sqrt{12,1}=0$.

40. a) $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)=x-10$; b) $(\sqrt{x}-2)^2-x+8=0$;

c) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{3}=\sqrt{x}-1$; d) $x-(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}-5)=-38$.

Chủ đề 4

BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai

1. Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn

Từ quy tắc khai phương một tích ta có:

$\sqrt{A^2B}=\sqrt{A^2}.\sqrt{B}=|A|\sqrt{B}$ với $(B\geq 0)$

Tức là: $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$ với $A \geq 0$ và $B \geq 0$

$\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}$ với $A \leq 0$ và $B \geq 0$.

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

Từ $A=\sqrt{A^2}$ với $A \geq 0$ và quy tắc nhân căn bậc hai ta có:

Với $A \geq 0$, $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B}=\sqrt{A^2}.\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}$

Với $A < 0$, $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B}=-\sqrt{A^2B}$.

3. Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn

Từ quy tắc khai phương một thương ta có:

Với $A.B \geq 0$ và $B \neq 0$ thì $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \sqrt{\dfrac{A.B}{B^2}} = \dfrac{\sqrt{AB}}{\sqrt{B^2}} = \dfrac{\sqrt{AB}}{|B|}$.

4. Trục căn thức ở mẫu

Muốn trục căn thức ở mẫu ta thường nhân liên hợp để làm xuất hiện $\sqrt{A^2}$.

Vì $\sqrt{a}.\sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$, ta nói $\sqrt{a}$ liên hợp với $\sqrt{a}$.

Vì $(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = \sqrt{A^2} - \sqrt{B^2} = A - B$, ta nói $(\sqrt{A} - \sqrt{B})$ liên hợp với $(\sqrt{A} + \sqrt{B})$ và ngược lại.

II. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

1. Để rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai, ta cần vận dụng phối hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.
2. Khi rút gọn một dãy các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa và khai căn thì thứ tự thực hiện khai căn trước rồi đến lũy thừa, sau đó đến nhân, chia, cộng, trừ.

III. Bổ sung kiến thức: Chứng minh bất đẳng thức

1. Phép lập luận nhằm chứng tỏ một bất đẳng thức dạng $A > B$ (hoặc $A \geq B$, $A < B$, $A \leq B$) là đúng được gọi là phép chứng minh bất đẳng thức.
2. Để chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ ta thường chứng minh theo một trong các sơ đồ sau:

   Sơ đồ 1: Tạo ra dãy các bất đẳng thức trung gian:

   $$A \geq A_1 \geq A_2 \geq A_3 ...... \geq A_n \geq B$$

   Sơ đồ 2: Tạo ra các bất đẳng thức bộ phận:

$$+\begin{cases} A_1 \geq B_1 \\ A_2 \geq B_2 \\ \dots\dots\dots \\ A_n \geq B_n \end{cases} \qquad \text{hoặc} \qquad \times\begin{cases} A_1 \geq B_1 \geq 0 \\ A_2 \geq B_2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ A_n \geq B_n \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A \geq B$ (Phép cộng các BĐT cùng chiều)

$\Rightarrow A \geq B$ (Phép nhân các BĐT cùng chiều)

Trong cả hai sơ đồ trên thì dấu bằng của BĐT phải chứng minh xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng ở các BĐT bộ phận phải đồng thời xảy ra.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI DẤU CĂN
RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

I. Phương pháp giải

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Chia các số trong dấu căn cho các số chính phương 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...

Tách các biểu thức chứa biến thành lũy thừa chẵn.

2. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Đưa thừa số ra ngoài dấu căn.

Thu gọn các căn thức đồng dạng.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{8}$, $\sqrt{20}$; b) $\sqrt{18}$, $\sqrt{45}$;

c) $\sqrt{32}$, $\sqrt{80}$.

Giải

a) Vì $8 = 4.2$ nên $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}.\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

$20 = 4.5$ nên $\sqrt{20} = \sqrt{4.5} = \sqrt{4}.\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

b) $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = \sqrt{9}.\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$;

$\sqrt{45} = \sqrt{9.5} = \sqrt{9}.\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$;

c) $\sqrt{32} = \sqrt{16.2} = \sqrt{16}.\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$;

$\sqrt{80} = \sqrt{16.5} = \sqrt{16}.\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

Ví dụ 2: Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{50a}$; b) $\sqrt{75x}$.

Giải

a) $\sqrt{50a} = \sqrt{25.2a} = 5\sqrt{2a}$

b) $\sqrt{75x} = \sqrt{25.3x} = 5\sqrt{3x}$.

Ví dụ 3: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{28x^4y^2}$ với $y \leq 0$; b) $\sqrt{63a^2b^4}$ với $a \geq 0$;

c) $\sqrt{147(a-1)^3}$; d) $\sqrt{192(y+2)^5}$.

Giải

a) $\sqrt{28x^4y^2} = \sqrt{(2x^2y)^2.7} = \left|2x^2y\right|\sqrt{7} = -2x^2y\sqrt{7}$ (vì $y \leq 0$).

b) $\sqrt{63a^2b^4} = \sqrt{(3ab^2)^2.7} = \left|3ab^2\right|\sqrt{7} = 3ab^2\sqrt{7}$ (vì $a \geq 0$).

c) $\sqrt{147(a-1)^3} = \sqrt{[7(a-1)]^2\,3(a-1)} = 7(a-1)\sqrt{3(a-1)}$.

d) $\sqrt{192(y+2)^5} = \sqrt{\left[8(y+2)^2\right]^2.3(y+2)} = 8(y+2)^2\sqrt{3(y+2)}$.

Ví dụ 4: Rút gọn các biểu thức sau:

$A = 2\sqrt{8} - 3\sqrt{32} + \sqrt{50}$;

$B = \sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 3\sqrt{48}$;

$C = \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} - 2\sqrt{125a}$ với $a \geq 0$.

Giải

a) Vì $2\sqrt{8} = 2\sqrt{4.2} = 4\sqrt{2}$; $3\sqrt{32} = 3\sqrt{16.2} = 12\sqrt{2}$ và $\sqrt{50} = \sqrt{25.2} = 5\sqrt{2}$

nên $A = 4\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$.

b) Vì $\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = 2\sqrt{3}$; $4\sqrt{27} = 4\sqrt{9.3} = 12\sqrt{3}$ và $3\sqrt{48} = 3\sqrt{16.3} = 12\sqrt{3}$

nên $B = 2\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

c) Vì $\sqrt{20} = \sqrt{4.5a} = 2\sqrt{5a}$; $5\sqrt{45a} = 5\sqrt{9.5a} = 15\sqrt{5a}$ và

$2\sqrt{125a} = 2\sqrt{25.5a} = 10\sqrt{5a}$ nên $C = 2\sqrt{5a} + 15\sqrt{5a} - 10\sqrt{5a} = 7\sqrt{5a}$.

Ví dụ 5: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $M = \sqrt{4(x-1)} - \sqrt{9(x-1)} - \sqrt{16(x-1)}$ với $x \geq 1$;

b) $N = \sqrt{25(y+4)} + \sqrt{36(y+4)} - 2\sqrt{81(y+4)}$ với $y \geq -4$;

c) $P = \sqrt{(y-2)} - 3\sqrt{64(y-2)} + 4\sqrt{49(y-2)}$ với $y \geq 2$.

Giải

a) $M = \sqrt{4(x-1)} - \sqrt{9(x-1)} - \sqrt{16(x-1)} = 2\sqrt{x-1} - 3\sqrt{x-1} - 4\sqrt{x-1}$

$= -5\sqrt{x-1}$.

b) $N = \sqrt{25(y+4)} + \sqrt{36(y+4)} - 2\sqrt{81(y+4)}$

$= 5\sqrt{y+4} + 6\sqrt{y+4} - 18\sqrt{y+4} = -7\sqrt{y+4}$.

c) $P = \sqrt{(y-2)} - 3\sqrt{64(y-2)} + 4\sqrt{49(y-2)} = \sqrt{y-2} - 24\sqrt{y-2} + 28\sqrt{y-2}$

$= 5\sqrt{y-2}$.

III. Bài tập

41. Đưa một thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{72}$, $\sqrt{108}$, $\sqrt{180}$; b) $\sqrt{128}$, $\sqrt{192}$, $\sqrt{320}$;

c) $\sqrt{162}$, $\sqrt{243}$, $\sqrt{405}$.

Rút gọn biểu thức (các bài 42, 43):

42. a) $M = \sqrt{12} + 2\sqrt{27} - 9\sqrt{48}$; b) $N = \sqrt{125} - 3\sqrt{45} + 2\sqrt{20}$;

c) $P = 4\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{16(x^2+1)} + 5\sqrt{25(x^2+1)}$.

43. a) $A = \dfrac{2}{x+y}\sqrt{\dfrac{3(x+y)^2}{4}}$ với $x + y > 0$;

b) $B = \dfrac{3}{3a-1}\sqrt{5a(1-6a+a^2)}$ với $a > \dfrac{1}{3}$.

Dạng 2

ĐƯA MỘT THỪA SỐ VÀO TRONG DẤU CĂN SẮP THỨ TỰ CÁC CĂN BẬC HAI

I. Phương pháp giải

1. Viết $A \geq 0$ thành $\sqrt{A^2}$.

2. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai.

3. Rút gọn biểu thức trong căn.

4. So sánh các căn bậc hai nhờ định lý

$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ với $a \geq 0$; $b \geq 0$.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Đưa một thừa số vào trong dấu căn.

$$2\sqrt{5},\quad -3\sqrt{2},\quad -\frac{2}{3}\sqrt{ab},\quad a\sqrt{\frac{3}{a}} \text{ với } a > 0, b \geq 0.$$

Giải

Vì $2 = \sqrt{2^2}$ nên $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2}.\sqrt{5} = \sqrt{2^2.5} = \sqrt{20}$;

$3 = \sqrt{3^2}$ nên $-3\sqrt{2} = -\sqrt{3^2}.\sqrt{2} = -\sqrt{3^2.2} = -\sqrt{18}$;

$\frac{2}{3} = \sqrt{(\frac{2}{3})^2}$ nên $-\frac{2}{3}\sqrt{ab} = -\sqrt{(\frac{2}{3})^2}.\sqrt{ab} = -\sqrt{\frac{4ab}{9}}$;

$a = \sqrt{a^2}$ do $a > 0$ nên $a\sqrt{\frac{3}{a}} = \sqrt{a^2}.\sqrt{\frac{3}{a}} = \sqrt{a^2.\frac{3}{a}} = \sqrt{3a}$.

Ví dụ 2: So sánh

a) $2\sqrt{3}$ và $\sqrt{13}$; b) 7 và $3\sqrt{5}$;

c) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Giải

a) Ta có $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2.3} = \sqrt{12} < \sqrt{13}$.

b) Vì $7 = \sqrt{49}$ và $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2.5} = \sqrt{45} < \sqrt{49}$.

Vậy $3\sqrt{5} < 7$.

c) Vì $\frac{1}{3}\sqrt{51} = \sqrt{\frac{51}{3^2}} = \sqrt{\frac{17}{3}}$ và $\frac{1}{5}\sqrt{150} = \sqrt{\frac{150}{5^2}} = \sqrt{6}$ nên

$$\sqrt{6} > \sqrt{\frac{17}{3}} \Rightarrow \frac{1}{5}\sqrt{150} > \frac{1}{3}\sqrt{51}.$$

d) Vì $\frac{1}{2}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{6}{2^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1.36}{2}} = \sqrt{18}$ nên

$$\sqrt{18} > \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{6} < 6\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Ví dụ 3: Sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

a) $3\sqrt{5},\ 2\sqrt{6},\ \sqrt{29},\ 4\sqrt{2}$; b) $6\sqrt{2},\ \sqrt{38},\ 3\sqrt{7},\ 2\sqrt{14}$.

Giải

Đưa một thừa số vào trong dấu căn rồi sắp thứ tự các số trong dấu căn.

a) Ta có $3\sqrt{5} = \sqrt{9.5} = \sqrt{45}$, $2\sqrt{6} = \sqrt{4.6} = \sqrt{24}$, $4\sqrt{2} = \sqrt{32}$ nên

$\sqrt{24} < \sqrt{29} < \sqrt{32} < \sqrt{45}$. Suy ra $2\sqrt{6} < \sqrt{29} < 4\sqrt{2} < 3\sqrt{5}$.

b) Ta có $6\sqrt{2} = \sqrt{6^2.2} = \sqrt{72}$, $3\sqrt{7} = \sqrt{9.7} = \sqrt{63}$, $2\sqrt{14} = \sqrt{2^2.14} = \sqrt{56}$.

nên $\sqrt{38} < \sqrt{56} < \sqrt{63} < \sqrt{72}$. Suy ra $\sqrt{38} < 2\sqrt{14} < 3\sqrt{7} < 6\sqrt{2}$

III. Bài tập

44. Đưa một thừa số vào trong dấu căn:

a) $a\sqrt{7}$ với $a \geq 0$;

b) $b\sqrt{3}$ với $b < 0$;

c) $ab\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ với $b \geq 0$, $a > 0$;

d) $ab\sqrt{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$ với $a > 0$, $b > 0$.

45. So sánh:

a) $3\sqrt{5}$ và $4\sqrt{3}$;

b) $\dfrac{1}{3}\sqrt{15}$ và $\dfrac{1}{4}\sqrt{20}$.

46. Sắp xếp theo thứ tự giảm dần:

a) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$, $2\sqrt{6}$;

b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$, $\dfrac{1}{3}\sqrt{39}$, $\dfrac{1}{5}\sqrt{35}$, $\dfrac{1}{4}\sqrt{32}$.

Dạng 3

KHỬ MẪU CỦA BIỂU THỨC LẤY CĂN. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI CỦA PHÂN THỨC

I. Phương pháp giải

1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

Nhân tử và mẫu của phân thức ở trong căn với mẫu số.

Áp dụng quy tắc khai phương một thương.

Đưa thừa số ra ngoài dấu căn rồi giản ước cho nhân tử chung.

2. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai của phân thức

Khử mẫu của biểu thức lấy căn.

Thu gọn các căn thức đồng dạng.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$;

b) $\sqrt{\frac{3a}{5b}}$ với $a.b > 0$;

c) $\sqrt{\frac{5}{12}}$;

d) $\sqrt{\frac{5x}{18y}}$ với $x.y > 0$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3.2}{2.2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

b) $\sqrt{\frac{3a}{5b}} = \sqrt{\frac{3a.5b}{5b.5b}} = \frac{\sqrt{15ab}}{\sqrt{(5b)^2}} = \frac{\sqrt{15ab}}{5|b|}$.

c) $\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5.12}{12.12}} = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{12^2}} = \frac{\sqrt{4.15}}{12} = \frac{2\sqrt{15}}{12} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

d) $\sqrt{\frac{5x}{18y}} = \sqrt{\frac{5x.18y}{18y.18y}} = \frac{\sqrt{90xy}}{\sqrt{(18y)^2}} = \frac{3\sqrt{10xy}}{18|y|} = \frac{\sqrt{10xy}}{6|y|}$.

Ví dụ 2: Khử mẫu của biểu thức lấy căn:

a) $\sqrt{\frac{24}{5}}$;

b) $\sqrt{\frac{3}{125}}$ với $x > 0$;

c) $\sqrt{\frac{3}{2x^3}}$;

d) $\sqrt{\frac{5}{98a^3}}$ với $a > 0$.

Giải

a) $\sqrt{\frac{24}{5}} = \sqrt{\frac{24.5}{5.5}} = \frac{\sqrt{4.30}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$.

b) $\sqrt{\frac{3}{125}} = \sqrt{\frac{3.125}{125.125}} = \frac{\sqrt{25.15}}{\sqrt{125^2}} = \frac{5\sqrt{15}}{125} = \frac{\sqrt{15}}{25}$.

c) $\sqrt{\frac{3}{2x^3}} = \sqrt{\frac{3.2x^3}{2x^3.2x^3}} = \frac{\sqrt{x^2.6x}}{\sqrt{(2x^3)^2}} = \frac{x\sqrt{6x}}{2x^3} = \frac{\sqrt{6x}}{2x^2}$ (vì $x > 0$).

d) $\sqrt{\frac{5}{98a^3}} = \sqrt{\frac{5.98a^3}{98a^3.98a^3}} = \frac{\sqrt{49a^2.10a}}{\sqrt{(98a^3)^2}} = \frac{7a\sqrt{10a}}{98a^3} = \frac{\sqrt{10a}}{14a^2}$ (vì $a > 0$).

Ví dụ 3: Rút gọn các biểu thức sau đây:

a) $M = 5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{5}{2}\sqrt{\frac{4}{5}} - 3\sqrt{5}$; b) $N = 3\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} - \sqrt{12,5}$;

c) $P = \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{1\frac{1}{5}} + 4\sqrt{3}$; d) $Q = 2\sqrt{a} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + a^2\sqrt{\frac{9}{a^3}}$.

Giải

a) Vì $\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1.5}{5.5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{4.5}{5.5}} = \frac{\sqrt{4.5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, nên

$$M = 5.\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{5}{2}.\frac{2\sqrt{5}}{5} - 3\sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{5} - 3\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

b) Vì $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1.2}{2.2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{4,5} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9.2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{12,5} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{\sqrt{25.2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ nên

$$N = 3.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) Vì $\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1.3}{3.3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{1\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4.3}{3.3}} = \frac{\sqrt{4.3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ nên

$$P = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4\sqrt{3} = \sqrt{3}(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 4) = 5\sqrt{3}.$$

d) Vì $\sqrt{\frac{4}{a}} = \sqrt{\frac{4.a}{a.a}} = \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{2\sqrt{a}}{a}, \sqrt{\frac{9a}{a^3}} = \sqrt{\frac{9.a}{a^3.a}} = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{(a^2)^2}} = \frac{3\sqrt{a}}{a^2}$ nên

$$Q = 2\sqrt{a} - a.\frac{2\sqrt{a}}{a} + a^2.\frac{3\sqrt{a}}{a^2} = 2\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 3\sqrt{a}.$$

III. Bài tập

Khử mẫu của biểu thức lấy dấu căn (các bài 47 và 48):

47. $\sqrt{\frac{1}{200}}$; $\sqrt{\frac{11}{180}}$; $\sqrt{\frac{5}{27}}$; $\sqrt{\frac{5}{128}}$; $\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})^3}{27}}$.

48. $xy\sqrt{\dfrac{x}{y}}$; $\dfrac{x}{y}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$; $\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}}$; $\sqrt{\dfrac{4x^3}{25y}}$; $2ab\sqrt{\dfrac{3}{ab}}$.

(với giả thiết các căn bậc hai có nghĩa)

Rút gọn biểu thức (các bài 49 và 50):

49. a) $A=\sqrt{\dfrac{2}{3}}+2\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{6}$; b) $B=3\sqrt{\dfrac{2}{5}}+\sqrt{\dfrac{5}{2}}-2\sqrt{10}$;

c) $C=-\sqrt{\dfrac{3}{5}}+3\sqrt{\dfrac{5}{3}}-4\sqrt{15}$.

10. a) $M=\sqrt{\dfrac{3a}{7}}-2\sqrt{\dfrac{7a}{3}}+\sqrt{21a}$; b) $N=\sqrt{\dfrac{8x}{3}}-\sqrt{\dfrac{27x}{2}}+\sqrt{6x}$;

c) $P=2\sqrt{\dfrac{8y}{5}}+\sqrt{\dfrac{45y}{2}}-\sqrt{10y}$.

Dạng 4
TRỤC CĂN THỨC Ở MẪU SỐ
RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI Ở MẪU SỐ

I. Phương pháp giải

1. Trục căn thức ở mẫu số

Xác định biểu thức liên hợp.

Nhân liên hợp để khai căn.

Giản ước, thu gọn (nếu được).

2. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai ở mẫu

Trục căn thức ở mẫu.

Thu gọn các căn thức đồng dạng.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

c) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; d) $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$;

e) $\dfrac{5}{\sqrt{20}}$; f) $\dfrac{6}{\sqrt{8}}$.

Giải

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

c) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

d) $\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4.\sqrt{6}}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6^2}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

e) Vì $\sqrt{20}$ liên hợp với $\sqrt{5}$ (do $\sqrt{20}\,.\sqrt{5} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$) nên

$$\frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{5.\sqrt{5}}{\sqrt{20}.\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{10^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

f) Vì $\sqrt{8}$ liên hợp với $\sqrt{2}$ (do $\sqrt{8}\,.\sqrt{2} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$) nên

$$\frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{6.\sqrt{2}}{\sqrt{8}.\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{4^2}} = \frac{6\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 2: Trục căn thức ở mẫu với giả thiết a, b, x, y là những số dương:

a) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; b) $\frac{a}{\sqrt{ab}}$;

c) $\frac{x}{\sqrt{3x^3}}$; d) $\frac{4y^2}{\sqrt{2y^5}}$.

Giải

a) $\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

b) $\frac{a}{\sqrt{ab}} = \frac{a\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\sqrt{ab}} = \frac{a\sqrt{ab}}{(\sqrt{ab})^2} = \frac{a\sqrt{ab}}{ab} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$.

c) $\frac{x}{\sqrt{3x^3}} = \frac{x\sqrt{3x}}{\sqrt{3x^3}\sqrt{3x}} = \frac{x\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x^2})^2} = \frac{x\sqrt{3x}}{3x^2} = \frac{\sqrt{3x}}{3x}$.

d) $\frac{4y^2}{\sqrt{2y^5}} = \frac{4y^2\sqrt{2y}}{\sqrt{2y^5}\sqrt{2y}} = \frac{4y^2\sqrt{2y}}{(\sqrt{2y^3})^2} = \frac{4y^2\sqrt{2y}}{2y^3} = \frac{2\sqrt{2y}}{y}$.

Ví dụ 3: Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$; b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$;

c) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$; d) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

e) $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$; f) $\dfrac{6}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Giải

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{1(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$.

b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\sqrt{3}-1$.

c) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}$

$=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

d) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{4(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{4(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{4(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}$

$=4(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

e) $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\dfrac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}=\dfrac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2}$

$=\sqrt{7}+\sqrt{2}$.

f) $\dfrac{6}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{6(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{6(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{6(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{12-2}=\dfrac{3(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{5}$.

Ví dụ 4: Trục căn thức ở mẫu:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+b}$; b) $\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

c) $\dfrac{3}{2\sqrt{a}+1}$; d) $\dfrac{2xy}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}$.

Giải

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+b}=\dfrac{1(\sqrt{a}-b)}{(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)}=\dfrac{\sqrt{a}-b}{(\sqrt{a})^2-b^2}=\dfrac{\sqrt{a}-b}{a-b^2}$.

b) $\dfrac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\dfrac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$.

c) $\dfrac{3}{2\sqrt{a}+1}=\dfrac{3(2\sqrt{a}-1)}{(2\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=\dfrac{3(2\sqrt{a}-1)}{(2\sqrt{a})^2-1^2}=\dfrac{3(2\sqrt{a}-1)}{4a-1}$.

d) $\dfrac{2xy}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}=\dfrac{2xy(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})}{(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})}$

$=\dfrac{2xy(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})}{(2\sqrt{x})^2-(3\sqrt{y})^2}=\dfrac{2xy(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})}{4x-9y}$.

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức:

a) $M=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$; b) $N=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$;

c) $P=\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; d) $Q=\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

Giải

a) $M=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{4}{2^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{4}{4-3}=4$.

b) $N=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)-2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1^2}$

$=\dfrac{4}{3-1}=2$.

c) $P=\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})+3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{3.2\sqrt{5}}{5-2}=2\sqrt{5}$.

d) $Q=\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})-4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{4.2\sqrt{3}}{7-3}=2\sqrt{3}$.

III. Bài tập

Trục căn thức ở mẫu số (các bài 51, 52)

51. a) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{26}{5+2\sqrt{3}}$;

c) $\dfrac{2\sqrt{6}-3}{4-\sqrt{6}}$; d) $\dfrac{15-2\sqrt{5}}{3\sqrt{15}-2\sqrt{3}}$.

52. a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$; b) $\dfrac{x-4y}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$;

c) $\dfrac{a-9b}{\sqrt{a}-3\sqrt{b}}$; d) $\dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Rút gọn biểu thức (các bài 53, 54, 55)

53. a) $A=\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}-\dfrac{6-2\sqrt{7}}{4}+\dfrac{6}{\sqrt{7}-2}-\dfrac{5}{4+\sqrt{7}}$;

b) $B=\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}+\dfrac{2}{\sqrt{6}+2}+\dfrac{5}{\sqrt{6}}$.

54. a) $C=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$;

b) $D=\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}-\dfrac{5}{\sqrt{5}}\right):\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

55*. a) $E=2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt{\sqrt{75}}-4\sqrt{15\sqrt{27}}$;

b) $F=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}}$.

Dạng 5
BIẾN ĐỔI ĐỒNG NHẤT CÁC BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

Thông thường dạng toán này cho dưới dạng tổng hợp, gồm

Một câu hỏi chính: Rút gọn biểu thức.

Các câu hỏi phụ:

1. Tìm giá trị của biểu thức.

2. Tìm giá trị của biến để biểu thức có giá trị bằng một giá trị cho trước.

3. Tìm giá trị của biến để biểu thức lớn hơn hay nhỏ hơn một giá trị cho trước.

I. Phương pháp giải

1. Với câu hỏi chính: Rút gọn biểu thức, có hai cách:

Cách 1: Sử dụng phép hữu tỉ hóa toàn phần:

Đặt biểu thức chứa dấu căn bằng biến mới, chuyển vô tỉ về hữu tỉ.

Cách 2: Biến đổi trực tiếp các biểu thức chứa căn.

2. Với các câu hỏi phụ: Khi làm những bài toán liên quan đến giá trị của biểu thức thì trước hết phải tìm điều kiện của biếnđể giá trị của biểu thức được xác định. Nếu tại giá trị của biến mà giá trị của một biểu thức được xác định thì biểu thức ấy và biểu thức được rút gọn của nó có cùng một giá trị.

3. Khi rút gọn phải thực hiện đúng thứ tự các phép tính.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho biểu thức: $P = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{3}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{6\sqrt{x}-4}{x-1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tính giá trị của biểu thức P tại x = 9.

3. Tìm x để $P < \dfrac{1}{2}$.

Giải

1. *Cách 1:* Đặt $\sqrt{x} = a$ thì $x = a^2$ thu được:

$$P = \frac{a}{a-1} + \frac{3}{a+1} - \frac{6a-4}{a^2-1}$$

$$= \frac{a(a+1)+3(a-1)}{a^2-1} - \frac{6a-4}{a^2-1} = \frac{a^2+a+3a-3+6a+4}{a^2-1}$$

$$= \frac{a^2-2a+1}{a^2-1} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)(a+1)} = \frac{a-1}{a+1}.$$

Thay $a = \sqrt{x}$ vào P ta được $P = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

Cách 2:

$$P = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)+3\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3-6\sqrt{x}+4}{x-1}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1.$$

2) Với $x = 9 \Rightarrow \sqrt{x} = 3$ thoả mãn điều kiện xác định.

Thay $\sqrt{x} = 3$ vào P ta được $P = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3) Do $x \geq 0$ và $x \neq 1$ nên $P < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} < \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x}-1) < \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-2 < \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3.$$

Từ $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$ nên $\sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 9$.

Vậy $0 \leq x \leq 9$ và $x \neq 1$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Cho biểu thức:

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}\right) \text{ với } x > 0,\ x \neq 1 \text{ và } x \neq 4.$$

1) Rút gọn Q.

2) Tìm x để $Q > 0$.

Giải

1) Vì Q có dạng m: n nên ta thực hiện theo thứ tự sau:

Làm tính ở ngoặc thứ nhất:

$$m = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x})-1}.$$

Làm tính ở ngoặc thứ hai:

$$n = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{x-1-x+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}.$$

Làm phép chia m cho n ta được:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}}.$$

2) Do $x > 0$, $x \neq 1$ và $x \neq 4$ suy ra $3\sqrt{x} > 0$ nên $Q > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}} > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4.$$

Ta thấy $x > 4$ thoả mãn điều kiện xác định.

Vậy $x > 4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3*: Cho biểu thức:

$$R = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right) \text{ với } x \geq 0,\ x \neq 1.$$

1) Rút gọn R.

2) Tìm x để $R = 7$.

3) Tính giá trị của R tại $x = 2(2+\sqrt{3})$.

4) Tìm x để $R < 1$.

Giải

1) Trước hết ta phân tích mẫu thành nhân tử:

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1 = \sqrt{x}(x+1) - 1(x+1) = (x+1)(\sqrt{x}-1).$$

Vì R có dạng m: n nên ta thực hiện theo thứ tự sau:

Làm tính ở ngoặc thứ nhất:

$$m = 1 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

Làm tính ở ngoặc thứ hai:

$$n = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)}{(x+1)}.$$

Làm phép chia m cho n ta được:

$$R = \frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1} : \frac{\sqrt{x}-1}{x+1} = \frac{(x+\sqrt{x}+1)(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \text{ với } x \geq 0,\ x \neq 1.$$

2) Do $x \geq 0$, $x \neq 1$ nên $R = 7 \Leftrightarrow \dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 7$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} + 1 = 7(\sqrt{x}-1)$$

$$\Leftrightarrow x - 6\sqrt{x} + 8 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 16 \end{array}\right.$$

Ta thấy x = 4, x = 16 thoả mãn điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$.

Vậy x = 4, x = 16 là hai giá trị cần tìm.

3) Vì $x = 2(2+\sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$ thoả mãn điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$ nên $\sqrt{x} = \sqrt{3}+1$ thay $x = 4+2\sqrt{3}$ và $\sqrt{x} = \sqrt{3}+1$ vào R ta được

$$R = \frac{4+2\sqrt{3}+\sqrt{3}+1+1}{\sqrt{3}+1+1} = \frac{6+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9+6\sqrt{3}}{3} = 3+2\sqrt{3}.$$

4) Do $x > 0, x \neq 1$ nên $R < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} < 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x}-1} < 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 0$ (do $x+2 > 0$) $\Leftrightarrow \sqrt{x} < 1$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0$ nên $\sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$

Vậy $0 \leq x < 1$ là giá trị cần tìm.

III. Bài tập

56. Cho biểu thức: $M = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

1) Rút gọn M.
2) Tìm giá trị của M khi x = 4.
3) Tìm x để $M = \dfrac{13}{3}$.

57. Cho biểu thức: $N = \dfrac{x}{x-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

1) Rút gọn N.
2) Tìm giá trị của N khi x = 25.
3) Tìm x để $N = -\dfrac{1}{3}$.

58*. Cho biểu thức: $P = \dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

1) Rút gọn P.
2) Tìm giá trị của P khi $x = 33-8\sqrt{2}$.
3) Tìm x để $P < \dfrac{1}{3}$.

59*. Cho biểu thức: $Q=\left(\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}-\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right)\frac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$

với $x \geq 0$, $x \neq \frac{1}{4}$ và $x \geq 1$

1) Rút gọn Q.

2) Tìm giá trị của Q khi $x = 2(3-\sqrt{5})$.

3) Với giá trị nào của x thì biểu thức Q đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

60*. Cho biểu thức:

$$R=\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)}{1-\sqrt{xy}}+1\right]:\left[1-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}-\frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}+1)}{\sqrt{xy}-1}\right]$$

với $x \geq 0$, $y \geq 0$, và $xy \neq 1$.

1) Rút gọn R.

2) Tìm giá trị của R khi $x = 2(3-\sqrt{5})$, $y = 2\left(3+\sqrt{5}\right)$.

3) Cho $\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{y}}=5$. Tìm giá trị lớn nhất của R.

Dạng 6
CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

I. Phương pháp giải

Sử dụng một trong ba cách sau:

1. Biến đổi vết trái (VT) = vế phải (VP).

2. Biến đổi VP = VT.

3. Biến đổi để hai vế bằng nhau.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh đẳng thức:

a) $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{3}=-1$;

c) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$;

d) $(\sqrt{2010}-\sqrt{2009})$ và $(\sqrt{2010}+\sqrt{2009})$ là hai số nghịch đảo của nhau.

Giải

a) Khai triển hằng đẳng thức ở vế trái ta được:

$$VT = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3}.1 + 1^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3} = VP \text{ (đpcm)}.$$

b) áp dụng câu a) ta có:

$$VT = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} = -1 \text{ (đpcm)}.$$

c) Khai triển hằng đẳng thức ở vế trái ta được:

$$VT = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1 = VP \text{ (đpcm)}.$$

d) $(\sqrt{2010} - \sqrt{2009})$ và $(\sqrt{2010} + \sqrt{2009})$ là hai số nghịch đảo của nhau khi và chỉ khi tích của chúng bằng 1. Tức là

$$(\sqrt{2010} + \sqrt{2009})(\sqrt{2010} - \sqrt{2009}) = \left(\sqrt{2010}\right)^2 - \left(\sqrt{2009}\right)^2.$$

$$= 2010 - 2009 = 1 \text{ (đúng)}.$$

Ví dụ 2: Chứng minh đẳng thức:

a) $9 + 4\sqrt{5} = \left(\sqrt{5} + 2\right)^2$;

b) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = 2$;

c) $\left(4 + \sqrt{7}\right)^2 = 23 + 8\sqrt{7}$;

d) $\sqrt{23 + 8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$.

Giải

a) Phân tích vế trái thành nhân tử, ta được:

$$VT = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{5}.2 + 2^2 = \left(\sqrt{5} + 2\right)^2 = VP \text{ (đpcm)}.$$

b) Áp dụng câu a) ta có:

$$VT = \sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2} - \sqrt{5} = \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 2 \text{ (đpcm)}.$$

c) Khai triển vế trái thành nhân tử, ta được:

$$VT = \left(\sqrt{7} + 4\right)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 + 2\sqrt{7}.4 + 4^2 = VP \text{ (đpcm)}.$$

b) Áp dụng câu c) ta có:

$$VT = \sqrt{\left(\sqrt{7}+4\right)^2} - \sqrt{7} = \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} = 4 \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 3: Chứng minh đẳng thức:

a) $\dfrac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\dfrac{2}{3}} - 4\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

b) $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}}+\sqrt{\frac{2x}{3}}+\sqrt{6x}\right):\sqrt{6x}=2\frac{1}{3}$ với $x>0$.

c) $\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}-\frac{\sqrt{216}}{3}\right):\frac{1}{\sqrt{6}}=1,5$.

d) $\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right):\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=-2$.

Giải

a) Thực hiện phép tính ở vế trái ta được:

$$VT=\frac{3\sqrt{6}}{2}+2\sqrt{\frac{6}{3^2}}-4\sqrt{\frac{6}{2^2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{4\sqrt{6}}{2}$$

$$=\frac{1}{6}\left(9\sqrt{6}+4\sqrt{6}-12\sqrt{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{6}=VP\text{ (đpcm).}$$

b) Thực hiện phép chia căn thức ở vế trái ta được:

$$VT=x\sqrt{\frac{6}{x.6x}}+\sqrt{\frac{2x}{3.6x}}+\sqrt{\frac{6x}{6x}}=x\sqrt{\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1}=\frac{x}{x}+\frac{1}{3}+1=2\frac{1}{3}=VP$$

(đpcm).

c) Vì $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ và

$$\frac{\sqrt{216}}{3}=\frac{\sqrt{36.6}}{3}=\frac{6\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{6}\text{ nên}$$

$$VT=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-2\sqrt{6}\right)\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{2-2}=1,5=VP\text{ (đpcm).}$$

d) Vì $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{7}\left(1-\sqrt{2}\right)}{1\left(1-\sqrt{2}\right)}+\frac{-\sqrt{5}\left(1-\sqrt{3}\right)}{1\left(1-\sqrt{3}\right)}=-\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$

nên $VT=-\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right):\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=-\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$

$$=-\left(\sqrt{7}\right)+\left(\sqrt{5}\right)^2=-7+5=-2=VP\text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 4: Chứng minh đẳng thức:

a) $\dfrac{\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}}=x-y$ với $x>0,\ y>0$;

b) $\dfrac{\sqrt{y^3}-1}{\sqrt{y}-1}=y+\sqrt{y}+1$ với $y>0,\ y\neq 1$;

c) $\left(1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)\left(1-\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)=1-x$ với $x\geq 0$ và $x\neq 1$.

Giải

a) Biến đổi vế trái ta được:

$$VT=\frac{x\sqrt{xy}-x\sqrt{y^2}+y\sqrt{x^2}-y\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=\frac{x\sqrt{xy}-xy+yx-y\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}$$

$$=\frac{x\sqrt{xy}-y\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}\,(x-y)}{\sqrt{xy}}=x-y=VP\ (\text{đpcm}).$$

b) Biến đổi vế trái ta được:

$$VT=\frac{\left(\sqrt{y}\right)^3-1}{\sqrt{y}-1}=\frac{\left(\sqrt{y}-1\right)\left(y+\sqrt{y}+1\right)}{\sqrt{y}-1}=y+\sqrt{y}+1=VP\ (\text{đpcm}).$$

c) Biến đổi vế trái bằng hai cách:

Làm tính ở ngoặc thứ nhất: $1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=1+\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{1\left(\sqrt{x}+1\right)}=1+\sqrt{x}$;

Làm tính ở ngoặc thứ hai: $1-\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=1-\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{1\left(\sqrt{x}-1\right)}=1-\sqrt{x}$ nên

$$VT=\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)=1-\sqrt{x^2}=1-x=VP\ (\text{đpcm}).$$

III. Bài tập

Chứng minh đẳng thức (các bài 61, 62, 63, 64, 65)

61. a) $x+2\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2$; b) $x-2\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$;

c) $x+y+2\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$; d) $x+y-2\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$.

62. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

63. $\dfrac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

64. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2=1$ với $a\geq 0,\ b\geq 0,\ a\neq b$.

65*. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$.

66. Chứng minh các đẳng thức sau với $n \in \mathbf{N}$ và $d > 0$

a) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$;   b) $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$;

c) $\sqrt{n+d}-\sqrt{n}=\dfrac{d}{\sqrt{n+d}+\sqrt{n}}$;   d) $\sqrt{n+d}+\sqrt{n}=\dfrac{d}{\sqrt{n+d}-\sqrt{n}}$.

67*. Áp dụng các kết quả của bài 26 để tính giá trị các tổng sau:

a) $A=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots\ldots\dfrac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{10}}$;

b) $B=\dfrac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{7}}$
$+\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{8}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{9}}$;

c) $C=\dfrac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}$;

d) $D=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}}+\ldots\dfrac{1}{\sqrt{22}+\sqrt{25}}$;

e) $E=\dfrac{1}{\sqrt{4}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{4}}+\ldots-\dfrac{1}{\sqrt{25}-\sqrt{22}}$;

f) $F=\dfrac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{9}}+\dfrac{1}{\sqrt{9}-\sqrt{13}}-\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{17}}+\ldots-\dfrac{1}{\sqrt{21}-\sqrt{25}}$.

DẠNG 7
CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC – TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

I. Phương pháp giải

1. Biến đổi tương đương.
2. Biến đổi hệ quả.
3. Dùng bất đẳng thức Cô-si.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Không dùng bảng số và máy tính hãy so sánh:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$; b) $\sqrt{3}+2$ và $\sqrt{2}+\sqrt{6}$;

c) 16 và $\sqrt{15}.\sqrt{17}$; c) 8 và $\sqrt{15}+\sqrt{17}$.

Giải

a) Giả sử $\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2<\left(\sqrt{10}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2+3+2\sqrt{6}<10$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{6}<5 \Leftrightarrow 24<25$ (2)

Ta thấy (2) đúng mà (2) $\Leftrightarrow$ (1). Vậy (1) đúng hay $\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$.

b) Giả sử $2+\sqrt{3}<\sqrt{2}+\sqrt{6}$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}+2\right)^2<\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$

$\Leftrightarrow 4+3+4\sqrt{3}<2+6+2\sqrt{12}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}<\left(1+2\sqrt{12}\right) \Leftrightarrow 48<1+48+4\sqrt{12} \Leftrightarrow 1<4\sqrt{12}$ (2)

Ta thấy (2) đúng mà (2) $\Leftrightarrow$ (1). Vậy (1) đúng hay $2+\sqrt{3}<\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

c) Giả sử $16<\sqrt{15}.\sqrt{17}$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow 16^2<\left(\sqrt{15}\sqrt{17}\right)^2$

$\Leftrightarrow 256<255$ (2)

Ta thấy (2) sai mà (2) $\Leftrightarrow$ (1). Vậy (1) sai hay $16>\sqrt{15}.\sqrt{17}$.

d) Giả sử $8 > \sqrt{15} + \sqrt{17}$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow 8^2 > \left(\sqrt{15} + \sqrt{17}\right)^2 = 15 + 17 + 2\sqrt{255}$

$$\Leftrightarrow 16 > \sqrt{255} \Leftrightarrow 256 > 255 \qquad (2)$$

Ta thấy (2) đúng mà (2) $\Leftrightarrow$ (1). Vậy (1) đúng hay $8 > \sqrt{15} + \sqrt{17}$.

Ví dụ 2: Hãy chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$; b) $(a+b)^2 \geq 4ab$;

c) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ với $ab > 0$; d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{ab}$ với $a > 0, b > 0$.

Giải

a) Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab\ (1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (2)

Do (2) đúng với mọi a,b. Mà (2) $\Leftrightarrow$ (1). Vậy (1) đúng (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$.

b) Ta có $(a+b)^2 \geq 4ab\ (1) \Leftrightarrow (a+b)^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (2)

Do (2) đúng với mọi a,b. Mà (2) $\Leftrightarrow$ (1). Vậy (1) đúng (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$.

c) Ta có $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2\ (1) \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ (2)

Do (2) đúng với mọi $ab > 0$, mà (2) $\Leftrightarrow$ (1). Vậy (1) đúng (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$.

d) Ta có $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{4}{a+b}\ (1) \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$ (vì ab(a+b) >0)

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \ (2)$$

Do (2) đúng với mọi $ab > 0$, mà (2) $\Leftrightarrow$ (1). Vậy (1) đúng (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b > 0$.

Ví dụ 3: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; b) $(a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$;

c) $3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 3(a+b+c)^2$; d) $(ac+bd)^2 \geq \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right)$.

Giải

a) Ta có $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ (1)

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2(ab+bc+ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+a^2+c^2-2ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Do (2) đúng với mọi a, b, c. Mà (2) $\Leftrightarrow$ (1); Vậy (1) đúng (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ b=c \\ c=a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c$.

b) Theo câu a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

Cộng vào hai vế của bất đẳng thức trên với 2(ab+bc+ca) thu được

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq ab+bc+ca+2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \text{(đpcm)}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

c) Theo câu a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2(ab+bc+ca)$$

Cộng vào hai vế của bất đẳng thức trên với $a^2+b^2+c^2$ thu được

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 3(a+b+c)^2 \text{(đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ a=b=c

d) Ta có: $(ac+bd)^2 \geq \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ (1)

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)-(ac+bd)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-b^2d^2-2abcd \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ad-bc)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Do (2) đúng với mọi a, b, c, d; Mà (2) $\Leftrightarrow$ (1); Vậy (1) đúng (đpcm).

Dấu bằng xảy ra khi ad = bc.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các biểu thức sau:

a) $M = x + \sqrt{x} + 1$;   b) $N = x - \sqrt{x} + 1$;

c) $P = \dfrac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$;   d) $Q = \dfrac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$.

Giải

Trước hết ta phải tìm điều kiện của biến x để giá trị của các biểu thức được xác định.

Giá trị của hai biểu thức M, N được xác định khi $\sqrt{x}$ xác định hay $x \geq 0$.

Vì $x + \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4} > 0$ với mọi $x \geq 0$,

$x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4} > 0$ với mọi $x \geq 0$

nên giá trị của hai biểu thức P, Q được xác định khi $x \geq 0$

a) Vì $x \geq 0$ và $\sqrt{x} \geq 0$ nên $M = x + \sqrt{x} + 1 \geq 0 + 0 + 1 = 1$ với mọi $x \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$.

Vậy min M = 1.

b) Viết lại biểu thức thành $N = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

Vì $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi $x \geq 0$, nên $N \geq \dfrac{3}{4}$ với mọi $x \geq 0$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$. Vậy min $N = \dfrac{3}{4}$ đạt được tại $x = \dfrac{1}{4}$.

c) Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ và $x + \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ với mọi $x \geq 0$

nên $P \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$.

Vậy min P = 0 đạt được tại x = 0.

Lại có $\left(\sqrt{x} - 1\right) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$

Suy ra $1 = \dfrac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1} \geq \dfrac{3\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} = 3P$ hay $P \leq \dfrac{1}{3}$ với mọi $x \geq 0$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy max $P = \frac{1}{3}$ đạt được tại x = 1.

d) Tương tự như câu c) ta có min Q = 0.

Lại có $\left(\sqrt{x} - 1\right) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$

Suy ra $1 = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{x - \sqrt{x} + 1} \geq \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = Q$ hay $Q \leq 1$ với mọi $x \geq 0$;

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy max Q = 1 đạt được tại x = 1.

Ví dụ 5: 1) Chứng minh bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm a và b:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

2) Áp dụng BĐT Cô-si, hãy chứng minh các bất đẳng thức sau:

Với hai số không âm a và b thì

a) $(a+b)^2 \geq 4ab$;

b) $(a+b)(1+ab) \geq 4ab$;

c) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Giải

Ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (1)

$\Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \geq 0$ (2)

Do (2) đúng với mọi $a \geq 0, b \geq 0$. Mà (2) $\Leftrightarrow$ (1). Vậy (1) đúng (đpcm).

2) a) Áp dụng BĐT Cô-si cho hai bộ, mỗi bộ hai số không âm là a, b và a, b ta được

$a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq 0$ (1)

$a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq 0$ (2)

Nhân (1) với (2) theo vế ta được:

$(a+b)^2 \geq 4ab$ (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

b) Áp dụng BĐT Cô-si cho hai bộ, mỗi bộ hai số không âm là a, b và 1, ab ta được

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq 0 \qquad (1)$$

$$1 + ab \geq 2\sqrt{ab} \geq 0 \qquad (2)$$

Nhân (1) với (2) theo từng vế ta được:

$$(a+b)(1+ab) \geq 4ab \text{ (đpcm).}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ và $1 = ab \Leftrightarrow a = b = 1$.

c) Áp dụng BĐT Cô-si cho ba bộ, mỗi bộ hai số không âm là (a, b); (b, c) và (c, a) ta được

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq 0 \qquad (1)$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc} \geq 0 \qquad (2)$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca} \geq 0 \qquad (3)$$

Nhân (1), (2), (3) theo từng vế ta được:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \text{ (đpcm).}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

III. Bài tập

68. Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh các số:

a) $\sqrt{10} + \sqrt{13}$ và $\sqrt{11} + \sqrt{12}$;   b) $\sqrt{100} + \sqrt{200}$ và $\sqrt{104} + \sqrt{196}$;

c) $\sqrt{10} + \sqrt{20}$ và $\sqrt{12} + \sqrt{19}$;   d) $\sqrt{a} + \sqrt{7}$ và $\sqrt{a+2} + \sqrt{a+5}$.

Chứng minh bất đẳng thức (các bài 29, 30, 31)

69. a) $ab(a+b) \leq a^3 + b^3$ với $a \geq 0, b \geq 0$;

b) $ab\left(a^2 + b^2\right) \leq a^4 + b^4$;

c) $\dfrac{a^2}{a^4+1} \leq \dfrac{1}{2}$;   d) $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \leq 2$.

70. a) $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$;   b) $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \geq a + b + c$;

c) $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab} \geq \dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b} - \dfrac{2}{c}$;

d) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a\left(ab^2 - a + c + 1\right)$.

(với điều kiện a, b, c là các số dương).

71. a) $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\ge\frac{(x+y)^2}{a+b}$;

b) $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$

với a, b,c là các số dương và x, y, z là các số thực tuỳ ý.

72. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si chứng minh các bất đẳng thức sau, với a, b, c là các số dương:

a) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4$;

b) $(1+ab)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4$;

c) $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 8$.

73. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các biểu thức sau:

a) $Y = x+\sqrt{x}+3$;

b) $Y = x-\sqrt{x}+10\frac{1}{4}$;

c) $Y = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+2}$;

d) $Y = \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+3}$.

Chủ đề 5

CĂN BẬC BA

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Căn bậc ba của một số a là một số x sao cho $x^3 = a$.

Ta viết: $x=\sqrt[3]{a}\Leftrightarrow x^3=a$.

2. Tính chất

Mỗi số a đều có duy nhất một căn bậc ba.

Căn bậc ba của một số dương là một số dương.

Căn bậc ba của một số âm là một số âm.

Căn bậc ba của số 0 chính là số 0.

3. So sánh các căn bậc ba

Với a, b là hai số thực bất kỳ ta có: $a<b\Leftrightarrow\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$.

4. Khai căn bậc ba của một biểu thức nhờ hằng đẳng thức: $\sqrt[3]{A^3} = A$.

5. Các phép tính:

a) $\sqrt[3]{A.B} = \sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}$, suy ra $\left(\sqrt[3]{A}\right)^n = \sqrt[3]{A^n}$ với $1 < n \in N$.

b) $\sqrt[3]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$ với $B \neq 0$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÌM CĂN BẬC BA CỦA MỘT SỐ, MỘT BIỂU THỨC. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH $x^3 = a$

I. Phương pháp giải

1. Khai căn bậc ba một số, một biểu thức nhờ hằng đẳng thức $\sqrt[3]{A^3} = A$.

2. Giải phương trình $x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a}$.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Hãy tính

$\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{-343}$, $\sqrt[3]{0,064}$, $\sqrt[3]{-0,126}$, $\sqrt[3]{\dfrac{27}{125}}$, $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{512}}$.

Giải

Ta có $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$;

$\sqrt[3]{-343} = \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$;

$\sqrt[3]{0,064} = \sqrt[3]{(0,4)^3} = 0,4$;

$\sqrt[3]{-0,216} = \sqrt[3]{(-0,6)^3} = -0,6$;

$\sqrt[3]{\dfrac{27}{125}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{5}\right)^3} = \dfrac{3}{5}$;

$\sqrt[3]{-\dfrac{1}{512}} = \sqrt[3]{\left(-\dfrac{1}{8}\right)^3} = -\dfrac{1}{8}$.

Ví dụ 2: Hãy tìm

a) $\sqrt[3]{27a^3}$;

b) $\sqrt[3]{-64a^6}$;

c) $\sqrt[3]{-0,027x^9}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{125x^3}{8}}$.

Giải

a) $\sqrt[3]{27a^3} = \sqrt[3]{(3a)^3} = 3a$;

b) $\sqrt[3]{-64a^6} = \sqrt[3]{\left(-4a^2\right)^3} = -4a^2$;

c) $\sqrt[3]{-0,027x^9} = \sqrt[3]{\left(-0,3x^3\right)^3} = -0,3x^3$;

d) $\sqrt[3]{\frac{125x^3}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5x}{2}\right)^3} = \frac{5x}{2}$.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

a) $x^3 = 1$;

b) $8x^3 = -27$;

c) $2x^3 = 0,016$;

d) $\sqrt[3]{2x-1} = 3$;

e) $\sqrt[3]{2-3x} = -2$;

f) $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x$.

Giải

a) $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$. Vậy $S = \{1\}$.

b) $8x^3 = -27 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{27}{8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$. Vậy $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

c) $2x^3 = 0,016 \Leftrightarrow x^3 = 0,008 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{0,008} \Leftrightarrow x = 0,2$. Vậy $S = \{0,2\}$.

d) $\sqrt[3]{2x-1} = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3^3 \Leftrightarrow 2x = 27 + 1 = 28 \Leftrightarrow x = 14$. Vậy $S = \{14\}$.

e) $\sqrt[3]{2-3x} = -2 \Leftrightarrow 2 - 3x = (-2)^3 \Leftrightarrow 2 - 3x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$. Vậy $S = \left\{\frac{10}{3}\right\}$.

f) $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = x - 1 \Leftrightarrow x - 1 = (x-1)^3$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x-1)^2 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ (x-1)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Vậy $S = \{0,1,2\}$.

III. Bài tập

Hãy tính (các bài 74, 75):

74. $\sqrt[3]{-216}$, $\sqrt[3]{512}$, $\sqrt[3]{-1331}$, $\sqrt[3]{729}$.

75. $\sqrt[3]{0,001x^3}$, $\sqrt[3]{-125a^{12}}$, $\sqrt[3]{27x^6}$, $\sqrt[3]{-0,343a^3}$.

76. Giải phương trình:

a) $x^3 = 2$; b) $27x^3 = -81$;

c) $\frac{1}{2}x^3 = 0,4$; d) $\sqrt[3]{3x+1} = 4$;

e) $\sqrt[3]{3-2x} = -3$; f) $\sqrt[3]{x-2} + 2 = x$.

Dạng 2

SO SÁNH CÁC CĂN BẬC BA – TÌM MỘT SỐ BIẾT THỨ TỰ CĂN BẬC BA CỦA NÓ

I. Phương pháp giải

Sử dụng tính chất $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ với a, b là các số thực tuỳ ý.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: So sánh

a) 5 và $\sqrt[3]{123}$; b) $5\sqrt[3]{6}$ và $6\sqrt[3]{5}$.

Giải

a) Giả sử $5 > \sqrt[3]{123}$ (1)

$$\Leftrightarrow 5^3 > \left(\sqrt[3]{123}\right)^3 \Leftrightarrow 125 > 123 \quad (2)$$

Ta thấy (2) đúng mà (2) $\Leftrightarrow$ (1). Vậy (1) đúng hay $5 > \sqrt[3]{123}$.

b) Giả sử $5\sqrt[3]{6} > \sqrt[3]{123}$ (1)

$$\Leftrightarrow \left(5\sqrt[3]{6}\right)^3 > \left(\sqrt[3]{123}\right)^3 \Leftrightarrow 5^3.6 > 6^3.5 \Leftrightarrow 750 > 1080 \quad (2)$$

Ta thấy (2) sai mà (2) $\Leftrightarrow$ (1). Vậy (1) sai hay $5\sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{123}$.

Ví dụ 2: Tìm số thực x biết:

a) $\sqrt[3]{x} > 1$; b) $\sqrt[3]{x} \geq 2$;

c) $2\sqrt[3]{x} \leq 6$; d) $3\sqrt[3]{x} \geq 12$.

Giải

a) $\sqrt[3]{x} > 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 > 1^3 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy $x > 1$.

b) $\sqrt[3]{x} \ge 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \ge 2^3 \Leftrightarrow x \ge 8$. Vậy $x \ge 8$.

c) $2\sqrt[3]{x} \le 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \le 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \le 3^3 \Leftrightarrow x \le 27$. Vậy $x \le 27$.

d) $\sqrt[3]{x} \ge 12 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \ge 4 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \ge 4^3 \Leftrightarrow x \ge 64$. Vậy $x \ge 64$.

III. Bài tập

77. So sánh

a) $3\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[3]{55}$;

b) $3\sqrt[3]{4}$ và $2\sqrt[3]{13}$.

78. Tìm số thực x, biết:

a) $\sqrt[3]{x} < 2$;

b) $\sqrt[3]{2x-1} > -3$;

c) $\sqrt[3]{2-3x} \le 1$;

d) $\sqrt[3]{3-4x} \ge 5$.

Dạng 3
TÍNH GIÁ TRỊ– RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN

I. Phương pháp giải

Rút gọn đồng nghĩa với thu gọn.
Bước 1: Khai căn một biểu thức.
Bước 2: Thu gọn.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Tính

a) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}$;

b) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt[3]{32}.\sqrt[3]{2}$.

Giải

a) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{3^3} - \sqrt[3]{(-2)^3} - \sqrt[3]{5^3} = 3 - (-2) - 5 = 0$.

b) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt[3]{32}.\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\dfrac{24}{3}} - \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^3} - \sqrt[3]{4^3} = 2 - 4 = -2$.

Ví dụ 2: Rút gọn:

a) $4ab\sqrt[3]{\dfrac{27x^3y^6}{64a^{12}b^{15}}}$; b) $\dfrac{1}{xy^2}\sqrt[3]{-8x^3y^6}$.

Giải

a) $4ab\sqrt[3]{\dfrac{27x^3y^6}{64a^{12}b^{15}}} = \dfrac{4ab\sqrt[3]{\left(3xy^2\right)^3}}{\sqrt[3]{\left(4a^4b^5\right)^3}} = \dfrac{4ab3xy^2}{4a^4b^5} = \dfrac{3xy^2}{a^3b^4}$.

b) $\dfrac{1}{xy^2}\sqrt[3]{-8x^3y^6} = \dfrac{1}{xy^2}\sqrt[3]{\left(-2xy^2\right)^3} = \dfrac{-2xy^2}{xy^2} = -2$.

Ví dụ 3*: Rút gọn:

a) $M = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$; b) $N = \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$;

c) $P = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} - 33\sqrt{2}$; c) $Q = \sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - 5\sqrt{3}$.

Giải

a) Vì $7+5\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^3 + 1 + 3\sqrt{2}.1\left(\sqrt{2}+1\right) = \left(\sqrt{2}+1\right)^3$ nên

$$M = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3} = \sqrt{2}+1.$$

b) Vì $6\sqrt{3}-10 = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 1^3 - 3\sqrt{3}.1\left(\sqrt{3}-1\right) = \left(\sqrt{3}-1\right)^3$ nên

$$N = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-1\right)^3} = \sqrt{3}-1.$$

c) Vì $5\sqrt{2}-7 = \left(\sqrt{2}\right)^3 - 1^3 - 3\sqrt{2}.1\left(\sqrt{2}-1\right) = \left(\sqrt{2}-1\right)^3$ nên

$$P = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}-1-3\sqrt{2} = -2\sqrt{2}-1.$$

d) Vì $6\sqrt{3}+10 = \left(\sqrt{3}\right)^3 + 1^3 + 3\sqrt{3}.1\left(\sqrt{3}+1\right) = \left(\sqrt{3}+1\right)^3$ nên

$$Q = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3} - 5\sqrt{3} = \sqrt{3}+1-5\sqrt{3} = -4\sqrt{3}+1.$$

Ví dụ 4: Rút gọn:

a) $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)$; b) $\left(\sqrt[3]{3}+2\right)\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+4\right)$.

Giải

a) $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1^3=2-1=1$.

b) $\left(\sqrt[3]{3}+2\right)\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+4\right)=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3+2^3=3+8=11$.

III. Bài tập

Rút gọn các biểu thức (các bài 79, 80, 81):

79. a) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}.\sqrt[3]{-12}.\sqrt[3]{2}$;

b) $\sqrt[3]{9}.\left(\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{3}-\dfrac{1}{6}\sqrt[3]{24}\right)$;

c) $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{9}.-2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}\right):2\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$.

80. a) $\sqrt[3]{8\sqrt{5}+16}$;

b) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$.

81. a) $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)$;

b) $\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}\right)$;

c) $\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

CHỦ ĐỀ 1

1. $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{3^2}$.

2. a) ± 4; ± 13; ± 5; ± 7; ± 15;

b) $\pm\dfrac{2}{5}$; $\pm\dfrac{5}{13}$; $\pm\dfrac{8}{11}$; $\pm\dfrac{13}{14}$; $\pm\dfrac{9}{25}$;

c) $\pm 1,1$; $\pm 0,4$; $\pm 1,4$; $\pm 1,6$; $\pm 2,5$.

3. a) $4x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right\}$.

b) $9x^2+2=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{2}{9}$. Vô nghiệm vì $-\frac{2}{9}<0$ không có căn bậc hai.

c) $(x+1)^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=\sqrt{2} \\ x+1=-\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}-1 \\ x=-\sqrt{2}-1 \end{array}\right.$.

Vậy $S=\left\{\sqrt{2}-1;-\sqrt{2}-1\right\}$.

d) $(x-2)^2=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=\sqrt{7} \\ x-2=-\sqrt{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{7}+2 \\ x=-\sqrt{7}+2 \end{array}\right.$.

Vậy $S=\left\{\sqrt{7}+2;-\sqrt{7}+2\right\}$.

4. Vì không có căn bậc hai số học nào là một số âm.

5. a) $\sqrt{36}=6$ vì $6>0$ và $6^2=36$.

Tương tự 11; 12; 13; 15; 16; 17; 18; 19; 20.

b) 1,5; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

c) $\frac{1}{2};\frac{2}{5};\frac{7}{8};\frac{11}{9};\frac{13}{10}$.

6. a) $2\sqrt{x}=6 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9$.

b) $3\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\frac{1}{9}$.

c) $4-5\sqrt{x}=-1 \Leftrightarrow 4+1=5\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$.

d) $4\sqrt{x}=-3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=-\frac{3}{4}<0$. Vô nghiệm, vì không có căn bậc hai số học nào là số âm.

7. a) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=0 \\ \sqrt{x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$. Vậy $S=\{0;1\}$.

b) $\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=-3<0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$.

Vậy $S=\{4\}$.

c) $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=-1<0 \text{ (vô nghiệm)} \\ \sqrt{x}=-2<0 \end{array}\right.$

Vậy $S=\varnothing$.

8. a) Vì $0 < 15 < 16$ suy ra $\sqrt{15} < \sqrt{16} = 4$;

b) Vì $0 < 25 < 26$ suy ra $5 = \sqrt{25} < \sqrt{26}$;

c) Vì $0 < 15 < 16$ suy ra $\sqrt{15} < \sqrt{16} = 4$ suy ra $\sqrt{15} - 1 < 3$;

d) Vì $0 < 25 < 26$ suy ra $5 = \sqrt{25} < \sqrt{26}$ suy ra $6 < \sqrt{26} + 1$.

9. a) Vì $x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x} \ge 0$ nên $\sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 0 \le x < 9$.

b) Vì $x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{2x} \ge 0$ nên $\sqrt{2x} \le 4 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{2x} \le 4$

$\Leftrightarrow 0 \le 2x \le 16 \Leftrightarrow 0 \le x \le 8$.

c) $3\sqrt{x} > 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 2 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

d) $\sqrt{3x} \ge 9 \Leftrightarrow 3x \ge 81 \Leftrightarrow x \ge 27$.

CHỦ ĐỀ 2

10. a) $\sqrt{3x-1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 3x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}$.

b) $\sqrt{4-2x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 4 - 2x \ge 0 \Leftrightarrow 2 \ge x$.

c) $\sqrt{x^2+1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge -1$ đúng với mọi x.

d) $\sqrt{\frac{4}{2x-1}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{4}{2x-1} > 0$

$\Leftrightarrow 2x - 1 > 0$ (Vì $2x - 1$ cùng dấu dương với 4)

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

e) $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x-1 \le 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x > -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \le 1 \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x \ge 1$.

f) $\sqrt{4x^2-1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 4x^2 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) \ge 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ 2x+1 \ge 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x-1 \le 0 \\ 2x+1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x \ge -\frac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \le \frac{1}{2} \\ x \le -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \le -\frac{1}{2}$ hoặc $x \ge \frac{1}{2}$.

11. a) A xác định khi $\sqrt{x}$ và $\sqrt{x-1}$ đồng thời xác định. Tức là

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

b) B xác định khi $\sqrt{x-2}$ và $\sqrt{x-3}$ đồng thời xác định. Tức là

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

c) C xác định $\Leftrightarrow (x-1)(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x + 3 \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ hoặc } x \geq 2.$$

d) D xác định $\Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2x - 3 \leq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \leq \dfrac{3}{2} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1 \text{ hoặc } x \geq \frac{3}{2}.$$

12. a) $2\sqrt{(-3)^6} + \sqrt{(-2)^4} = 2|-3|^3 + |-2|^2 = 54 + 4 = 58.$

b) $-4\sqrt{(-3)^6} + \sqrt{\sqrt{(-2)^8}} = -4\left|(-3)^3\right| + \sqrt{\left|(-2)^4\right|}$

$$= -4.27 + \left|(-2)^2\right| = -108 + 4 = -104.$$

c) $\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = 2 + \sqrt{3}.$

d) $\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2} = \left|3-\sqrt{2}\right| = 3 - \sqrt{2}$ (vì $3 > \sqrt{2}$).

13. a) $M = |-1| + |2| - |-3| = 1 + 2 - 3 = 0.$

b) $N = 3.|-0,\dot{2}| - \sqrt{2} + 3|-3| = 3.0,2 - \sqrt{2} + 9 = 9,6 - \sqrt{2}.$

c) $P = \sqrt{5} + 2\left|-\dfrac{1}{2}\right| - 3\left|-\dfrac{1}{3}\right| = \sqrt{5} + 2.\dfrac{1}{2} - 3.\dfrac{1}{3} = \sqrt{5}.$

14. a) $x^2 - 7 = x^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right).$

b) $4x^2 - 5 = (2x)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(2x - \sqrt{5}\right)\left(2x + \sqrt{5}\right).$

c) $3x^2-1=\left(\sqrt{3}x\right)^2-1^2=\left(\sqrt{3}x-1\right)\left(\sqrt{3}x+1\right)$.

d) Với $x\ge 0$ thì $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$ nên $x-1=\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$.

e) Với $x\ge 0$ thì $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$ nên $x-4=\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$.

g) Với $x\ge 0$ thì

$$9x=\left(3\sqrt{x}\right)^2 \text{ nên } 9x-4=\left(3\sqrt{x}\right)^2-2^2=\left(3\sqrt{x}-2\right)\left(3\sqrt{x}+2\right).$$

15. a) $11+2\sqrt{10}=\left(\sqrt{10}+1\right)^2$; b) $12-2\sqrt{11}=\left(\sqrt{11}-1\right)^2$;

c) $23+2\sqrt{22}=\left(\sqrt{22}+1\right)^2$.

16*. Vì $a<0$ nên $-a>0$ hay $-(-a)=\left(\sqrt{-a}\right)^2$, suy ra

a) $a+3=3-(-a)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{-a}\right)^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{-a}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{-a}\right)$.

b) $4a+1=1-(-4a)=1^2-\left(2\sqrt{-a}\right)^2=\left(1-2\sqrt{-a}\right)\left(1+2\sqrt{-a}\right)$.

c) $2a+3=3-(-2a)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{-2a}\right)^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{-2a}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{-2a}\right)$.

17. a) $M=4|a|-5a=4a-5a=-a$ (do $a\ge 0$).

b) $N=5|b|+3b=-5b+3b=-2b$ (do $b\le 0$).

c) $P=\sqrt{(x-5)^2}-x=|x-5|-x=x-5-x=-5$ (do $x\ge 0$).

d) $Q=3x+2-\sqrt{(3x+1)^2}=3x+2-3x-1=1$ (do $x>\frac{1}{3}$).

18. a) $A=\sqrt{\left(\sqrt{7}+1\right)^2}-\sqrt{7}=\sqrt{7}+1-\sqrt{7}=1$.

b) $B=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-2\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$.

c) $C=\sqrt{\left(\sqrt{13}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{13}+1\right)^2}=\sqrt{13}-1+\sqrt{13}+1=2\sqrt{13}$.

d) $D=\sqrt{\left(\sqrt{21}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{21}+1\right)^2}=\sqrt{21}-1-\sqrt{21}-1=-2$.

19*. a) Vì $|1-2x| = |2x-1| = -(2x-1)$ (do $x < \frac{1}{2}$):

$$|x-1| = -(x-1) \text{ (do } x < \frac{1}{2} < 1)$$

nên $M = -(x-1)-(2x-1) = -x+1-2x+1 = 2-3x$.

b) Vì $\sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = 2x-1$ (do $x > \frac{1}{2}$)

nên $N = 2x-2x+1 = 1$.

c) Vì $\sqrt{4x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = x+2$ (do $x \geq 0$)

nên $P = x+2+x = 2x+2$.

d) Vì $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} = \sqrt{x-1}+1$ (do $x \geq 1$)

nên $Q = \sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+4 = 5$.

20*. a) Vì $\sqrt{4x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x-2$ (do $x > 2$)

nên $A = x-2+\dfrac{x-2}{x-2} = x-2+1 = x-1$.

b) Vì $\sqrt{x^2-8x+16} = \sqrt{(4-x)^2} = |4-x| = 4-x$ (do $x < 4$)

nên $B = 4-x+\dfrac{4-x}{4-x} = 4-x+1 = 5-x$.

c) Vì $\sqrt{9-6x+x^2} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = -(x-3)$ (do $x < 3$)

nên $C = -(x-3)-\dfrac{x-3}{-(x-3)} = -x+3-1 = -x+2$.

21. a) $\sqrt{(-2x)^2} = 4 \Leftrightarrow |-2x| = |4| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x = 4 \\ -2x = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$

b) $\sqrt{x^2-2x+1} = |-3| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = |3| \Leftrightarrow |x-1| = |3|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = 3 \\ x-1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

c) $\sqrt{4x^2+4x+1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow |2x+1| = 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+1=2\\2x+1=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\x=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

d) $\sqrt{3x^2}=\left|-\sqrt{6}\right| \Leftrightarrow \left|\sqrt{3}x\right|=\left|\sqrt{6}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{3}x=\sqrt{6}\\\sqrt{3x}=-\sqrt{6}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$

22. a) $4x^2-4\sqrt{3}+3=0 \Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{3}\right)^2=0 \Leftrightarrow 2x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $x^2+4\sqrt{5}x+20=0 \Leftrightarrow \left(x+2\sqrt{5}\right)^2=0 \Leftrightarrow x+2\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow x=-2\sqrt{5}$.

c) $\sqrt{x^4}=4 \Leftrightarrow x^2=2^2 \Leftrightarrow x=2; x=-2$.

d) $\sqrt{\sqrt{x^4}}=7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}=7 \Leftrightarrow x=7; x=-7$.

23. a) $|2x-1|=1-2x \Leftrightarrow |2x-1|=-(2x-1) \Leftrightarrow 2x-1\le 0 \Leftrightarrow x\le\dfrac{1}{2}$.

b) $|3x+2|=3x+2 \Leftrightarrow 3x+2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge-\dfrac{2}{3}$.

c) $\sqrt{9x^2-6x+1}=3x-1 \Leftrightarrow \sqrt{(3x-1)^2}=3x-1 \Leftrightarrow |3x-1|=3x-1$

$\Leftrightarrow 3x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{3}$.

d) $\sqrt{4x^2-12x+9}=3-2x \Leftrightarrow \sqrt{(3-2x)^2}=3-2x \Leftrightarrow |3-2x|=3-2x$

$\Leftrightarrow 3-2x\ge 0 \Leftrightarrow x\le\dfrac{3}{2}$.

24. a) $\sqrt{25x^2}-3x-2=0 \Leftrightarrow |5x|=3x+2$ (1)

Giải phương trình: $5x=3x+2$ với điều kiện $x\ge 0 \Leftrightarrow x=1$. Giá trị $x=1$ thỏa mãn điều kiện $x\ge 0$ nên $x=1$ là một nghiệm của (1).

Giải phương trình $-5x=3x+2$ với điều kiện $x<0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$. Giá trị $x=-\dfrac{1}{4}$ thoả mãn điều kiện $x<0$ nên $x=-\dfrac{1}{4}$ là một nghiệm của (1).

Tổng hợp lại ta có $S=\left\{1;-\dfrac{1}{4}\right\}$ là nghiệm của (1).

b) $\sqrt{(-3x)^2} + x - 1 = 0 \Leftrightarrow |3x| + x - 1 = 0$ (2)

Đáp số: $S = \left\{\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right\}$.

c) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = x + 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2} = x + 4 \Leftrightarrow |x - 5| = x + 4$ (3)

Giải phương trình:

- $x - 5 = x - 4$ với điều kiện $x \geq 5$

  $\Leftrightarrow -5 = -4$ (sai). Trường hợp này phương trình vô nghiệm

- $-x + 5 = x - 4$ với điều kiện $x < 5 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$. Giá trị $x = \frac{9}{2}$ thoả mãn điều

kiện $x < 5$ nên $x = \frac{9}{2}$ là một nghiệm của (3). Tổng hợp lại ta có $S = \left\{\frac{9}{2}\right\}$

d) $\sqrt{x^2 + 12x + 36} = 2x + 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x+6)^2} = 2x + 5 \Leftrightarrow |x + 6| = 2x + 5$ (4)

Đáp số: $S = \{1\}$.

CHỦ ĐỀ 3

25. a) $\sqrt{12.147} = \sqrt{42^2} = 42$; b) $\sqrt{15.240} = \sqrt{60^2} = 60$;

c) $\sqrt{3.30.6.4} = \sqrt{24^2} = 24$; d) $\sqrt{1.6.2.5} = \sqrt{2^2} = 2$.

e) $\sqrt{33.27.44} = \sqrt{(2.9.11)^2} = 2.9.11 = 198$;

f) $\sqrt{12.1.3.6.25} = \sqrt{33^2} = 33$.

26. a) $\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)^2 = 7 + 3 + 2\sqrt{7}.\sqrt{3} = 10 + 2\sqrt{21}$;

b) $\left(\sqrt{11} - \sqrt{5}\right)^2 = 11 + 5 - 2\sqrt{11}.\sqrt{5} = 16 - 2\sqrt{55}$;

c) $\left(\sqrt{13} + \sqrt{7}\right)^2 = 13 + 7 + 2\sqrt{13}.\sqrt{7} = 20 + 2\sqrt{91}$;

d) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = x + y + 2\sqrt{xy}$;

e) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$;

f) $\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right)^2 = c + d + 2\sqrt{cd}$.

27. a) $\left(\sqrt{3}+4\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2+5\sqrt{3}+4=7+5\sqrt{3}$;

b) $\left(\sqrt{5}-6\right)\left(\sqrt{5}+4\right)=\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}-24=-19-2\sqrt{5}$;

c) $\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}-6=x-\sqrt{x}-6$;

d) $\left(\sqrt{y}-3\right)\left(\sqrt{y}-4\right)=\left(\sqrt{y}\right)^2-7\sqrt{y}+12=y-7\sqrt{y}+12$.

28. a) $\sqrt{\frac{16}{289}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{289}}=\frac{4}{17}$; b) $\sqrt{\frac{49}{25}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}}=\frac{7}{5}$.

c) $\sqrt{1\frac{15}{49}}=\sqrt{\frac{64}{49}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}}=\frac{8}{7}$; d) $\sqrt{3\frac{13}{81}}=\sqrt{\frac{256}{81}}=\frac{\sqrt{256}}{\sqrt{81}}=\frac{16}{9}$.

29. a) $\frac{\sqrt{1300}}{\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{1300}{13}}=\sqrt{100}=10$; b) $\frac{\sqrt{4,8}}{\sqrt{0,3}}=\sqrt{\frac{4,8}{0,3}}=\sqrt{16}=4$;

c) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{150}{6}}=\sqrt{25}=5$; d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{216}}=\sqrt{\frac{6}{216}}=\sqrt{\frac{1}{36}}=\frac{1}{6}$.

30. a) $\left(2\sqrt{20}-3\sqrt{45}+4\sqrt{80}\right):\sqrt{5}=2\sqrt{4}-3\sqrt{9}+4\sqrt{16}=11$;

b) $\left(3\sqrt{24}+4\sqrt{54}-5\sqrt{96}\right):\sqrt{6}=3\sqrt{4}+4\sqrt{9}-5\sqrt{16}=-2$;

c) $\left(3\sqrt{x^2y}-4\sqrt{xy^2}+5xy\right):\sqrt{xy}=3\sqrt{x}-4\sqrt{y}+5\sqrt{xy}$;

d) $\left(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}-3\sqrt{ab}\right):\sqrt{ab}=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-3=a+b-3$.

31. a) $\sqrt{2}+\sqrt{6}=\sqrt{2}.1+\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$;

b) $\sqrt{3}+\sqrt{15}=\sqrt{3}.1+\sqrt{3}.\sqrt{5}=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)$;

c) $a+2\sqrt{a}=\sqrt{a}.\sqrt{a}+2.\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+2\right)$;

d) $4+5\sqrt{2}=2\sqrt{2}.\sqrt{2}+5\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}+5\right)$;

e) $3+\sqrt{3}=\sqrt{3}.\sqrt{3}+1.\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$;

f) $b+3a\sqrt{b}=\sqrt{b}.\sqrt{b}+3a.\sqrt{b}=\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+3a\right)$.

32. a) $6x - \sqrt{x} - 1 = 6\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 1$

$= 3\sqrt{x}\left(2\sqrt{x} - 1\right) + 1\left(2\sqrt{x} - 1\right) = \left(2\sqrt{x} - 1\right)\left(3\sqrt{x} + 1\right);$

b) $4x - 3\sqrt{x} - 1 = 4\left(\sqrt{x}\right)^2 - 4\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1$

$= 4\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) + 1\left(\sqrt{x} - 1\right) = \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(4\sqrt{x} + 1\right);$

c) $3a - 2\sqrt{ab} - b = 3\left(\sqrt{a}\right)^2 - 3\sqrt{ab} + \sqrt{ab} - \left(\sqrt{b}\right)^2$

$= 3\sqrt{a}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) + \sqrt{b}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(3\sqrt{a} + \sqrt{b}\right);$

d) $5x + 3\sqrt{xy} - 8y = 5\left(\sqrt{x}\right)^2 - 5\sqrt{xy} + 8\sqrt{xy} - 8\left(\sqrt{y}\right)^2$

$= 5\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) + 8\sqrt{y}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(5\sqrt{x} + 8\sqrt{y}\right).$

33. a) $10 + 2\sqrt{21} = \left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{7}.\sqrt{3} = \left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)^2;$

b) $12 - 2\sqrt{27} = 3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{9}.\sqrt{3} = \left(\sqrt{9} - \sqrt{3}\right)^2;$

c) $11 + 2\sqrt{30} = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{6}.\sqrt{5} = \left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)^2;$

d) $14 - 2\sqrt{45} = 3^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\sqrt{9}.\sqrt{5} = \left(\sqrt{9} - \sqrt{5}\right)^2.$

34. a) $\dfrac{\sqrt{45x^3}}{\sqrt{5x}} = \sqrt{\dfrac{45x^3}{5x}} = \sqrt{9x^2} = 3x$ (do $x > 0$);

b) $\dfrac{\sqrt{75y^3}}{\sqrt{3y}} = \sqrt{\dfrac{75y^3}{3y}} = \sqrt{25y^2} = 5y$ (do $y > 0$);

c) $\dfrac{\sqrt{80ab^2}}{\sqrt{125a}} = \sqrt{\dfrac{80ab^2}{125a}} = \sqrt{\dfrac{16b^2}{25}} = \dfrac{4b}{5}$ (do $b > 0$);

d) $\dfrac{\sqrt{81x^4y^6}}{\sqrt{729x^6y^6}} = \sqrt{\dfrac{81x^4y^6}{729x^6y^6}} = \sqrt{\dfrac{1}{9x^2}} = -\dfrac{1}{3x}$ (do $x < 0$).

35. a) $\sqrt{9(x-2)^2} = 3|x-2| = -3(x-2)$, vì $x \le 2$;

b) $\sqrt{16(y-1)^2} = 4|y-1| = 4(y-1)$, vì $y \ge 1$;

c) $\sqrt{x^2(x+3)^2} = |x(x+3)| = x(x+3)$, vì $x \ge 0$;

d) $\sqrt{y^2(y-2)^2} = |y(y-2)| = -y(y-2)$, vì $y < 0$.

36. a) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{1\left(1+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{3}$;

b) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-1\right)}{-1\left(\sqrt{3}-1\right)}=-\sqrt{5}$;

c) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}\,(2-1)}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$;

d) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{-1\left(\sqrt{x}-1\right)}=-\sqrt{x}$;

e) $\dfrac{y-2\sqrt{y}}{\sqrt{y}-2}=\dfrac{\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-2\right)}{\left(\sqrt{y}-2\right)}=\sqrt{y}$.

37. a) $M=\dfrac{x-\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)+3\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)}$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)}=\sqrt{x}+3.$$

b) $N=\dfrac{4y-4\sqrt{y}+7\sqrt{y}-7}{4\sqrt{y}+7}=\dfrac{4\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-1\right)+7\left(\sqrt{y}-1\right)}{\left(4\sqrt{y}+7\right)}$

$$=\frac{\left(4\sqrt{y}+7\right)\left(\sqrt{y}-1\right)}{\left(4\sqrt{y}+7\right)}=\sqrt{y}-1.$$

c) $P=\dfrac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{1\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=\sqrt{xy}$.

d) $Q=\dfrac{x+\sqrt{x}-4\sqrt{x-4}}{x-4\sqrt{x}+3\sqrt{x}-12}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-4\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)+3\left(\sqrt{x}-4\right)}$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-4\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}.$$

38. a) $\sqrt{5x} = 15 \Leftrightarrow 5x = 15^2 \Leftrightarrow x = 45.$

b) $\sqrt{3x} = \sqrt{6} \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2.$

c) $\sqrt{9(x-2)} = 6 \Leftrightarrow 9(x-2) = 6^2 \Leftrightarrow x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6.$

d) $\sqrt{9(x-3)^2} = 12 \Leftrightarrow 3|x-3| = 12 \Leftrightarrow |x-3| = 4$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=4 \\ x-3=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

39. a) $2\sqrt{2x} - \sqrt{8} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1;$

b) $\sqrt{6}x + \sqrt{6} = \sqrt{54} + \sqrt{24} \Leftrightarrow \sqrt{6}(x+1) = \sqrt{6}\left(\sqrt{9} + \sqrt{4}\right)$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 3 + 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

c) $\sqrt{7}x^2 - \sqrt{63} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{7}x^2 = \sqrt{7}.\sqrt{9} \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3}.$

d) $\dfrac{x^2}{\sqrt{10}} - \sqrt{12,1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{12,1}.\sqrt{10} = \sqrt{121} = 11 \Leftrightarrow x = \sqrt{11}; x = -\sqrt{11}.$

40. a) $\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 2\right) = x - 10$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 6 = x - 10 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

b) $\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 - x + 8 = 0 \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 - x + 8 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9.$

c) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{2} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{3} = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}-1\right) - 2\left(\sqrt{x}+2\right) = 6\left(\sqrt{x}-1\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = -\dfrac{1}{3}$ (vô nghiệm vì không có căn bậc hai số học nào là một số âm).

d) $x - \left(\sqrt{x} - 4\right)\left(\sqrt{x} - 5\right) = -38 \Leftrightarrow x - x - 9\sqrt{x} - 20 = -38$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

CHỦ ĐỀ 4

41. a) $\sqrt{72} = 6\sqrt{2};\quad \sqrt{108} = 6\sqrt{3};\quad \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$

b) $\sqrt{128} = 8\sqrt{2};\quad \sqrt{192} = 8\sqrt{3};\quad \sqrt{320} = 8\sqrt{5}.$

c) $\sqrt{162} = 9\sqrt{2};\quad \sqrt{243} = 9\sqrt{3};\quad \sqrt{405} = 9\sqrt{5}.$

42. a) $M = 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = -28\sqrt{3}$.

b) $N = 5\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 0$.

c) $P = 4\sqrt{x^2+1} - 8\sqrt{x^2+1} + 25\sqrt{x^2+1} = 21\sqrt{x^2+1}$.

43. a) $A = \dfrac{2}{x+y} \cdot \dfrac{|x+y|}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (vì $x + y > 0$).

b) $B = \dfrac{3}{3a-1} \cdot |3a-1|\sqrt{5a} = 3\sqrt{5a}$ (vì $a > \dfrac{1}{3}$).

44. a) $a\sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$ (Vì $a \geq 0$).

b) $b\sqrt{3} = -(-b)\sqrt{3} = -\sqrt{3b^2}$ (vì $b < 0$).

c) $ab\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \sqrt{\dfrac{a^2b^2a}{b}} = \sqrt{a^3b}$.

d) $ab\sqrt{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \sqrt{a^2b^2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)} = \sqrt{ab^2 + a^2b}$.

45. a) $3\sqrt{5} = \sqrt{45} < 4\sqrt{3} = \sqrt{48}$.

b) $\dfrac{1}{3}\sqrt{15} = \sqrt{\dfrac{15}{9}} = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$; $\quad \dfrac{1}{4}\sqrt{20} = \sqrt{\dfrac{20}{16}} = \sqrt{\dfrac{5}{4}}$

Vì $\sqrt{\dfrac{5}{3}} > \sqrt{\dfrac{5}{4}}$ nên $\dfrac{1}{3}\sqrt{15} > \dfrac{1}{4}\sqrt{20}$.

46. a) $2\sqrt{6} > 3\sqrt{2} > \sqrt{13} > 2\sqrt{3}$.

b) $\dfrac{1}{3}\sqrt{39} > \dfrac{1}{4}\sqrt{32} > \dfrac{1}{5}\sqrt{35} > \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$.

47. $\sqrt{\dfrac{1}{200}} = \sqrt{\dfrac{2}{400}} = \dfrac{\sqrt{2}}{20}$; $\quad \sqrt{\dfrac{11}{180}} = \sqrt{\dfrac{11.5}{900}} = \dfrac{\sqrt{55}}{30}$.

$\sqrt{\dfrac{5}{27}} = \sqrt{\dfrac{5.3}{9^2}} = \dfrac{\sqrt{15}}{9}$; $\quad \sqrt{\dfrac{5}{128}} = \sqrt{\dfrac{5.2}{16^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{16}$.

$\sqrt{\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^3}{27}} = \sqrt{\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 3\left(1+\sqrt{2}\right)}{9^2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{9}\sqrt{3+3\sqrt{2}}$.

48. $xy\sqrt{\dfrac{x}{y}} = xy\sqrt{\dfrac{xy}{y^2}} = \dfrac{xy}{y}\sqrt{xy} = x\sqrt{xy}$.

$\dfrac{x}{y}\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{x}{y}\sqrt{\dfrac{xy}{y^2}} = \dfrac{x}{y^2}\sqrt{xy}$.

$\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{a+1}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{a+1}}{a}$.

$\sqrt{\dfrac{4x^3}{25y}} = \sqrt{\dfrac{4x^2xy}{25y^2}} = \dfrac{2x}{5y}\sqrt{xy}$.

49. a) $A = \dfrac{\sqrt{6}}{3} + \dfrac{2\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

b) $B = \dfrac{3}{5}\sqrt{10} + \dfrac{1}{2}\sqrt{10} - 2\sqrt{10} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$.

c) $C = -\dfrac{1}{5}\sqrt{15} + \dfrac{3}{3}\sqrt{15} - 4\sqrt{15} = -\dfrac{16}{5}\sqrt{15}$.

50. a) $M = \dfrac{1}{7}\sqrt{21a} - \dfrac{2}{3}\sqrt{21a} + \sqrt{21a} = -\dfrac{10}{21}\sqrt{21a}$.

b) $N = \dfrac{2}{3}\sqrt{6x} - \dfrac{3}{2}\sqrt{6x} + \sqrt{6x} = \dfrac{1}{6}\sqrt{6x}$.

c) $P = \dfrac{4}{5}\sqrt{10y} + \dfrac{3}{2}\sqrt{10y} - \sqrt{10y} = \dfrac{13}{10}\sqrt{10y}$.

51. a) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$.

b) $\dfrac{26}{5+2\sqrt{3}} = \dfrac{26\left(5-2\sqrt{3}\right)}{\left(5+2\sqrt{3}\right)\left(5-2\sqrt{3}\right)} = \dfrac{26\left(5-2\sqrt{3}\right)}{25-12} = 10-4\sqrt{3}$.

c) $\dfrac{2\sqrt{6}-3}{4-\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

d) $\dfrac{75-2\sqrt{5}}{3\sqrt{15}-2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}\left(3\sqrt{5}-2\right)}{\sqrt{3}\left(3\sqrt{5}-2\right)} = \dfrac{\sqrt{5}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

52. a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\sqrt{x}}{2\sqrt{x}.\sqrt{x}}=\dfrac{x+\sqrt{xy}}{2x}$.

b) $\dfrac{x-4y}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)}{1\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}=\sqrt{x}+2\sqrt{y}$.

c) $\dfrac{a-9b}{\sqrt{a}-3\sqrt{b}}=\dfrac{\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)}{1\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)}=\sqrt{a}+3\sqrt{b}$.

d) $\dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)}=x+\sqrt{x}+1$.

53. a) Vì $\dfrac{6}{\sqrt{7}-2}=\dfrac{6\left(\sqrt{7}+2\right)}{\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)}=\dfrac{6\left(\sqrt{7}+2\right)}{7-4}=2\sqrt{7}+4$

$\dfrac{5}{4+\sqrt{7}}=\dfrac{5\left(4-\sqrt{7}\right)}{\left(4+\sqrt{7}\right)\left(4-\sqrt{7}\right)}=\dfrac{5\left(4-\sqrt{7}\right)}{16-7}=\dfrac{20-5\sqrt{7}}{9}$

nên $A=\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}-\dfrac{6-2\sqrt{7}}{4}+2\sqrt{7}+4+\dfrac{20-5\sqrt{7}}{9}=\dfrac{32\sqrt{7}-20}{9}$

b) $B=\dfrac{17\sqrt{6}}{6}$.

54. a) $C=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}$

$=\dfrac{2\sqrt{6}\left(2\sqrt{6}+1\right)}{\left(2\sqrt{6}-1\right)\left(2\sqrt{6}+1\right)}=\dfrac{2\sqrt{6}\left(2\sqrt{6}+1\right)}{23}$.

b) $D=\left[\dfrac{-\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{1\left(1-\sqrt{3}\right)}-\dfrac{\sqrt{5}.\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right].\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=-\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

55*. a) $E=2\sqrt{80\sqrt{3}}+3\sqrt{20\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-12\sqrt{5\sqrt{3}}$

$=8\sqrt{5\sqrt{3}}+6\sqrt{5\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-12\sqrt{5\sqrt{3}}=0$.

b) Vì $\frac{5}{12}-\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{5-2\sqrt{6}}{12}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{12}$;

$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6}$

nên $F=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{12}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

56. 1) Vì M có dạng a : b nên ta thực hiện theo thứ tự sau:

– Làm tính trong ngoặc tròn: $a=\frac{\sqrt{x}+1+x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

– Rút gọn: $b=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

– Làm tính chia a cho b ta được:

$$M=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\sqrt{x}+1}{1}=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\text{(với điều kiện } x>0\text{)}.$$

2) Thay x = 4 vào M ta được:

$$M=\frac{4+\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}\left(\sqrt{4}+1\right)}=\frac{4+2+1}{2}=\frac{7}{2}.$$

3) $M=\frac{13}{3}\Leftrightarrow\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\frac{13}{3}$ (với $x>0$)

$$\Leftrightarrow 13x+3\sqrt{x}+3=13\sqrt{x}\Leftrightarrow 13x-10\sqrt{x}+3=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)\left(3\sqrt{x}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=3\\ \sqrt{x}=\frac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\ x=\frac{1}{9}\end{array}\right.$$

57. 1) $N=\frac{x+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)}$.

2) Khi x = 25 thì $\sqrt{x}=5$. Thay $\sqrt{x}=5$ vào N ta được

$$N = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0; x \neq 4 & (1) \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = -\dfrac{1}{3} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow 3\sqrt{x} = -\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Ta thấy $x = \frac{1}{4}$ thoả mãn điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

Vậy $x = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

58*. 1) $P = \dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$. 2) $128\sqrt{2} - 1$.

3) $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

59*. 1) $Q = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$. 2) $\dfrac{25-\sqrt{5}}{31}$.

3) Min $Q = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

60*. 1) $R = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$. 2) $\dfrac{1}{4}$.

3) $\text{Max}R = \dfrac{25}{16} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{16}{25}$.

61. a, b xem ví dụ 3, dạng 3, chủ đề 3.
c, d xem ví dụ 3, dạng 3, chủ đề 3.

62. Biến đổi vế phải : $VP = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = VT$

63. Viết lại đẳng thức thành : $1 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$

Rồi biến đổi vế phải.

64. Biến đổi vế trái ta được:

$$VT = \left(a + b - 2\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2 = \left[\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}\right]^2 = 1 = VP.$$

65*. Chia hai vế của đẳng thức cho $\sqrt{2} > 0$, ta được:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = 1.$$

Biến đổi vế trái, ta được:

$$VT = \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)} = \frac{6}{6} = 1 = VP.$$

66. Từ $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = n+1-n = 1$. Suy ra a, b.

$\left(\sqrt{n+d}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+d}-\sqrt{n}\right) = n+d-n = d$. Suy ra c,d.

67*. a) $A = \sqrt{10}-1$; b) $B = 2$;

c) $C = 2$; d) $D = \frac{4}{3}$;

e) $E = -\frac{4}{3}$; f) $F = -1$.

68. a) $\sqrt{10}+\sqrt{13} < \sqrt{11}+\sqrt{12}$; b) $\sqrt{100}+\sqrt{200} < \sqrt{104}+\sqrt{196}$;

c) $\sqrt{10}+\sqrt{20} < \sqrt{12}+\sqrt{19}$; d) $\sqrt{a}+\sqrt{a+7} < \sqrt{a+2}+\sqrt{a+5}$.

69. Biến đổi tương đương

a) $ab(a+b) \le a^3+b^3 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \ge 0$.

b) $ab\left(a^2+b^2\right) \le a^4+b^4 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right)^2 \ge 0$.

c) $\frac{a^2}{a^4+1} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow \left(a^2-1\right) \ge 0$.

d) $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \ge 2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+1}-1\right)^2 \ge 0$.

70. Biến đổi tương đương

a) $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab} \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$.

b) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \ge a+b+c \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow (ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(bc-ab)^2 \ge 0$.

c) $a^4+b^4+c^2+1 \ge 2a\left(ab^2-a+c+1\right) \Leftrightarrow ...$

$$\Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)^2+(a-c)^2+(a-1)^2 \ge 0$$

71. a) Biến đổi tương đương $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow(bx-ay)^2\geq 0$.

b) áp dụng kết quả câu a)

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}.$$

72. Xem ví dụ 5, dạng 7, chủ đề 4.

73. a) $Y = x+\sqrt{x}+3\geq 3$ với mọi $x\geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi x = 0.
Vậy Min Y = 3 đạt được tại x = 0.

b) $Y=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+10\geq 10$ với mọi $x\geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi x = 0.

V ậy Min Y = 10, đ ạt đ ư ợc t ại $x=\frac{1}{4}$.

c) Từ $\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$ với mọi $x\geq 0$, suy ra

$$x-2\sqrt{x}+1\geq 0\Rightarrow x+\sqrt{x}+2\geq 3\sqrt{x}+1>0.$$

nên $Y=\frac{3\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+2}\leq 1$ với mọi $x\geq 0$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 1. Vậy Max Y = 1, đ ạt đ ư ợc t ại x = 1.

d) Từ $\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$ với mọi $x\geq 0$. Suy ra

$$x-2\sqrt{x}+1\geq 0\Rightarrow x+\sqrt{x}+3\geq 3\sqrt{x}+2>0$$

nên $Y=\frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+3}\leq 1$ với mọi $x\geq 0$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 1. Vậy Max Y = 1, đ ạt đ ược t ại x = 1.

CHỦ ĐỀ 5

74. $\sqrt[3]{-216}=\sqrt[3]{(-6)^3}=-6$; $\sqrt[3]{512}=\sqrt[3]{8^3}=8$; $\sqrt[3]{729}=\sqrt[3]{9^3}=-9$.

75. $\sqrt[3]{0,001x^3}=\sqrt[3]{(0,1x)^3}=0,1x$; $\sqrt[3]{-125a^{12}}=\sqrt[3]{\left(-5a^4\right)^3}=-5a^4$.

$\sqrt[3]{27x^6}=\sqrt[3]{\left(3x^2\right)^3}=3x^2$; $\sqrt[3]{-0,343a^3}=\sqrt[3]{(-0,7a)^3}=-0,7a$.

76. a) $x^3=2\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$. Vậy $S=\left\{\sqrt[3]{2}\right\}$.

b) $27x^3=-81\Leftrightarrow x^3=-3\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{-3}\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{3}$. Vậy $S=\left\{\sqrt[3]{3}\right\}$.

c) $\frac{1}{2}x^3 = 0,004 \Leftrightarrow x^3 = 0,008 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{0,008} \Leftrightarrow x = 0,2$. Vậy $S = \left\{\sqrt[3]{2}\right\}$.

d) $\sqrt[3]{3x+1} = 4 \Leftrightarrow 3x+1 = 4^3 \Leftrightarrow x = 21$.

e) $\sqrt[3]{3-2x} = -3 \Leftrightarrow 3-2x = (-3)^3 \Leftrightarrow x = 15$.

f) $\sqrt[3]{x-2} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2} = x-2 \Leftrightarrow x-2 = (x-2)^3$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[(x-2)^2 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=1 \\ (x-2)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x-2=1 \\ x-2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3. \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy $S = \{1;2;3\}$

77. a) Vì $54 < 55 \Rightarrow \sqrt[3]{54} < \sqrt[3]{55}$ hay $3\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{55}$.

b) Vì $108 > 104 \Rightarrow \sqrt[3]{108} > \sqrt[3]{104}$ hay $3\sqrt[3]{4} < 2\sqrt[3]{13}$.

78. a) $\sqrt[3]{x} < 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 < 2^3 \Leftrightarrow x < 8$.

b) $\sqrt[3]{2x-1} > -3 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3 > (-3)^3 \Leftrightarrow 2x-1 > -27 \Leftrightarrow x > -13$.

c) $\sqrt[3]{2-3x} \le 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2-3x}\right)^3 \le 1^3 \Leftrightarrow 2-3x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le x$.

d) $\sqrt[3]{3-4x} \ge 5 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3-4x}\right)^3 \ge 5^3 \Leftrightarrow 3-4x \ge 125 \Leftrightarrow -\frac{61}{2} \ge x$.

79. a) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.\sqrt[3]{-12}.\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{-12.2}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

b) $\sqrt[3]{9}.\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{24}\right) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{27} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{216} = \frac{1}{3}.3 - \frac{1}{6}.6 = 0$.

c) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) : 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{9} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \sqrt[3]{9} = \frac{9}{4} - \sqrt[3]{9}$.

80. a) $\sqrt[3]{8\sqrt{5}+16} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+1\right)^3} = \sqrt{5}+1$.

b) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+2\right)^3} = \sqrt{3}+2$.

81. a) $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right) = \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 3+2 = 5$.

b) $\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}\right) = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 5-3 = 2$.

c) $\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right) = \left(\sqrt[3]{7}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 7+2 = 9$.

Chương 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT

Chủ đề 1

NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Khái niệm hàm số

1. Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x, x được gọi là *biến số*.

2. Hàm số có thể cho bằng bảng hoặc cho bằng công thức.

3. Khi y là hàm số của x, ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$... Ta quy ước nói cho hàm số y, hay hàm số $f(x)$.

Chẳng hạn: cho hàm số $y = f(x) = x + 1$ hay $y = x + 1$.

4. Khi cho hàm số bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta có quy ước sau: Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

5. Giá trị của hàm $f(x)$ tại x_0 kí hiệu là $f(x_0)$.

6. Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm y được gọi là *hàm hằng*, chẳng hạn: $y = 2$.

II. Mặt phẳng toạ độ

1. Cặp số sắp thứ tự: Trong nhiều vấn đề toán học, người ta dùng các cặp số. Ví dụ $(x; y) = (1; 2)$. Trong cách viết đã nêu, cần chú ý đến thứ tự: Viết x trước, viết y sau. Một cặp số như vậy được gọi là một cặp sắp thứ tự.

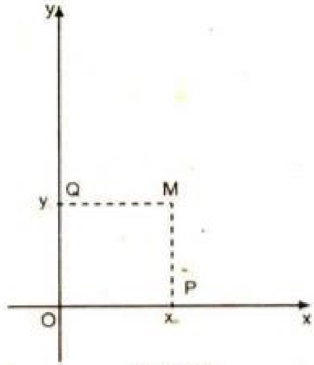
2. Mặt phẳng toạ độ

Để biểu thị các số, người ta dùng trục số.

Để biểu thị các cặp số sắp thứ tự, người ta dùng mặt phẳng toạ độ.

a) Mặt phẳng toạ độ là mặt phẳng trên đó vẽ hai trục số: Ox nằm ngang, Oy thẳng đứng vuông góc với nhau và cắt nhau tại O. Trục Ox được gọi là *trục hoành*, trục Oy gọi là *trục tung*. Điểm O là gốc toạ độ chung cho cả hai trục. Khi đó ta có hệ trục Oxy.

b) Trên mặt phẳng toạ độ (h.2.1): Mỗi điểm M xác định một cặp số $(x_{0;}\ y_0)$; Ngược lại, mỗi cặp số $(x_{0;}\ y_0)$ xác định một điểm M. Cặp số $(x_{0;}\ y_0)$ gọi là toạ độ của điểm M, x_0 là hoành độ và y_0 là tung độ.



Hình 2.1

Điểm M có toạ độ $(x_{0;}\ y_0)$ được kí hiệu $M(x_{0;}\ y_0)$.

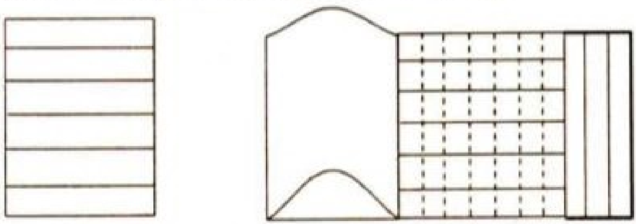
Các điểm đặc biệt trên mặt phẳng toạ độ

Điểm gốc O có toạ độ (0; 0).

Điểm nằm trên trục hoành Ox có toạ độ (x; 0).

Điểm nằm trên trục tung Oy có toạ độ (0; y).

3. Tạo lưới ô vuông để có mặt phẳng toạ độ Oxy:


a) b)

Hình 2.2

Bước 1: Tô đậm dòng kẻ ngang của một tờ giấy vở (h.2.2a).

Bước 2: Cài tờ giấy kẻ ngang (xoay 90^0) dưới tờ giấy của vở ghi, sao cho mép vở trùng với một dòng kẻ ngang bất kì. Tờ giấy của vở ghi hợp với tờ giấy kẻ ngang thành một lưới ô vuông hoàn chỉnh (h.2.2b).

III. Đồ thị hàm số

1. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các điểm $M(x;\ y)$ trên hệ trục toạ độ Oxy thoả mãn $y = f(x)$. Hệ thức này còn được gọi là phương trình của đồ thị.

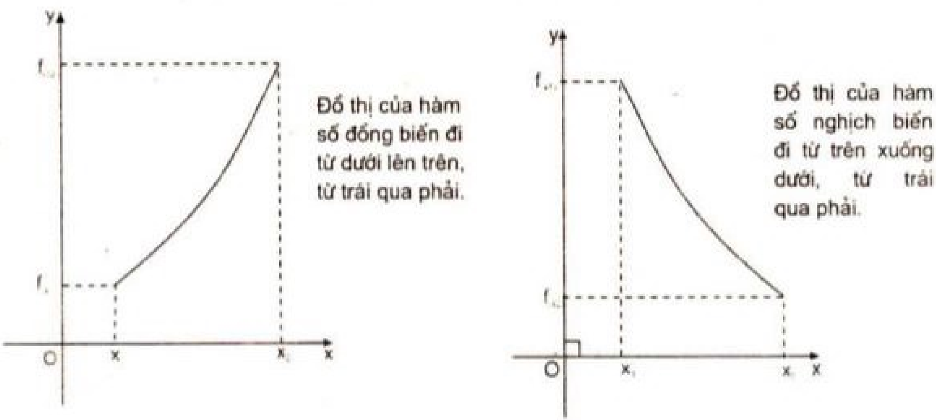
2. Điểm $M(x_{0;}\ y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow f(x_0) = y_0$.

IV. Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp số thực **R**.

Với mọi x_1; x_2 thuộc **R**.

1. Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên **R**. *(biến tăng, hàm tăng)*
2. Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên **R**. *(biến tăng, hàm giảm)*
3. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cho ta biết chiều biến thiên của nó.



a) **Hình 2.3** b)

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÍNH GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ TẠI $x = x_0$

I. Phương pháp giải

1. Thay $x = x_0$ vào công thức của hàm số.
2. Tính giá trị biểu thức $f(x_0)$.

II. Ví dụ

Ví dụ 1:

a) Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2}{3}x$.

Tính $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$.

b) Cho hàm số $y = g(x) = \frac{2}{3}x + 3$.

Tính $g(-2)$;$g(-1)$; $g(0)$;$g\left(\frac{1}{2}\right)$; $g(1)$ $g(2)$;$g(3)$.

c) Có nhận xét gì về giá trị của hai hàm số đã cho ở trên khi biến x lấy cùng một giá trị?

Giải

a) Xét $y = f(x) = \frac{2}{3}x$.

Thay $x = -2$ vào công thức của hàm số trên ta được

$$f(-2) = \frac{2}{3}(-2) = -\frac{4}{3};$$

$$f(-1) = -\frac{2}{3};\ f(0) = 0\ f(1) = \frac{2}{3};\ f(2) = \frac{4}{3};\ f(3) = 2.$$

b) $y = g(x) = \frac{2}{3}x + 3$.

Thay $x = -2$ vào công thức của hàm số trên ta được

$$g(-2) = \frac{2}{3}(-2) + 3 = -\frac{4}{3} + 3 = \frac{5}{3};\ g(-1) = -\frac{2}{3} + 3 = \frac{7}{3};$$

$$g(0) = 3;\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3};\ g(1) = \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3};$$

$$g(2) = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3};\ g(3) = 2 + 3 = 5.$$

c) Khi biến x lấy cùng một giá trị thì giá trị của hàm số $y = g(x)$ luôn lớn hơn giá trị của hàm số $y = f(x)$ là 3 đơn vị.

Ví dụ 2: Cho các hàm số $y = 0,5x$ và $y = 0,5x + 2$.

a) Tính giá trị của mỗi hàm số theo giá trị đã cho của biến x rồi điền vào bảng sau:

x	−2,5	−2,25	−1,5	−1	0	1	1,5	2,25	2,5
$y = 0,5x$									
$y = 0,5x + 2$									

b) Có nhận xét gì về các giá trị tương ứng của hai hàm số khi biến x lấy cùng một giá trị?

Giải

a) Giá trị tương ứng của y theo x được cho bởi bảng sau:

x	–2,5	–2,25	–1,5	–1	0	1	1,5	2,25	2,5
y = 0,5x	–1,25	–1,125	–0,75	–0,5	0	0,5	0,75	1,125	1,25
y = 0,5x + 2	0,75	0,875	1,25	1,5	2	2,5	2,75	3,125	3,25

b) Khi biến x lấy cùng một giá trị thì giá trị của hàm số y = 0,5x + 2 luôn lớn hơn giá trị của hàm số y = 0,5x là 2 đơn vị.

Ví dụ 3: Cho hàm số: $y = \sqrt{x} + 1$ (1).

Tìm tập xác định của hàm số;

Tính $f(-2); f(-1); f(0); f\left(3-2\sqrt{2}\right); f\left(4+2\sqrt{3}\right)$.

Trong các điểm A (0; 1); B (1; 3); C(4; 3) điểm nào thuộc đồ thị và điểm nào không thuộc đồ thị hàm số.

Giải

Tập xác định của hàm số là tập hợp các số thực x sao cho $\sqrt{x}$ có nghĩa, tức là $\{x \in \mathbb{R} \setminus x \geq 0\}$.

Vì $x = -2 < 0$ không thuộc tập xác định của hàm số nên $f(-2)$ không xác định.

Vì $x = -1 < 0$ không thuộc tập xác định của hàm số nên $f(-1)$ không xác định.

Thay x = 0 vào công thức của hàm số ta được $f(0) = \sqrt{0} + 1 = 1$;

Vì

$x = 3-2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$ nên $f\left(3-2\sqrt{2}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} + 1 = \sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2}$;

$x = 4+2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$ nên

$$f\left(4+2\sqrt{3}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} + 1 = \sqrt{3} + 1 + 1 = \sqrt{3} + 2.$$

c) Điểm A(0; 1) thuộc đồ thị hàm số (1) vì $\sqrt{0} + 1 = 1$.

Điểm B(1; 3) không thuộc đồ thị hàm số (1) vì $\sqrt{1} + 1 \neq 3$.

Điểm C(4; 3) thuộc đồ thị hàm số (1) vì $\sqrt{4} + 1 = 3$.

III. Bài tập

1. Cho hàm số $y = f(x) = x + 1$.

Tính $f(-3)$; $f\left(-1\frac{1}{2}\right)$; $f(0)$; $f\left(1\frac{2}{3}\right)$.

2. Cho hàm số $y = g(x) = \frac{2}{x}$.

a) Tìm x để giá trị của hàm số không xác định.

b) Tính $g(-1); g\left(-\frac{1}{2}\right); g(0); g\left(\frac{1}{3}\right)$.

c) Trong các điểm $M(-1;-2)$; $N(2;0)$; $P\left(\frac{1}{2};4\right)$ điểm nào thuộc và điểm nào không thuộc đồ thị hàm số.

3. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

a) Tính $f(-3)$; $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$.

b) Có nhận xét gì về giá trị tương ứng của hàm số khi biến x lấy hai giá trị đối nhau.

Dạng 2
CHỨNG MINH HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN HOẶC NGHỊCH BIẾN

I. Phương pháp giải

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Xác định $f(x_1); f(x_2)$.
3. Sắp thứ tự $f(x_1); f(x_2)$ nhờ thứ tự của $x_1; x_2$ rồi rút ra kết luận.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x) = 3x$. Cho các giá trị thực bất kỳ $x_1; x_2$ sao cho $x_1 < x_2$. Hãy chứng minh $f(x_1) < f(x_2)$ rồi rút ra kết luận hàm số đã cho đồng biến trên tập hợp số thực R.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên tập số thực **R**.

Với $x_1; x_2 \in \mathbf{R}$ thì $f(x_1) = 3x_1; f(x_2) = 3x_2$.

Từ $x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2$ hay $f(x_1) < f(x_2)$. Vậy hàm số đã cho đồng biến trên tập số thực **R**.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x) = -2x$. Chứng minh hàm số nghịch biến trên tập số thực **R**.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên tập số thực **R**.

Với $x_1; x_2 \in \mathbf{R}$ thì $f(x_1) = -2x_1; f(x_2) = -2x_2$.

Từ $x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2$ hay $f(x_1) > f(x_2)$. Điều đó chứng tỏ hàm số đã cho nghịch biến trên tập số thực **R**.

III. Bài tập

4. Chứng minh hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x - 1$ đồng biến trên tập hợp số thực **R**.

5. Chứng minh hàm số $y = f(x) = -3x + 2$ nghịch biến trên tập hợp số thực **R**.

Dạng 3
BIỂU DIỄN ĐIỂM TRÊN MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

Đồ thị của hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$.

Đồ thị của hàm hằng $y = b$.

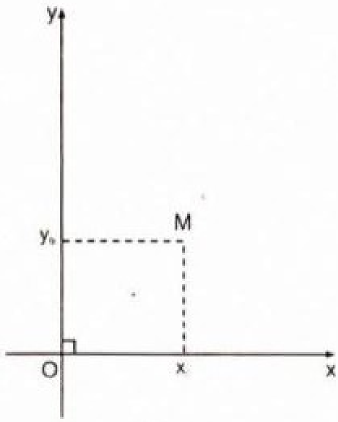
I. Phương pháp giải

Sử dụng lưới ô vuông để vẽ hệ trục toạ độ vuông góc Oxy.

1. Biểu diễn điểm M $(x_0; y_0)$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

   Bước 1: Từ điểm có hoành độ x_0 trên trục Ox kẻ đường thẳng (nét đứt) vuông góc với Ox.

   Bước 2: Từ điểm có tung độ y_0 trên trục Oy kẻ đường thẳng (nét đứt) vuông góc với Oy. Giao điểm của hai đường vuông góc nói trên là điểm M.

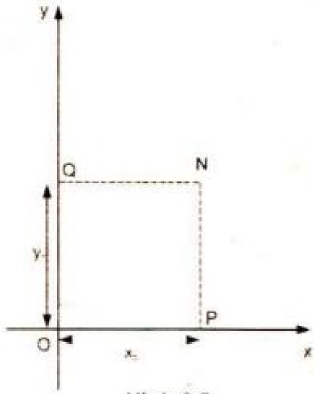


Hình 2.4

2. Tìm toạ độ của điểm N trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Bước 1: Kẻ NP ⊥ Ox (nét đứt), điểm P ∈ Ox biểu thị một số thực x_0 gọi là hoành độ của điểm N.

Bước 2: Kẻ NQ ⊥ Oy (nét đứt), điểm Q ∈ Oy biểu thị một số thực y_0 gọi là tung độ của điểm N.



Hình 2.5

3. Đồ thị của hàm số $y = ax$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ.

Bước 1: Tìm một điểm M của đồ thị, khác điểm gốc O bằng cách cho x một giá trị khác 0 và tìm giá trị tương ứng của y.

Bước 2: Vẽ hệ trục toạ độ Oxy xác định điểm M có toạ độ vừa tìm ở trên thì đường thẳng OM là đồ thị của hàm số y = ax.

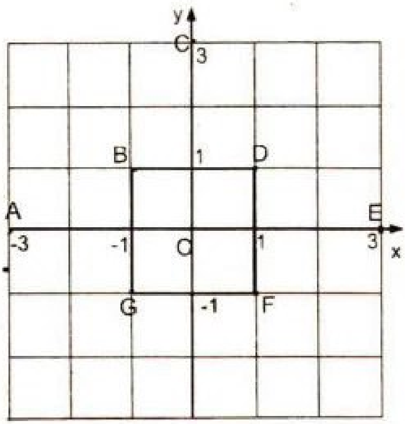
II. Ví dụ

Ví dụ 1: Hãy biểu diễn các điểm sau trên mặt phẳng toạ độ:

A(−3; 0); B(−1; 1); C(0; 3); D(1; 1); E(3; 0); F(1; −1); G(−1; −1).

Giải.

Xem hình vẽ (h.2.6).



Hình 2.6

Ví dụ 2: Cho hàm số y = 2x và y = −2x.

Vẽ trên cùng mặt phẳng toạ độ đồ thị của hai hàm số đã cho.

Trong hai hàm số đã cho, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến ? Vì sao?

Giải

Ta lập bảng giá trị ứng với hai giá trị của x của hai hàm số

x	0	1
y = 2x	0	2

A(1; 2);

x	0	1
y = −2x	0	−2

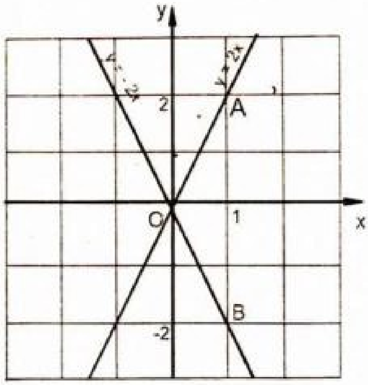
B (1; −2)

Nối OA ta được đường thẳng là đồ thị hàm số y = 2x.

Nối OB ta được đồ thị hàm số y = −2x.

Hàm số y = 2x đồng biến vì hàm số này có đồ thị đi từ dưới lên trên từ trái qua phải.

Hàm số y = −2x nghịch biến vì hàm số này có đồ thị đi từ trên xuống dưới từ trái qua phải (xem h.2.7).



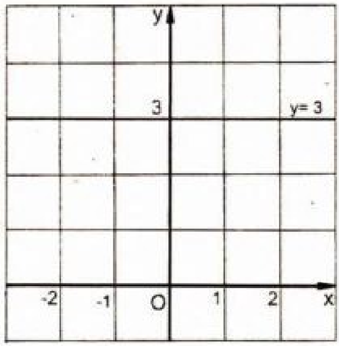
Hình 2.7

Ví dụ 3: Cho hàm số y = 3.

a) Xác định giá trị của hàm số tại x = −2, −1, 0, 1, 2.

b) Biểu diễn các điểm: (−2; 3); (−1; 3); (0; 3); (1; 3); (2; 3) trên mặt phẳng toạ độ.

c) Nêu nhận xét và vẽ đồ thị của hàm số y = 3.



Hình 2.8

Giải

a) Vì $y = f(x) = 3$ với mọi x (do hàm hằng không chứa biến x) nên

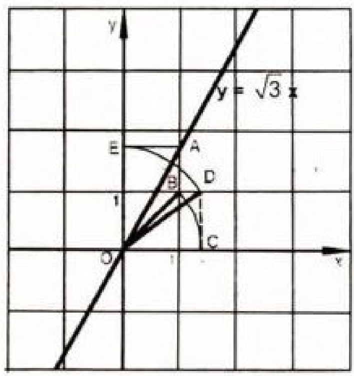
$$f(-2) = f(-1) = f(0) = f(1) = f(2) = 3.$$

b) Như hình vẽ (h.2.8).

c) Đồ thị của hàm số y = 3 là một đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm (0; 3). Đường thẳng này gọi là đường thẳng y = 3.

Ví dụ 4: Đồ thị hàm số $y = \sqrt{3}x$ được vẽ bằng thước và com pa như ở hình 2.9.

Hãy tìm hiểu và trình bày lại các bước thực hiện đó.



Hình 2.9

Giải

Lập bảng giá trị tại hai giá trị x của hàm số

x	0	1
$y = \sqrt{3}x$	0	$\sqrt{3}$

$A(1; \sqrt{3})$

Then chốt của bài này là dựng đoạn $OE = \sqrt{3}$ bằng thước và com pa.

Vì $OE = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}$ nên OE = OD là cạnh huyền OD của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là $OC = \sqrt{2}$ và CD = 1. Lại có: OC = OB là cạnh huyền của tam giác vuông cân có hai cạnh góc vuông bằng 1. Từ đó suy ra các bước vẽ đồ thị như sau:

Bước 1: Xác định điểm B(1; 1).

Bước 2: Vẽ đường tròn (O; OB) cắt Ox tại C thì $OC = \sqrt{2}$.

Bước 3: Xác định điểm D ($\sqrt{2}$; 1).

Bước 4: Vẽ đường tròn (O, OD) cắt Oy tại E, có $OE = \sqrt{3}$.

Bước 5: Xác định điểm A(1; $\sqrt{3}$), nối OA thu được đồ thị hàm số $y = \sqrt{3}x$.

Ví dụ 5: a) Vẽ đồ thị của các hàm số y = x, y = 2x trên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy.

b) Đường thẳng y = 4 lần lượt cắt các đường thẳng y = 2x; y = x tại điểm A và B. Tìm toạ độ các điểm A và B và tính chu vi, diện tích của tam giác OAB.

Giải

a) Lập bảng giá trị của hai hàm số.

x	0	1
y = x	0	1

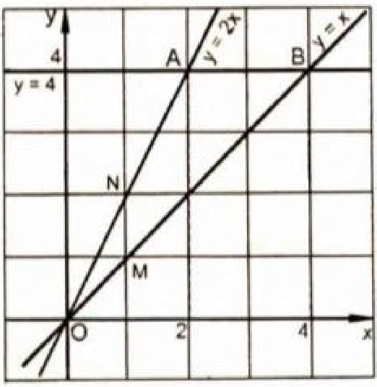
với M = (1; 1)

x	0	1
y = 2x	0	2

với N = (1; 2)

Nối MO ta được đồ thị hàm số y = x.

Nối NO ta được đồ thị hàm số y = 2x (xem h.2.10).



Hình 2.10

b) Quan sát trên lưới ô vuông ở đầu bài ta thấy A(2; 4); B(4; 4). Xét tam giác OAB có AB = 2, OA là cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 4 và 2; OB là cạnh huyền của tam giác vuông cân có hai cạnh góc vuông là 4.

Áp dụng hệ thức Pytago ta được:

$$OA = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \text{ (cm)}; OB = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} \text{ (cm)}.$$

Vậy chu vi tam giác OAB là: $P = 2 + \sqrt{20} + \sqrt{32} \approx 12.13$ (cm).

Diện tích tam giác OAB là: $S = \frac{1}{2}.2.4 = 4$ (cm^2).

III. Bài tập

6. Vẽ đồ thị hàm số hằng y = 2.

7. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy dựng đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{5}$ bằng thước kẻ và compa. Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{5}x$.

Chủ đề 2

ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Hàm số bậc nhất là các hàm số được cho bởi công thức y = ax + b, trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.

2. Tính chất

Hàm số bậc nhất y = ax + b xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$ và có tính chất:

Đồng biến trên R, khi a > 0.

Nghịch biến trên R, khi a < 0.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1

NHẬN DẠNG HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. Phương pháp giải

1. Viết lại hàm số thành y = ax + b (tổng của hai hạng tử). Nếu thiếu hạng tử tự do điền số 0, thiếu hệ số điền số 1.
2. Xác định các hệ số: a là hệ số của biến x, b là hạng tử tự do (không chứa biến).
3. Nếu a > 0 hàm số đồng biến, nếu a < 0 hàm số nghịch biến.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong các hàm số sau hàm số nào là hàm số bậc nhất?

Hãy xác định các hệ số a, b của chúng và xét xem hàm số nào đồng biến, nghịch biến.

a) $y = 1 - 5x$; b) $y = -0{,}5x$;

c) $y = \sqrt{2}(x-1) + \sqrt{3}$ d) $y = 2x^2 + 3$;

e) $y = 4a + 1$ (a: hằng số).

Giải

a) Viết lại thành: $y = -5x + 1$. Đây là hàm số bậc nhất, có $a = -5$, $b = 1$.

Vì $a = -5 < 0$, nên hàm số này là hàm nghịch biến.

b) Viết lại thành: $y = -0{,}5x + 0$. Đây là hàm số bậc nhất, có $a = -0{,}5$, $b = 0$.

Vì $a = -0{,}5 < 0$, nên hàm số này là hàm nghịch biến.

c) Viết lại thành: $y = \sqrt{2}\,x + \sqrt{3} - \sqrt{2}$. Đây là hàm số bậc nhất, có $a = \sqrt{2}$, $B = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. Vì $a = \sqrt{2} > 0$, nên hàm số này đồng biến.

d) Hàm số $y = 2x^2 + 3$ không phải là hàm số bậc nhất.

e) Hàm số là hàm hằng, không phải bậc nhất.

Ví dụ 2: Với những giá trị nào của m thì mỗi hàm số sau là hàm bậc nhất?

a) $y = \sqrt{5-m}\,(x-1)$; b) $y = \dfrac{m+1}{m-1}x + 3{,}5$.

Giải

a) Viết lại thành $y = \sqrt{5-m}\,x - \sqrt{5-m}$. Đây là hàm số dạng bậc nhất có

$$a = \sqrt{5-m} \text{ và } b = -\sqrt{5-m}$$

Hàm số này trở thành hàm bậc nhất $\Leftrightarrow a = \sqrt{5-m} \neq 0$

$$\Leftrightarrow 5-m > 0 \Leftrightarrow 5 > m.$$

Vậy $m < 5$ là giá trị cần tìm.

b) Hàm số $y = \dfrac{m+1}{m-1}x + 3{,}5$ là hàm số dạng bậc nhất có $a = \dfrac{m+1}{m-1}$, $b = 3{,}5$.

Hàm số này trở thành hàm bậc nhất $\Leftrightarrow a = \dfrac{m+1}{m-1} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Vậy $m \neq \pm 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho hàm số bậc nhất $y = (m-1)x + 2$ $(m \neq 1)$.

a) Tìm giá trị của m để hàm số y là đồng biến.

b) Tìm giá trị của m để hàm số y là nghịch biến.

Giải

a) Hàm số bậc nhất $y = (m - 1)x + 2$ có $a = m - 1$, $b = 2$.

Hàm số này đồng biến $\Leftrightarrow a = m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy $m > 1$ là giá trị cần tìm.

b) Hàm số bậc nhất $y = (m - 1)x + 2$ có $a = m - 1$, $b = 2$.

Hàm số này nghịch biến $\Leftrightarrow a = m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Vậy $m < 1$ là giá trị cần tìm.

III. Bài tập

8. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Hãy xác định các hệ số a, b và xét xem hàm số nào là đồng biến, hàm số nào là nghịch biến.

a) $y = 2 - 0{,}3x$; b) $y = \frac{3}{2}x$;

c) $y = 4 - x^2$; d) $y = \left(\sqrt{3} - 1\right)x + 2$;

e) $y = \sqrt{3}\left(\sqrt{2} - x\right)$ f) $y + \sqrt{3} = x - \sqrt{2}$;

g) $y = a + \sqrt{3}$ (a là hằng số).

9. Với các giá trị nào của m thì mỗi hàm số sau là hàm số bậc nhất?

a) $y = \frac{1}{m^2 - 1}(2x - 1)$; b) $y = \sqrt{1 - 2m}\,(x + 3)$.

10. Với những giá trị nào của m thì mỗi hàm số bậc nhất sau đây là hàm nghịch biến?

a) $y = -m^2x + 1$; b) $y = (1 - 3m)x - 2$.

Dạng 2

TÍNH GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT GIÁ TRỊ CỦA BIẾN SỐ

I. Phương pháp giải

1. Muốn tính giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại $x = x_0$ ta thay $x = x_0$ vào công thức của hàm số rồi tính giá trị của $f(x_0)$.

2. Muốn tính giá trị biến x của hàm số $y = f(x)$ tại $y = f(x_0)$. Ta thay $y = f(x_0)$ vào công thức của hàm số rồi giải phương trình ẩn x.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số bậc nhất $y = (1 - \sqrt{5})x - 1$.

a) Hàm số trên là đồng biến hay nghịch biến trên tập hợp số thực **R**? Vì sao?

b) Tính giá trị của y khi $x = 1 + \sqrt{5}$.

c) Tính giá trị của x khi $y = \sqrt{5}$.

Giải

a) Hàm số bậc nhất $y = (1 - \sqrt{5})x - 1$ là nghịch biến trên tập hợp số thực **R**, vì $a = 1 - \sqrt{5} < 0$.

b) Thay $x = 1 + \sqrt{5}$ vào công thức của hàm số ta được

$$y = \left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)-1=1-\left(\sqrt{5}\right)^2-1=1-5-1=-5.$$

c) Thay $y = \sqrt{5}$ vào công thức của hàm số ta thu được

$$\sqrt{5} = (1 - \sqrt{5})x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} + 1 = \left(1 - \sqrt{5}\right)x$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{1-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1+5+2\sqrt{5}}{1-5}=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 2: Tìm trên mặt phẳng toạ độ tất cả các điểm:

a) Có tung độ bằng 3;

b) Có hoành độ bằng 2;

c) Có tung độ bằng 0;

d) Có hoành độ bằng 0;

e) Có hoành độ, tung độ bằng nhau;

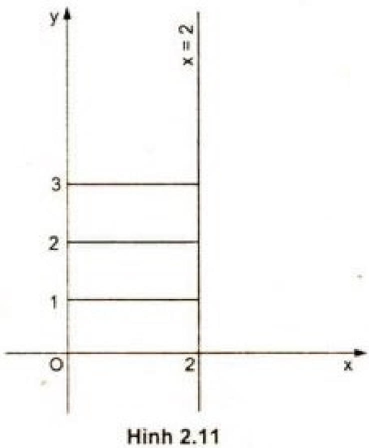
f) Có hoành độ và tung độ đối nhau.

Giải

a) Xem ví dụ 3 dạng 3, chủ đề 1.

b) Các điểm có hoành độ bằng 2 là các điểm có hoành độ x bằng 2, còn tung độ tuỳ ý. Đó là các điểm A (2; 0); B (2; 1); C(2; 2); D(2; 3); …

Nối các điểm A, B, C, D trên mặt phẳng toạ độ (như hình 2.11) ta được đường thẳng $x = 2$.



Hình 2.11

c) Các điểm có tung độ bằng 0 là các điểm có tung độ $y = 0$ còn hoành độ tuỳ ý. Đó là các điểm $E(1; 0)$; $F(2; 0)$; $G(-1; 0)$; $H(-2; 0)$.

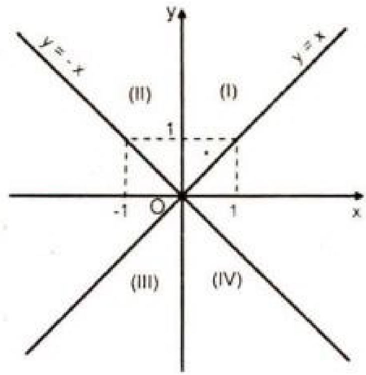
Ta thấy E, F, G, H đều nằm trên trục hoành Ox. Ta có đường thẳng $y = 0$.

d) Các điểm có hoành độ bằng 0 là các điểm có hoành độ $x = 0$ còn tung độ tuỳ ý. Đó là các điểm $I(0; 1)$; $J(0; -1)$; $K(0; 3)$; $Q(0; -3)$.

Ta thấy I, J, K, Q đều nằm trên trục tung Oy. Ta có đường thẳng $x = 0$.

e) Tập hợp các điểm trên mặt phẳng toạ độ có hoành độ và tung độ bằng nhau là tập hợp các điểm thoả mãn phương trình $y = x$. Đó là đường phân giác của góc phần tư thứ (I) và thứ (III) (xem h.2.12).

f) Tập hợp các điểm trên mặt phẳng toạ độ có hoành độ và tung độ đối nhau là tập hợp các điểm thoả mãn phương trình $y = -x$. Đó là đường phân giác của góc phần tư thứ (II) và thứ (IV).



Hình 2.12

III. Bài tập

11. Cho hàm số $y = \left(3+\sqrt{2}\right)x + 2$.

a) Tính giá trị tương ứng của y khi cho x nhận các giá trị sau:

$0;\ 1;\ \sqrt{2};\ 3-\sqrt{2};\ 3+\sqrt{2}$.

b) Tính giá trị tương ứng của x khi cho y nhận các giá trị sau:

$0;\ 1;\ 4;\ 2-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2}$.

Dạng 3
LẬP CÔNG THỨC MỘT HÀM SỐ

I. Phương pháp giải

1. Xác định công thức tính chu vi, diện tích một số hình như hình chữ nhật, hình thoi, đường tròn, hình thang, tam giác…

2. Biểu diễn các đại lượng theo biến số.

3. Lập công thức hàm số.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Một hình chữ nhật có các kích thước là 20cm và 30cm.

Người ta bớt mỗi kích thước của hình chữ nhật đó đi x (cm). Gọi chu vi của hình chữ nhật mới là y (cm). Hãy lập công thức tính chu vi y của hình chữ nhật mới theo x.

Giải

Nếu bớt mỗi kích thước của hình chữ nhật đó đi x (cm) thì các kích thước của hình chữ nhật mới là $20 - x$ và $30 - x$. Vậy công thức tính chu vi y của hình chữ nhật mới là

$$y = 2(20 - x + 30 - x) = 2(50 - 2x) \text{ hay } y = 100 - 4x.$$

Ví dụ 2: Hãy lập công thức tính diện tích y (m^2) của một thửa ruộng hình thang có đường trung bình là x (m) và chiều cao là 15m.

Giải

Vì $S_{\text{hình thang}} = \dfrac{(a + b)}{2}h$ trong đó a, b là hai đáy và h là chiều cao.

Lại có: $\dfrac{a + b}{2} = x$ là đường trung bình.

Vậy công thức tính diện tích của thửa ruộng hình thang là $y = 15x$.

III. Bài tập

12. Hãy lập công thức biểu thị y theo x được cho dưới đây. Công thức nào là hàm số bậc nhất?

a) Diện tích tam giác y (cm^2) có đáy là x (cm) và chiều cao tương ứng là 5 (cm).

b) Chu vi y của hình thoi và cạnh x của nó.

c) Diện tích y (m^2) của hình vuông với cạnh x (m).

d) Chu vi y của đường tròn với bán kính x của nó.

Chủ đề 3
ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng

– Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b.

– Song song với đường thẳng $y = ax$, nếu $b \neq 0$.

II. Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Vì đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là một đường thẳng, do đó để vẽ được đồ thị của hàm số $y = ax + b$, ta chỉ cần xác định hai điểm phân biệt thuộc đồ thị rồi nối hai điểm đó với nhau.

Lưu ý: Khi $a = 0$, đồ thị hàm số $y = b$ (hàm hằng) là một đường thẳng song song với trục hoành (khi $b \neq 0$).

III. Bổ sung kiến thức

Sự tương giao giữa hai đồ thị:

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ gọi là phương trình tương giao.

1. Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đồ thị hàm số $g(x)$ khi và chỉ khi phương trình tương giao có nghiệm.
2. Số giao điểm bằng số nghiệm của phương trình tương giao.
3. Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình tương giao.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

I. Phương pháp giải

1. Sử dụng lưới ô vuông để vẽ hệ trục toạ độ Oxy.
2. Lập bảng giá trị để xác định toạ độ 2 điểm. Trong đó $M = (0; b)$.

   Điểm N nên chọn giá trị x sao cho toạ độ của điểm N là những số nguyên.
3. Nối MN ta được đồ thị hàm số.
4. Dựng đoạn thẳng Pytago hoặc đoạn trung bình nhân.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: a) Vẽ đồ thị các hàm số

$$y = 2x,\ y = 2x + 5,\ y = -\frac{2}{3}x \text{ và } y = -\frac{2}{3}x + 5$$

trên cùng mặt phẳng toạ độ.

b) Bốn đường thẳng trên cắt nhau tạo thành tứ giác OABC (O là gốc toạ độ). Tứ giác OABC có phải là hình bình hành không? Vì sao?

Giải

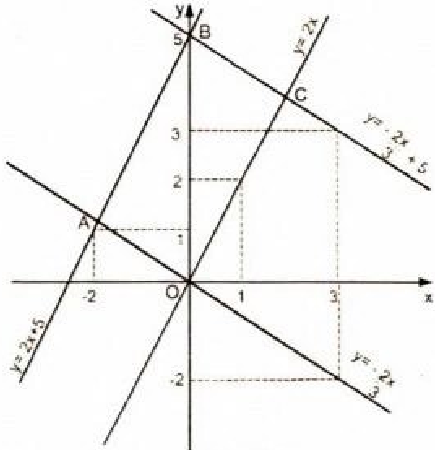
Lập bảng giá trị của các hàm số tại hai giá trị của biến

x	0	1
y = 2x	0	2

x	0	−2
y = 2x + 5	5	1

x	0	3
$y = -\frac{2}{3}x$	0	−2

x	0	3
$y = -\frac{2}{3}x + 5$	5	3



Hình 2.13

b) Vì đường thẳng y = 2x song song với đường thẳng y = 2x + 5 nên AB // OC(1). Đường thẳng $y = -\frac{2}{3}x$ song song với đường thẳng $y = -\frac{2}{3}x + 5$ nên OA // BC(2). Từ (1)và (2) suy ra OABC là hình bình hành (vì có các cặp cạnh đối song song) (h.2.13).

Ví dụ 2: a) Vẽ đồ thị của các hàm số y = x và y = 2x + 2 trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Gọi A là giao điểm của hai đồ thị nói trên, tìm toạ độ của điểm A.

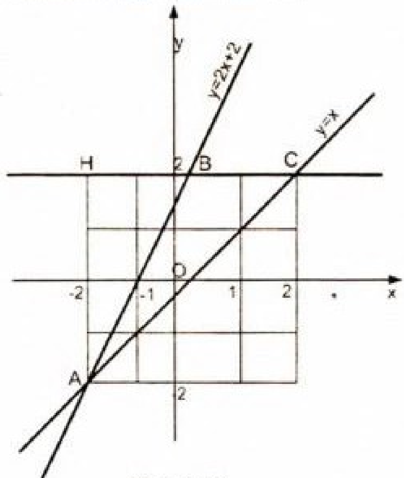
c) Vẽ qua B(0; 2) một đường thẳng song song với trục Ox cắt đường thẳng y = x tại điểm C. Tìm toạ độ của điểm C rồi tính diện tích tam giác ABC (đơn vị trên các trục toạ độ là cm).

Giải

a) Lập bảng giá trị tại hai giá trị x của hàm số

x	0	1
y = x	0	1

x	0	−1
y = 2x + 2	2	0



Hình 2.14

Hoành độ giao điểm A của hai đồ thị trên là nghiệm của phương trình tương giao $2x + 2 = x \Leftrightarrow x = -2$. Tung độ của A là $y = x = -2$. Vậy $A(-2; -2)$.

Hoành độ C là nghiệm của phương trình tương giao: $x = 2$.

Tung độ của C là $y = x = 2$. Vậy $C(2; 2)$.

Diện tích tam giác OAC là $S = \frac{1}{2}.4.2 = 4\left(cm^2\right)$ (xem h.2.14).

Ví dụ 3: a) Vẽ đồ thị các hàm số $y = x + 1$ và $y = -x + 3$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Hai đường thẳng $y = x + 1$ và $y = -x + 3$ cắt nhau tại C và cắt trục Ox theo thứ tự tại A và B. Tìm toạ độ của các điểm A, B, C.

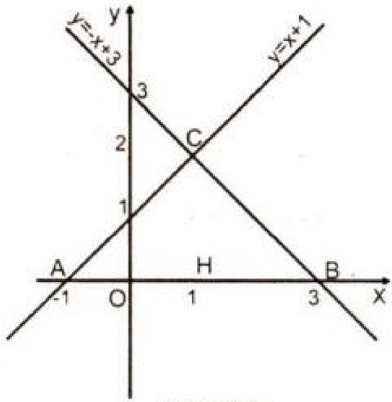
c) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC (đơn vị đo trên các trục toạ độ là cm).

Giải

Lập bảng giá trị hàm số tại hai giá trị x của hai hàm số đã cho

x	0	−1
$y = x + 1$	1	0

x	0	3
$y = -x + 3$	3	0



Hình 2.15

Đồ thị như hình 2.15.

b) $y = x + 1$ cắt trục Ox tại $A = (-1; 0)$.

$y = -x + 3$ cắt trục Ox tại $B = (3; 0)$.

Hoành độ giao điểm C của hai đồ thị là nghiệm của phương trình tương giao:

$$x + 1 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Tung độ của C là $y = 1 + 1 = 2$. Vậy $C(1; 2)$.

c)Tam giác ABC cân tại C có $AB = 4$, $AC = BC$.

Theo hệ thức Pytago ta có

$$AC = BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

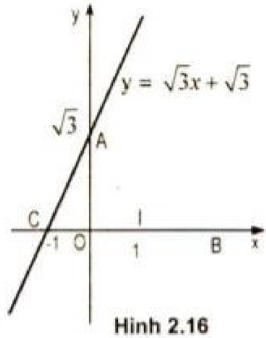
Vậy chu vi tam giác ABC là $p = AB + AC + BC = 4 + 2\sqrt{8} = 4 + 4\sqrt{2}\,(cm)$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{1}{2}.4.2 = 4\left(cm^2\right)$.

Ví dụ 4: Đồ thị của hàm số $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ được vẽ bằng compa và thước thẳng. Hãy tìm hiểu cách vẽ đồ thị đó rồi nêu lại các bước thực hiện.

Áp dụng: vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{5}x + \sqrt{5}$ bằng compa và thước thẳng.

Hướng dẫn: Tìm trên trục tung điểm có tung độ bằng $\sqrt{5}$.



Hình 2.16

Giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại x = 0 và x = −1

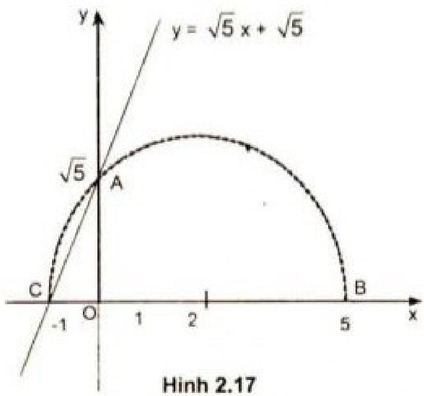
x	0	−1
y	$\sqrt{3}$	0

Ta được hai điểm A(0, $\sqrt{3}$); C(−1; 0). Ta thấy điểm C(−1; 0) có toạ độ nguyên trên trục hoành Ox, xác định được ngay. Ta chỉ còn phải xác định điểm A(0; $\sqrt{3}$) có toạ độ là số vô tỉ. Bài toán trở thành dựng đoạn $OA = \sqrt{3} = \sqrt{1.3}$ bằng thước và compa. Đây thực chất là bài toán dựng đoạn trung bình nhân của hai đoạn thẳng có độ dài là 1 và 3.

Bước 1: Lấy I(1; 0) trên trục Ox làm tâm dựng nửa đường tròn đường kính CB = 4.

Bước 2: Giao điểm của nửa đường tròn ở trên với trục tung Oy là điểm A. Lúc đó $OA = \sqrt{3}$ theo hệ thức về đường cao của tam giác CAB vuông tại A. Nối hai điểm CA ta được đồ thị của hàm số $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ (h.2.16).

Chú ý: Cách dựng đoạn $OA = \sqrt{3}$ ở trên theo cách dựng đoạn trung bình nhân đơn giản hơn rất nhiều so với cách dựng đoạn $OA = \sqrt{3}$ nhờ định lí Pitago.



Hình 2.17

Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{5}x + \sqrt{5}$.

Lập bảng giá trị của hàm số tại x = 0 và x = −1

x	0	−1
y	$\sqrt{5}$	0

Ta được hai điểm C(−1; 0); A(0; $\sqrt{5}$). Đồ thị hàm số là đường thẳng AC. Cách dựng đoạn $OA = \sqrt{1.5}$ như hình 2.17.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = (m - 2)x + m$.

a) Xác định giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

b) Xác định giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3.

Giải

a) Giả sử đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm A có tung độ bằng 2 thì $A(0; 2)$.

Đồ thị của hàm số $y = (m - 2)x + m$ đi qua điểm $A(0; 2)$ khi và chỉ khi toạ độ của A thoả mãn phương trình của hàm số. Tức là $2 = (m - 2).0 + m \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

b) Giả sử đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ bằng -3 thì $B(-3; 0)$.

Đồ thị hàm số $y = (m - 2)x + m$ đi qua điểm $B(-3; 0)$ khi và chỉ khi toạ độ của B thoả mãn phương trình của đồ thị.

Tức là: $0 = (m - 2).(-3) + m \Leftrightarrow 3m - m = 6 \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

III. Bài tập

13. a) Tìm hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 1$ với trụ Ox.

b) Tìm tung độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{2}x - 2$ với trục Oy.

14. Cho hàm số $y = (m - 1)x + 3$.

a) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến ? Nghịch biến ?

b) Xác định giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1; 2)$.

c) Xác định giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm $B(1; -2)$.

d) Vẽ đồ thị của hai hàm số ứng với giá trị của m tìm được ở các câu b), c).

15. a) Vẽ trên cùng hệ trục toạ độ đồ thị các hàm số sau:

$$y = 3\ (d_1); \quad y = x\ (d_2); \quad y = 2x\ (d_3).$$

b) Đường thẳng d_1 cắt các đường thẳng d_2, d_3 lần lượt tại A, B. Tính toạ độ của A, B, chu vi và diện tích tam giác OAB.

16. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ (bằng thước và compa).

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{5}x - \sqrt{5}$.

Dạng 2
VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÓ CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. Phương pháp giải

1. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối nhờ định nghĩa:

$$|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

Thu được hai hàm số trên từng khoảng xác định.

2. Vẽ đồ thị hàm số ứng với $x \geq 0$.

3. Vẽ đồ thị hàm số ứng với $x < 0$. Đồ thị của hai hàm số này chính là đồ thị của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

II. Ví dụ

a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng hệ trục toạ độ:

$$y = |x|;\ y = |x+1|$$

b) Tìm toạ độ giao điểm của đồ thị các hàm số $y = |x|$ và $y = |x+1|$. Từ đó suy ra phương trình $|x| = |x+1|$ có một nghiệm duy nhất.

Giải

a) Vì $y = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ nên ta được hai hàm số $y = f(x) = x$ với $x \geq 0$ và $y = g(x) = -x$ với $x < 0$.

Lập bảng giá trị của hai hàm số

x	0	1
$f(x) = x$	0	1

x	-1	-2
$g(x) = -x$	1	2

Vì $y = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{nếu } x < -1 \end{cases}$ nên ta được hai hàm số $y = h(x) = x + 1$ với $x \geq -1$ và $y = k(x) = -x - 1$ với $x < -1$.

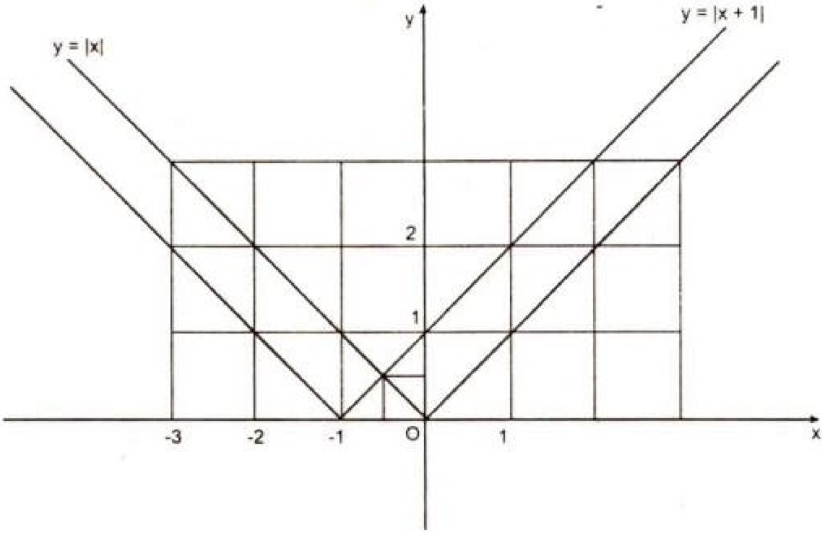
Lập bảng giá trị của hai hàm số tại hai giá trị của x.

x	-1	0
$h(x) = x + 1$	0	1

x	-2	-3
$k(x) = -x - 1$	1	2

Vẽ đồ thị các hàm số trên cùng hệ trục (xem hình 2.18).

b) Toạ độ giao điểm của hai đồ thị là $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Từ đó suy ra phương trình $|x| = |x+1|$ có một nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}$.



Hình 2.18

III. Bài tập

17. Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = |x|$ và $y = |x-2|$ trên cùng một hệ trục toạ độ. Tìm toạ độ giao điểm của hai đồ thị hàm số trên, từ đó suy ra nghiệm của phương trình $|x| = |x-2|$.

Chủ đề 4

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Hai đường thẳng song song

Hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'(a' \neq 0)$, song song với nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$ và trùng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

II. Hai đường thẳng cắt nhau

Hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'(a' \neq 0)$, cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
XÁC ĐỊNH CÁC CẶP ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, CẮT NHAU, TRÙNG NHAU

I. Phương pháp giải

Dựa vào dấu hiệu song song, cắt nhau của hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng: d: $y = ax + b$ $(a \neq 0)$; d': $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$

Khi đó 1. $d \,//\, d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$

2. $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

3. d cắt d' $\Leftrightarrow a \neq a'$.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Hãy chỉ ra các cặp đường thẳng song song với nhau trong số các đường thẳng sau:

a) $y = 1,5x + 2$ b) $y = x + 2$

c) $y = 0,5x - 3$ d) $y = x - 3$

e) $y = 1,5x - 1$ f) $y = 0,5x + 3$

Giải

Dựa vào điều kiện song song của hai đường thẳng, ta có các cặp đường thẳng song song là:

$y = 1,5x + 2$ và $y = 1,5x - 1$; $y = x + 2$ và $y = x - 3$

$y = 0,5x - 3$ và $y = 0,5x + 3$.

Ví dụ 2: Cho hai hàm số bậc nhất $y = mx + 3$ và $y = (2m - 1)x - 5$.

Tìm giá trị của m để đồ thị của hai hàm đã cho là:

a) Hai đường thẳng song song;

b) Hai đường thẳng cắt nhau.

Giải

a) Đồ thị hàm số đã cho là hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 2m - 1 \neq 0 \\ 2m - 1 = m \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \\ m = 1 \end{cases} \text{ hay } m = 1.$$

Vậy m = 1 là giá trị cần tìm.

b) Đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 2m - 1 \neq 0 \\ 2m - 1 \neq m \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy $m \neq 0$; $m \neq 1$; $m \neq \dfrac{1}{2}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho hai hàm số $y = 3x - 3$ và $y = -3x + 2m + 9$.

Với giá trị nào của m thì đồ thị của hai hàm số trên

a) Cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

b) Cắt nhau tại một điểm trên trục hoành.

Giải

a) Đồ thị của hàm số $y = 3x - 3$ cắt trục tung tại điểm A(0; −3) nên đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại một điểm trên trục tung thì điểm đó phải là A(0; −3).

Đồ thị hàm số $y = -3x + 2m + 9$ đi qua A(0; −3) khi và chỉ khi

$$-3 = -3.0 + 2m + 9 \Leftrightarrow 2m = -12 \Leftrightarrow m = -6.$$

Vậy m = −6 là giá trị cần tìm.

b) Đồ thị của hàm số $y = 3x - 3$ cắt trục hoành tại điểm B(1; 0) nên đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại một điểm trên trục hoành thì điểm đó phải là B(1; 0).

Đồ thị hàm số $y = -3x + 2m + 9$ đi qua điểm B(1; 0) khi và chỉ khi:

$$0 = -3.1 + 2m + 9 \Leftrightarrow 2m = 6 \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy m = −3 là giá trị cần tìm.

III. Bài tập

18. Tìm các cặp đường thẳng cắt nhau và song song với nhau trong số các đường thẳng sau:

a) $y = 1 - x$;　　　b) $y = \sqrt{2}x - 2$;

c) $y = -0{,}5x$;　　　d) $y = 3 - 0{,}5x$;

e) $y = 1 + \sqrt{2}x$;　　　f) $y = -x + 4$.

19. Tìm giá trị của a để hai đường thẳng $y = (a - 1)x + 2$ và $y = (5 - a)x + 3$ song song với nhau.

20. Với điều kiện nào của m và n thì hai đường thẳng sau sẽ trùng nhau ?

$y = mx + n - 1$ và $y = (3 - m)x + 5 - n$.

21. Với giá trị nào của m thì đồ thị của các hàm số $y = 3x + 1 - m$ và $y = -2x + m + 3$ cắt nhau tại một điểm trên

a) Trục tung;

b) Trục hoành.

Dạng 2

XÁC ĐỊNH HÀM SỐ y = ax + b BIẾT ĐỒ THỊ CỦA NÓ THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

I. Phương pháp giải

1. Gọi d là đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

Cho $x = 0$ thì $y = b$, ta được điểm $A(0; b)$ thuộc trục tung Oy hay d cắt Oy tại điểm có tung độ bằng b.

Cho $y = 0$ thì $x = -\dfrac{b}{a}$ ta được điểm $B\left(-\dfrac{b}{a}; 0\right)$ thuộc trục hoành Ox hay d cắt Ox tại điểm có hoành độ $-\dfrac{b}{a}$.

2. Điểm $M(x_0, y_0)$ thuộc d $\Leftrightarrow$ $y_0 = ax_0 + b$.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = 2x + b$. Hãy xác định hệ số b trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị của hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3.

b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $(1; 5)$.

Giải

a) Đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 tức là đồ thị cắt trục Oy tại điểm $A(0; -3)$.

Đồ thị hàm số $y = 2x + b$ đi qua điểm A khi và chỉ khi $-3 = 2.0 + b$ $\Leftrightarrow b = -3$.

Vậy $b = -3$ là giá trị cần xác định.

b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm (1; 5) khi và chỉ khi

$$5 = 2.1 + b \Leftrightarrow b = 3.$$

Vậy $b = 3$ là giá trị cần xác định.

Ví dụ 2: Cho hàm số bậc nhất $y = ax - 4$ (1). Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 3.

b) Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y = -3x + 2$ tại điểm có tung độ bằng 5.

Giải

Xét phương trình tương giao $ax - 4 = 2x - 1$.

a) Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 3 khi và chỉ khi $x = 3$ là nghiệm của phương trình tương giao. Tức là

$$a.3 - 4 = 2.3 - 1 \Leftrightarrow a = 3.$$

Vậy $a = 3$ là giá trị cần xác định.

b) Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $y = -3x + 2$ tại điểm có tung độ bằng 5 khi và chỉ khi hệ điều kiện sau được thoả mãn

$$\begin{cases} -3x + 2 = 5 \\ ax - 4 = -3x + 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -1 \\ -a - 4 = 3 + 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -1 \\ a = -9 \end{cases}$$

Vậy $a = -9$ là giá trị cần xác định.

Ví dụ 3: Xác định a, b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm

a) M(1; 2) và N(2; 1);

b) P(1; 2) và Q(3; 4).

Giải

Gọi d là đồ thị của hàm số $y = ax + b$.

a) Đồ thị d đi qua M(1; 2) khi và chỉ khi toạ độ của M thoả mãn phương trình của hàm số. Tức là:

$$2 = a.1 + b \Leftrightarrow b = 2 - a \qquad (1)$$

Đồ thị d đi qua N(2; 1) khi và chỉ khi toạ độ của N thoả mãn phương trình của hàm số, tức là:

$$1 = 2a + b \Leftrightarrow b = 1 - 2a \qquad (2)$$

Trừ (1) cho (2) theo vế ta được: $0 = 2 - a - 1 + 2a \Leftrightarrow a = -1$.

Thay $a = -1$ vào (1) ta được $b = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$.

Vậy $a = -1$ và $b = 3$ là hai giá trị cần xác định.

b) Đồ thị d đi qua P(1; 2) khi và chỉ khi $a + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - a$ (3)

Đồ thị d đi qua Q(3; 4) khi và chỉ khi

$$3a + b = 4 \Leftrightarrow b = 4 - 3a \quad (4)$$

Trừ (3) cho (4) theo vế ta được $0 = 2 - a - 4 + 3a$

$$\Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

Thế $a = 1$ vào (3) ta được $b = 2 - 1 = 1$.

Vậy $a = b = 1$ là hai giá trị cần xác định.

III. Bài tập

22. Cho hàm số $y = mx - 2$. Xác định m trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -3x$.

b) Khi $x = 1 + \sqrt{2}$ thì $y = \sqrt{2}$.

Xác định hàm số y = ax + b theo điều kiện đã cho (Các bài 23, 24, 25):

23. Đồ thị của hàm số cắt trục tụng tại điểm có tung độ bằng 3 cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3.

24. Đồ thị của hàm số đi qua gốc toạ độ và điểm $C\left(\frac{1}{2}; -2\right)$.

25. Đồ thị của hàm số đi qua hai điểm M(−3; 1), N(3; 4).

Chủ đề 5

HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc là a.

2. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ với tia Ox

a) Nếu $\alpha < 90^0$ thì $a > 0$;

b) Nếu $\alpha > 90^0$ thì $a < 0$.

Các đường thẳng có cùng hệ số a (a là hệ số của x) thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau.

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1
XÁC ĐỊNH HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

I. Phương pháp giải

1. Xác định hàm số $y = ax + b$.

2. Hai đường thẳng song song với nhau thì có hệ số góc bằng nhau.

3. $\tan\alpha = \dfrac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh đối}}$.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$.

a) Xác định hệ số góc a biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm M(2; 6).

b) Vẽ đồ thị của hàm số.

Giải

a) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm M(2; 6) khi và chỉ khi toạ độ của M thoả mãn phương trình của đồ thị. Tức là:

$$6 = a.2 + 3 \Leftrightarrow 2a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Vậy $a = \frac{3}{2}$ là hệ số góc cần tìm. Lúc đó hàm số có dạng $y = \frac{3}{2}x + 3$.

b) Học sinh tự vẽ đồ thị.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = -2x + 3$.

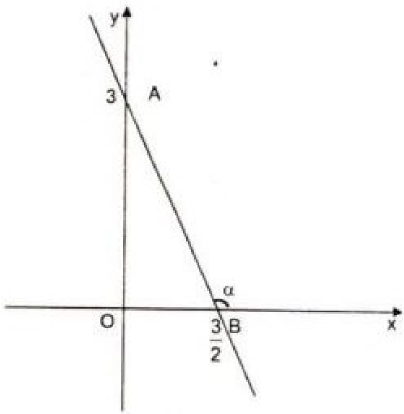
a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tính góc tạo bởi đường thẳng $y = -2x + 3$ và trục Ox (làm tròn đến phút).

Giải

a) Lập bảng giá trị của hàm số tại $x = 0$ và $x = \frac{3}{2}$.

x	0	$\frac{3}{2}$
$y = -2x + 3$	3	0



Hình 2.19

Ta được 2 điểm A(0; 3) và $B\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Nối AB ta được đồ thị hàm số $y = -2x + 3$ (đồ thị hàm số xem hình 2.19).

b) Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = -2x + 3$ với trục Ox thì:

$$\widehat{ABX} = 180^0 - \widehat{ABO}.$$

Vì OA, OB lần lượt là cạnh đối và cạnh kề của góc ABO trong tam giác AOB vuông tại O, nên tg $\widehat{ABO} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{1} : \frac{3}{2} = 2$.

Do đó $\widehat{ABO} \approx 56^0 19'$, suy ra $\alpha \approx 123^0 41'$.

Ví dụ 3: a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ đồ thị của các hàm số sau:

$$y = -x + 2; \; y = \frac{1}{2}x + 2.$$

b) Gọi giao điểm của hai đường thẳng $y = -x + 2$ và $y = \frac{1}{2}x + 2$ với trục hoành theo thứ tự là A, B và giao điểm của chúng là C. Tính các góc của tam giác ABC.

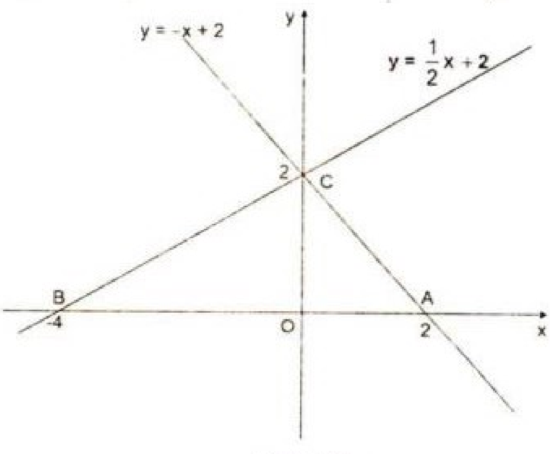
c) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC (đơn vị đo trên trục toạ độ là cm)

Giải

a) Lập bảng giá trị của các hàm số

x	0	2
$y = -x + 2$	2	0

x	0	-4
$y = \frac{1}{2}x + 2$	2	0



Hình 2.20

b) Ta có A(2; 0); B(−4; 0); C(0; 2)

$$tgA = \frac{OC}{OA} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \widehat{A} = 45^0.$$

$$tgB = \frac{OC}{OB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} \approx 27^0.$$

$$\widehat{C} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 180^0 - (27^0 + 45^0) = 108^0$$

c) Gọi p, S thứ tự là chu vi và diện tích của tam giác ABC thì

$$S = \frac{1}{2}OC.AB = \frac{1}{2}.2.6 = 6(cm^2).$$

$$p = AB + BC + CA = 6 + BC + CA.$$

Áp dụng hệ thức pitago vào hai tam giác vuông OBC, OCA ta được

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}\ (cm);$$

$$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}\ (cm).$$

Vậy $p = 6 + \sqrt{20} + \sqrt{8}(cm) \approx 13,3(cm)$.

Ví dụ 4:

a) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = x + 1$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

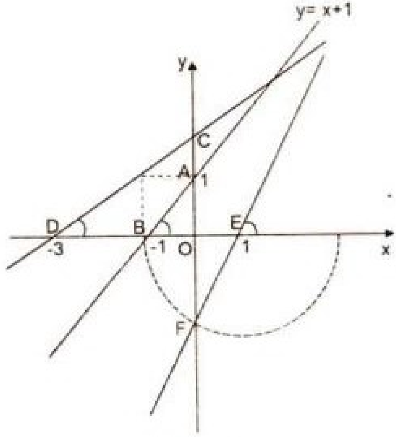
b) Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi các đường thẳng trên và trục Ox, chứng minh rằng $tg\alpha = 1, tg\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, tg\gamma = \sqrt{3}$.

Tính số đo các góc α, β, γ.

Giải

a) Lập bảng giá trị của các hàm số

x	0	−1
$y = x + 1$	1	0
	0	1
$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0
x	0	−3
$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0



Hình 2.21

b) Gọi tên các giao điểm của các đồ thị với Ox, Oy như trên hình vẽ. Ta có:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^0;$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{OC}{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = 30^0;$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{OF}{OE} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \gamma = 60^0.$$

III. Bài tập

26. Cho hàm số bậc nhất y = ax – 3 (1). Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng y = 2x – 1 tại điểm có hoành độ bằng 2;

b) Đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng y = –3x + 1 tại điểm có tung độ bằng –2.

27. Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc toạ độ và

a) đi qua điểm M(1; 2);

b) đi qua điểm N(–2; 1);

c) có nhận xét gì về hai đường thẳng trên;

d) vẽ đồ thị của các đường thẳng tìm được ở hai câu a, b trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

CHỦ ĐỀ 1

1. $f(-3) = -2$, $f\left(-\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$. $f(0) = 1$. $f\left(1\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$.

2. a) Giá trị của hàm số không xác định khi x = 0.

b) $g(-1) = -2$, $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$, $g\left(\frac{1}{3}\right) = 6$, g(0) không xác định.

c) Điểm $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$ thuộc đồ thị hàm số vì $-\frac{2}{1} = -2$, đúng.

Điểm N(2; 0) không thuộc đồ thị hàm số vì $\frac{2}{2} = 0$, sai.

Điểm $P\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ thuộ ...ị hàm số vì $2 : \frac{1}{2} = 4$, đúng.

3. a) $f(-3) = 3$, $f(-2) = 2$; $f(1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$.

b) Khi biến x lấy hai giá trị đối nhau thì giá trị tương ứng của hàm số bằng nhau.

4. Hàm số đã cho xác định trên tập số thực **R**.

Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ thì $f(x_1) = \frac{2x_1}{3} - 1$, $f(x_2) = \frac{2x_2}{3} - 1$.

Giả sử $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{2x_1}{3} - 1 < \frac{2x_2}{3} - 1$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên **R**.

5. Hàm số đã cho xác định trên tập số thực **R**.

Với mọi $x_1, x_2 \in R$ thì $f(x_1) = -3x_1 + 2$, $f(x_2) = -3x_2 + 2$.

Giả sử $x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 + 2 > -3x_2 + 2$ hay $f(x_1) > f(x_2)$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên **R**.

6. Học sinh tự vẽ.

7. Lập bảng giá trị của hàm số tại x = 0, x = 1.

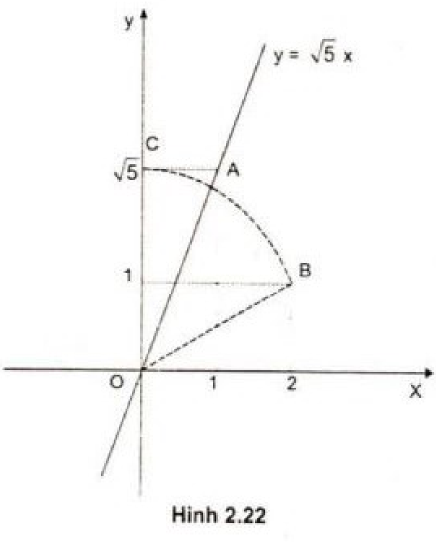
x	0	1
$y = \sqrt{5}x$	0	$\sqrt{5}$

Ta được 2 điểm O(0; 0) và $A(1; \sqrt{5})$.

Dựng đoạn $OB = \sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$.

Lấy điểm B(2; 1) thì OB là cạnh huyền của một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 2 và 1.

Vẽ đường tròn (O,OB) cắt trục Oy tại C thì $OC = OB = \sqrt{5}$.



Hình 2.22

CHỦ ĐỀ 2

8. a) $y = 2 - 0{,}3x$ là hàm số bậc nhất có $a = -0{,}3$, $b = 2$.

Đây là hàm số nghịch biến vì $a = -0{,}3 < 0$.

b) $y = \frac{3}{2}x + 0$ là hàm số bậc nhất có $a = \frac{3}{2}$, $b = 0$.

Đây là hàm số đồng biến vì $a = \frac{3}{2} > 0$.

c) $y = 4 - x^2$ không phải là hàm số bậc nhất.

d) $y = (\sqrt{3} - 1)x + 2$ là hàm số bậc nhất có $a = (\sqrt{3} - 1)$, $b = 2$.

Đây là hàm số đồng biến vì $a = (\sqrt{3} - 1) > 0$.

e) $y = \sqrt{3}(\sqrt{2} - x) = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{6}$ là hàm số bậc nhất, có $a = -\sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$.

Đây là hàm số nghịch biến vì có $a = -\sqrt{3} < 0$.

f) $y + \sqrt{3} = x - \sqrt{2} \Rightarrow y = 1x - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ là hàm số bậc nhất vì có $a = 1$, $b = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

Đây là hàm số đồng biến vì có $a = 1 > 0$.

g) Đây là hàm hằng, không phải bậc nhất.

9. a) $y = \frac{2}{m^2 - 1}x - \frac{1}{m^2 - 1}$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $\frac{2}{m^2 - 1} \neq 0$ hay $m \neq \pm 1$.

b) $y = \sqrt{1 - 2m}(x + 3)$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $\sqrt{1 - 2m} \neq 0$ hay $1 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

10. a) $y = -m^2x + 1$ là hàm số bậc nhất có $a = -m^2 \leq 0$ với mọi m

Hàm số này nghịch biến khi $a < 0$ hay $m \neq 0$.

b) $y = (1 - 3m)x - 2$ là hàm số bậc nhất có $a = 1 - 3m$.

Hàm số này nghịch biến khi $a < 0$ hay $1 - 3m < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m$.

11. a) $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2}$, $f(3 - \sqrt{2}) = 9$, $f(3 + \sqrt{2}) = 13 + 6\sqrt{2}$.

b) Cho y nhận các giá trị 0, 1, 4, $2 - 2\sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$ thì x nhận các giá trị tương ứng là : $\frac{-6 + 2\sqrt{2}}{7}, \frac{\sqrt{2} - 3}{7}, \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7}, \frac{2 - 3\sqrt{2}}{7}, \frac{3\sqrt{2} - 2}{7}$.

12. a) $y = \frac{5x}{2}$, đây là hàm số bậc nhất.

b) $y = 4x$, đây là hàm số bậc nhất.

c) $y = x^2$, không là hàm số bậc nhất.

d) $y = 2\pi x$ là hàm số bậc nhất.

CHỦ ĐỀ 3

13. a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 1$ với trục Ox là nghiệm của phương trình tương giao

$$-\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

b) Tung độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{2}x - 2$ với trục Oy là $y = -\frac{3}{2}.0 - 2 = -2$.

14. a) Hàm số đã cho đồng biến khi $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Hàm số đã cho nghịch biến khi $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

b) Đồ thị của hàm số đi qua điểm A(1; 2) khi và chỉ khi

$$(m - 1).1 + 3 = 2 \Leftrightarrow m = 0.$$

c) Đồ thị của hàm số đi qua điểm B(1; −2) khi và chỉ khi

$$(m - 1)1 + 3 = -2 \Leftrightarrow m = -4.$$

d) Học sinh tự vẽ đồ thị.

15. a) Học sinh tự vẽ đồ thị (xem h.2.23).

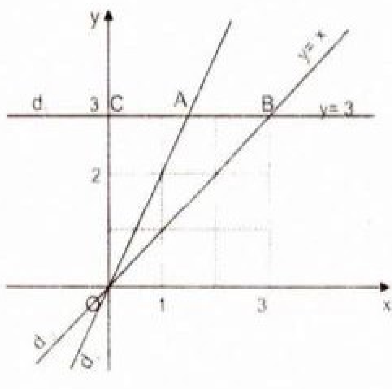
b) $A\left(\frac{3}{2}; 3\right)$, B(3; 3).

c) Chu vi tam giác OAB là

$$p = OA + AB + OB = \frac{3\sqrt{17}}{4} + \frac{3}{2} + 3\sqrt{2}.$$

Diện tích tam giác OAB là :

$$S = \frac{1}{2}OC.AB = \frac{1}{2}.3.\frac{3}{2} = \frac{9}{4} \text{ (đvdt)}.$$



Hình 2.23

16. Học sinh tự vẽ đồ thị.

17. Vì $y = |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{với } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{với } x < 2 \end{cases}$ nên ta được hai hàm số $y = x - 2$ với $x \geq 0$, $y = -x + 2$ với $x < 2$.

Học sinh lập bảng rồi vẽ đồ thị hàm số.

CHỦ ĐỀ 4

18. a) $y = 1 - x$ và $y = -x + 4$ cắt các đường thẳng $y = \sqrt{2}x - 2$, $y = -0,5x$, $y = 3 - 0,5x$ và $y = 1 + \sqrt{2}x$

b) $y = \sqrt{2}x - 2$ và $y = 1 + \sqrt{2}x$ cắt các đường thẳng $y = -0,5x$, $y = 3 - 0,5x$, $y = 1 - x$, $y = -x + 4$.

c) $y = -0,5x$ và $y = 3 - 0,5x$ cắt các đường thẳng $y = 1 + \sqrt{2}x$, $y = -x + 4$, $y = 1 - x$, $y = \sqrt{2}x - 2$.

Có ba cặp đường thẳng song song là : $y = 1 - x$ và $y = -x + 4$, $y = \sqrt{2}x - 2$ và $y = 1 + \sqrt{2}x$, $y = -0,5x$ và $y = 3 - 0,5x$.

19. Do $2 \neq 3$ nên hai đường thẳng đó song song khi $a - 1 = 5 - a \Leftrightarrow a = 3$.

20. Hai đường thẳng trùng nhau khi

$$\begin{cases} m = 3 - m \\ n - 1 = 5 - n \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m = \dfrac{3}{2} \\ n = 3 \end{cases}$$

21. a) Đồ thị hàm số $y = 3x + 1 - m$ cắt trục tung tại $A(0; 1 - m)$. Nên đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại một điểm trên trục tung thì điểm đó phải là $A(0; 1 - m)$

Đồ thị hàm số $y = -2x + m + 3$ đi qua $A(0; 1 - m)$ khi và chỉ khi $1 - m = -2.0 + m + 3 \Leftrightarrow m = -1$.

b) Đồ thị hàm số $y = 3x + 1 - m$ cắt trục hoành tại $B\left(\dfrac{m-1}{3}; 0\right)$. Nên đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại một điểm trên trục hoành thì điểm đó phải là $B\left(\dfrac{m-1}{3}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số $y = -2x + m + 3$ đi qua $B\left(\dfrac{m-1}{3}; 0\right)$ khi và chỉ khi $0 = -2.\left(\dfrac{m-1}{3}\right) + m + 3 \Leftrightarrow m = -11$.

22. a) Vì đồ thị hàm số $y = mx - 2$ song song với đường thẳng $y = -3x$ nên $m = -3$.

b) Khi $x = 1 + \sqrt{2}$ thì $m(1 + \sqrt{2}) - 2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})$

$$\Leftrightarrow m = \sqrt{2}.$$

23. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 nên $a.0 + b = 3 \Leftrightarrow b = 3$. Lúc đó hàm số có dạng $y = ax + 3$.

Đồ thị $y = ax + 3$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3 nên $0 = -3a + 3 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy $y = x + 3$ là hàm số cần tìm.

24. Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua gốc toạ độ $O(0; 0)$ nên $0 = 0.a + b \Leftrightarrow b = 0$.

Lúc đó hàm số có dạng $y = ax$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $C\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ khi và chỉ khi $-2 = \frac{1}{2}.a \Leftrightarrow a = -4$.

Vậy $y = -4x$ là hàm số cần tìm.

25. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $M(-3; 1)$ nên

$$1 = -3a + b \Leftrightarrow b = 3a + 1 \quad (1)$$

Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $N(3; -4)$ nên

$$-4 = 3a + b \Leftrightarrow b = -3a - 4 \quad (2)$$

Trừ (1) cho (2) theo vế ta được $0 = 6a + 5 \Leftrightarrow a = \frac{-5}{6}$.

Thay $a = \frac{-5}{6}$ vào (2) ta được $b = -3.\left(\frac{-5}{6}\right) - 4 = \frac{5}{2} - 4 = \frac{-3}{2}$.

Vậy $y = \frac{-5}{6}x - \frac{3}{2}$.

CHỦ ĐỀ 5

26. a) Xét phương trình tương giao: $ax - 3 = 2x - 1$.

Đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm $x = 2$ khi và chỉ khi $x = 2$ là nghiệm của phương trình tương giao hay $a.2 - 3 = 2.2 - 1 \Leftrightarrow a = 3$.

b) Đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y = -3x + 1$ tại điểm có tung độ bằng -2 khi và chỉ khi hệ điều kiện sau được thoả mãn

$$\begin{cases} -2 = -3x + 1 \\ ax - 3 = -3x + 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 1 \\ a - 3 = -3 + 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 1 \\ a = 1. \end{cases}$$

27. Vì đường thẳng đi qua gốc toạ độ có phương trình $y = ax$.

a) Đường thẳng $y = ax$ đi qua $M(1; 2)$ khi và chỉ khi $2 = a$.

Hàm số có dạng $y = 2x$.

b) Đường thẳng $y = ax$ đi qua $N(-2; 1)$ khi và chỉ khi

$$1 = -2a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Hàm số có dạng $y = -\frac{1}{2}x$.

c) Hai đường thẳng trên vuông góc với nhau, vì tích hai hệ số góc:

$$2.\left(\frac{1}{2}\right) = -1.$$

d) Học sinh tự vẽ đồ thị.

Chương 3

HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Chủ đề 1

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Khái niệm về phương trình bậc nhất hai ẩn

– Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ thức dạng

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

trong đó a, b và c là các số đã biết, $a^2 + b^2 > 0$.

– Nghiệm của phương trình (1) là một cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho

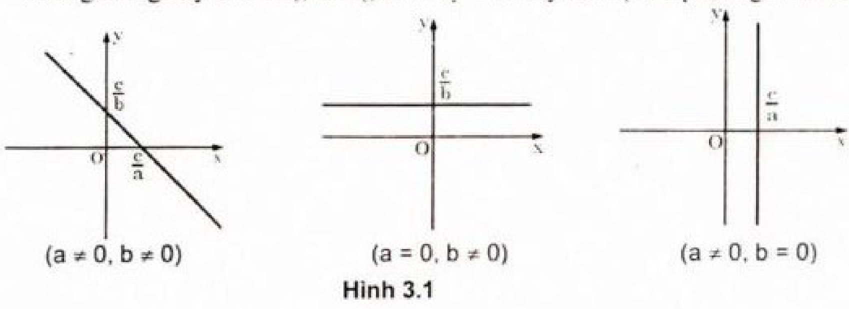
$$ax_0 + by_0 = c.$$

Ta còn nói phương trình (1) có nghiệm $(x; y) = (x_0; y_0)$.

– Phương trình (1) luôn có vô số nghiệm. Công thức nghiệm tổng quát của (1) là

$$\left(x; \frac{c - ax}{b}\right), x \in \mathbf{R} \text{ hoặc } \left(\frac{c - by}{a}; y\right), y \in \mathbf{R}.$$

– Mỗi nghiệm $(x_0; y_0)$ của phương trình (1) được biểu diễn bởi một điểm có toạ độ $(x_0; y_0)$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy. Tập các điểm M có toạ độ (x; y) nghiệm đúng phương trình (1) là một đường thẳng (h.3.1). Người ta gọi đường thẳng này là *đường thẳng ax + by = c*, hay đồ thị của phương trình (1).



(a ≠ 0, b ≠ 0) (a = 0, b ≠ 0) (a ≠ 0, b = 0)

Hình 3.1

– Đối với phương trình bậc nhất hai ẩn, khái niệm *tập nghiệm* và khái niệm *phương trình tương đương* cũng tương tự như đối với phương trình một ẩn.

Ta cũng có thể áp dụng *quy tắc chuyển vế* và *quy tắc nhân* để biến đổi phương trình bậc nhất hai ẩn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng bài tập chủ yếu trong chủ đề này là tìm nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn và biểu diễn tập nghiệm trên mặt phẳng toạ độ.

I. Phương pháp giải

– Áp dụng công thức nghiệm tổng quát, chú ý đến hệ số khác 0.

– Áp dụng phương pháp vẽ đồ thị hàm bậc nhất để biểu diễn tập nghiệm.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Tìm nghiệm tổng quát của mỗi phương trình sau và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của nó:

a) $2x - 3y = 6$; b) $x + 2y = 3$;

c) $\frac{1}{2}x + y = 0$; d) $0x - 2y = 4$.

Giải

a) Từ phương trình $2x - 3y = 6$ ta có $y = \frac{2x-6}{3}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\left(x\,;\,\frac{2x-6}{3}\right),\ x \in \mathbf{R}.$$

Ta có thể biểu diễn x qua y từ phương trình đã cho, tìm được nghiệm tổng quát là

$$\left(\frac{3y+6}{2}\,;\,y\right),\ y \in \mathbf{R}.$$

Chú ý. Người ta cũng viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{2t-6}{3} \end{cases} (t \in \mathbf{R}) \text{ hoặc } \begin{cases} x = \dfrac{3t+6}{2} \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbf{R}).$$

(Ta nói rằng nghiệm của phương trình được biểu diễn qua *tham số* t).

b) Nghiệm tổng quát:

$$(-2y + 3; y),\ y \in \mathbf{R} \text{ hoặc } \left(x ; \frac{-x+3}{2}\right),\ x \in \mathbf{R}.$$

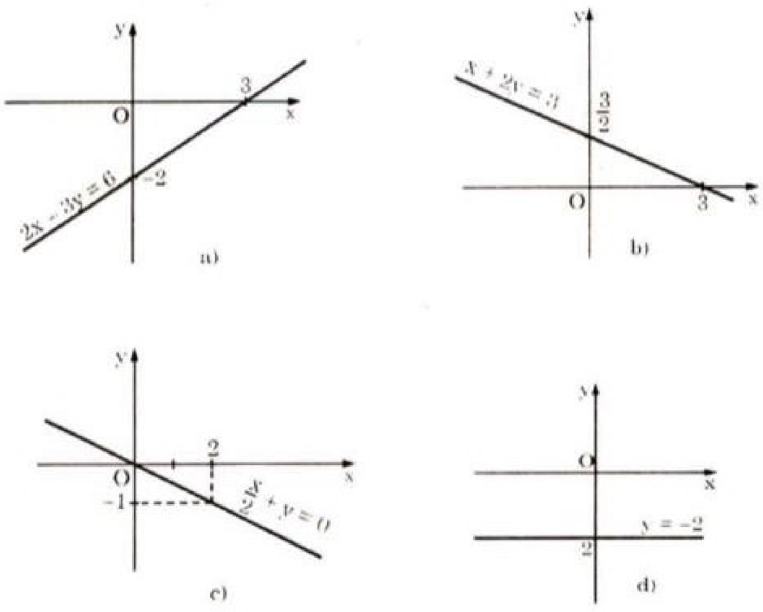
c) Nghiệm tổng quát:

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -\dfrac{1}{2}x \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2y \\ y \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

d) Nghiệm tổng quát:

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } (x; y) = (t; -2),\ t \in \mathbf{R}.$$

Tập nghiệm của các phương trình được biểu diễn tương ứng trên hình 3.2.



Hình 3.2

Ví dụ 2: Tìm trong hình vuông cạnh 5 (h.3.3) các điểm có toạ độ là những số nguyên x, y thoả mãn phương trình $x - 2y = -4$.

Giải

Những điểm nằm trong hình vuông có toạ độ (x; y) thoả mãn

$0 < x < 5,\ 0 < y < 5.$

Từ phương trình đã cho suy ra $x = 2y - 4$. Theo điều kiện trên ta phải có

$$2y - 4 > 0 \text{ và } 2y - 4 < 5,$$

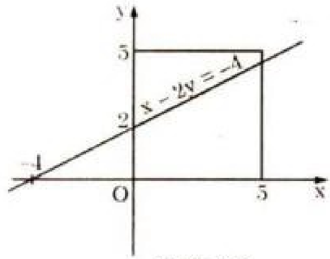
hay $y > 2$ và $y < 4,5$.

Vì y là số nguyên nên $y = 3$ hoặc $y = 4$.

Tương ứng tìm được $x = 2$; $x = 4$.

Vậy có hai điểm cần tìm là

$$A(2; 3) \text{ và } B(4; 4).$$



Hình 3.3

Ví dụ 3: Người ta muốn lắp một đường ống dẫn nước dài 130m bằng các ống nhựa loại 6m và 9m. Hỏi có thể lắp được đường dẫn nước mà không phải cắt đi một ống nhựa nào hay không? (các mối nối là không đáng kể).

* Cũng câu hỏi tương tự trong trường hợp dùng hai loại ống 5m và 9m?

Giải

Giả sử phải dùng x ống loại 6m và y ống loại 9m. Yêu cầu của bài toán có nghĩa là: Tồn tại hay không cặp số tự nhiên (x; y) thoả mãn phương trình

$$6x + 9y = 130. \qquad (*)$$

Viết lại phương trình (*) thành

$$6x - 130 = -9y.$$

Vế trái là một số chẵn, do đó 9y cũng là số chẵn, suy ra y phải chẵn. Đặt $y = 2t$ ($t \in \mathbf{Z}$) ta có

$$6x - 130 = -18t \Leftrightarrow 6x + 18t = 130$$

$$\Leftrightarrow 6(x + 3t) = 130.$$

Vế trái là một số nguyên chia hết cho 6, trong khi đó vế phải không chia hết cho 6.

Như vậy phương trình (*) không có nghiệm nguyên.

Vậy không thể lắp được đường dẫn nước bằng hai loại ống 6m và 9m mà không phải cắt đi một ống nào.

* Nếu dùng hai loại ống 5m và 9m thì có thể lắp được đường ống dài 130m mà không phải cắt đi một ống nào. Chẳng hạn, dùng 10 ống loại 9m và 8 ống loại 5m ta được $10 . 9 + 8 . 5 = 130$ (m).

III. Bài tập

1. Các cặp số dạng $(4t + 1; 3t)$, với $t \in \mathbf{R}$, có là nghiệm của phương trình $3x - 4y = 3$ hay không? Tại sao?

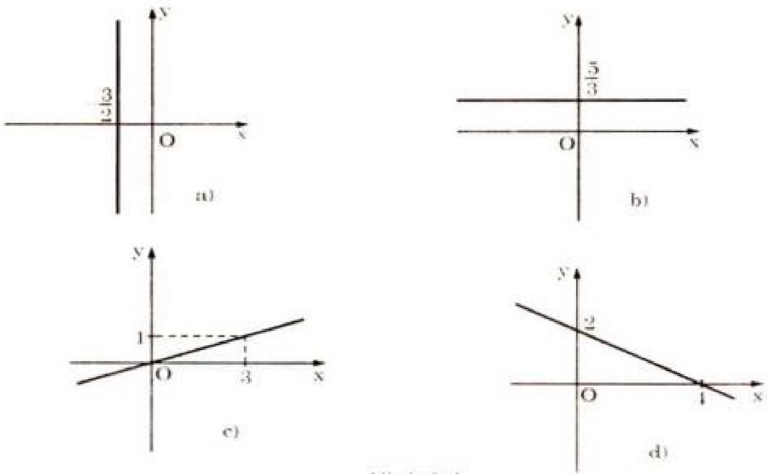
2. Đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $ax + by = 0$ (a, b không đồng thời bằng 0) có đi qua gốc toạ độ không? Vì sao?

3. Giải các phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm của chúng trên mặt phẳng toạ độ:

a) $3x - 4y = 12$; b) $2x + 3y = 0$;

c) $5x + 0y = 3$; d) $0x + 2y = 0$.

4. Trên hình 3.4 là các đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của các phương trình bậc nhất hai ẩn. Trong mỗi trường hợp, hãy viết ra một phương trình tương ứng:



Hình 3.4

5. Tìm trong hình chữ nhật ABCD với A(0; 2), B(5; 2), C(5; −4), D(0; −4) những điểm có toạ độ là những số nguyên và các điểm này nằm trên đường thẳng $2x + \frac{7}{5}y = 7$.

6. Tìm các cặp số nguyên (x; y) thoả mãn mỗi phương trình sau:

a) $2x + y = 0$; b) $x - 3y = 0$;

c) $3x - 2y = 1$; d) $6x - 15y = 4$.

7. ***Đố vui***

Vừa gà vừa chó
Nhốt cùng với nhau
Tám chân lộ rõ
Bạn hãy tính mau
Mấy con mỗi loại?

Chủ đề 2

HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nghiệm của hệ phương trình

$$\text{(I)} \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases} \qquad (a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

là cặp số $(x_0; y_0)$ thoả mãn *đồng thời* hai phương trình (1) và (2).

2. Giải hệ phương trình (I) là tìm tập nghiệm của nó.

3. Số nghiệm của hệ (I) chính là số giao điểm của hai đường thẳng

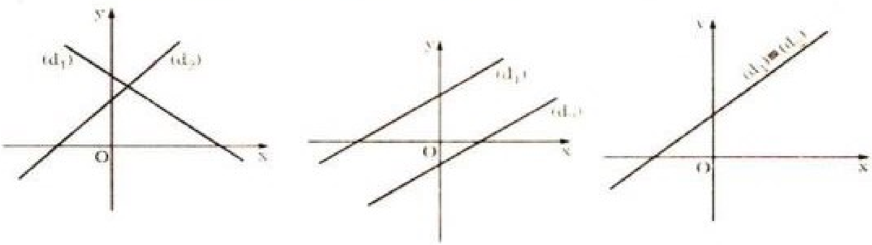
$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (d_1)$$

và $\quad a_2x + b_2y = c_2 \qquad (d_2)$.

– Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (d_1)$ cắt (d_2).

– Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d_1) // (d_2)$.

– Hệ (I) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow (d_1) \equiv (d_2)$ (h.3.5).



Hệ (I) có nghiệm duy nhất — Hệ (I) vô nghiệm — Hệ (I) có vô số nghiệm

Hình 3.5

4. Hai hệ phương trình được gọi là *tương đương* với nhau nếu tập nghiệm của chúng trùng nhau. Hai hệ phương trình cùng vô nghiệm cũng được coi là tương đương với nhau.

5. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế

– Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.

– Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

6. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số

– Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của cùng một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau.

– Áp dụng quy tắc cộng đại số để được một hệ phương trình mới, trong đó một phương trình có hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (phương trình còn một ẩn).

– Giải phương trình một ẩn thu được rồi dùng phương pháp thế, suy ra nghiệm của hệ đã cho.

7. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Bước 1. Lập hệ phương trình:

– Chọn hai ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.

– Lập hệ hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hệ phương trình nói trên.

Bước 3. Kiểm tra các điều kiện rồi kết luận.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
XÉT SỰ TỒN TẠI NGHIỆM VÀ BIỂU DIỄN NGHIỆM

I. Phương pháp giải

– Thử trực tiếp cặp số đã cho vào hệ.

– Nhận xét đặc điểm riêng của từng phương trình (nếu có).

– Vẽ đường thẳng biểu diễn từng phương trình của hệ, lưu ý hệ số góc của các đường thẳng.

Lưu ý: + Nếu một trong hai phương trình của hệ vô nghiệm thì cả hệ vô nghiệm.

+ Nghiệm của hệ là một cặp số, chính là toạ độ giao điểm của hai đường thẳng biểu diễn hai phương trình của hệ.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Hai hệ phương trình cùng có vô số nghiệm liệu có tương đương với nhau không? Cho ví dụ minh hoạ.

Giải

Hai hệ phương trình cùng có vô số nghiệm chưa chắc đã tương đương với nhau. Chẳng hạn, xét hai hệ phương trình

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{và (II)}\ \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 3y = 0. \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng cả hai hệ phương trình đều có vô số nghiệm. Hệ (I) có nghiệm dạng (t; t), hệ (II) có nghiệm dạng (t; −t), $t \in \mathbf{R}$. Tuy nhiên, tập nghiệm của hệ (I) được biểu diễn bởi đường thẳng y = x, tập nghiệm của hệ (II) được biểu diễn bởi đường thẳng y = −x. Rõ ràng hai đường thẳng này không trùng nhau (chúng vuông góc với nhau), tức là tập nghiệm của hai hệ không trùng nhau. Vậy hệ (I) và hệ (II) không tương đương.

Ví dụ 2: Với giá trị nào của m và n thì hệ phương trình

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + y = n \end{cases}$$

nhận cặp số (−1; 0) làm nghiệm?

Giải

Cặp số (−1; 0) là nghiệm của hệ khi thoả mãn đồng thời hai phương trình của hệ, nên ta có

$$m.(-1) - 0 = 1 \text{ và } -1 + 0 = n.$$

Từ đó m = −1 và n = −1.

Ví dụ 3: Hãy xét xem hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm:

$$\begin{cases} 11x + 10y = 12 \\ 6x + y = 18. \end{cases}$$

Giải

Ta hãy xem đồ thị của các phương trình của hệ có vị trí tương đối như thế nào? Muốn vậy, ta hãy biểu diễn y theo x từ mỗi phương trình:

$$\begin{cases} y = -1,1x + 1,2 \\ y = -6x + 18. \end{cases}$$

Đây là hai hàm bậc nhất. Đồ thị của chúng là hai đường thẳng *có hệ số góc khác nhau*, do đó chúng *cắt nhau*. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 4: Với giá trị nào của a thì hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + 2y = 0 \end{cases}$$

a) Có nghiệm duy nhất?

b) Vô nghiệm?

c) Có vô số nghiệm?

Giải

Từ phương trình thứ nhất rút ra

$$y = -x + 1. \qquad (1)$$

Từ phương trình thứ hai rút ra

$$y = -\frac{a}{2}x. \qquad (2)$$

a) Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi các đường thẳng (1) và (2) cắt nhau, tức là các hệ số góc của chúng khác nhau hay $-\frac{a}{2} \neq -1$ suy ra $a \neq 2$.

b) Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi hai đường thẳng (1) và (2) song song. Vì hai đường thẳng này có tung độ gốc khác nhau nên chúng song song với nhau khi và chỉ khi hệ số góc của chúng bằng nhau, tức là

$$-\frac{a}{2} = -1 \text{ hay } a = 2.$$

c) Hai đường thẳng (1) và (2) có tung độ gốc khác nhau nên không thể trùng nhau. Vậy hệ đã cho không thể có vô số nghiệm.

Ví dụ 5: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = m \\ mx + \sqrt{2}y = m. \end{cases}$

a) Tìm m để hệ vô nghiệm, vô số nghiệm.

b) Hệ có nghiệm duy nhất khi nào? Vì sao?

Giải

a) Biến đổi hệ đã cho thành $\begin{cases} y = 2x - m & (1) \\ y = -\dfrac{m}{\sqrt{2}}x + \dfrac{m}{\sqrt{2}}. & (2) \end{cases}$

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi hai đường thẳng (1) và (2) song song hay $-\frac{m}{\sqrt{2}} = 2$, tức là $m = -2\sqrt{2}$ (hệ số góc của hai đường thẳng (1) và (2) bằng nhau). Mặt khác, khi $m = -2\sqrt{2}$ thì tung độ gốc của hai đường thẳng này khác nhau $\left(-m \neq \frac{m}{\sqrt{2}}\right)$. Vậy hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $m = -2\sqrt{2}$.

Theo trên ta thấy khi hai đường thẳng (1) và (2) có cùng hệ số góc ($m = -2\sqrt{2}$) thì tung độ gốc của chúng khác nhau. Vậy không có giá trị nào của m để hệ có vô số nghiệm.

b) Từ a) suy ra khi $m \neq -2\sqrt{2}$ thì hai đường thẳng (1) và (2) có hệ số góc khác nhau, tức chúng cắt nhau. Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq -2\sqrt{2}$.

III. Bài tập

8. Cặp số (3; −1) là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

a) $\begin{cases} 3u + v = 8 \\ 7u - 2v = 23; \end{cases}$

b) $\begin{cases} v + 2u = 5 \\ u + 2v = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3u - v = 0 \\ 5u - v = -4. \end{cases}$

9. Cặp số nào trong các cặp số (−3; 4), (−2; −6), (−4; 3) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = y - 7 \\ 3x + 4y = 0? \end{cases}$$

10. Nối mỗi hệ phương trình với một cặp số tương ứng mà nó nhận làm nghiệm:

(A) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + 2y = \dfrac{7}{2} \\ 2x - y = \dfrac{19}{2} \end{cases}$ a) (−2; 1)

(B) $\begin{cases} x - y = -3 \\ -2x + 2y = 6 \end{cases}$ b) $\left(5; \dfrac{1}{2}\right)$

(C) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 4{,}5 \end{cases}$ c) $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$

(D) $\begin{cases} x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 5 \\ x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 0 \end{cases}$ d) (1,5; 0).

11. Xác định giá trị của m để hệ phương trình sau có vô số nghiệm. Viết công thức nghiệm tổng quát của hệ với giá trị tìm được của m:

$$\begin{cases} 2x + y = \dfrac{1}{2} \\ (2m + 1)x - y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

12. Xét xem các hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm?

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 6x - 4y = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - y = 11 \\ -10x + 2y = -22; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2y = 4; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2 = 0 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

13. Cho hai phương trình

$3x + y = 7$ (1) và $-5x + 2y = 3.$ (2)

a) Tìm nghiệm tổng quát của mỗi phương trình trên.

b) Vẽ đồ thị của hai phương trình trên cùng một hệ toạ độ, rồi xác định nghiệm chung của hai phương trình.

14. Bằng cách vẽ đồ thị, hãy giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 3y = 9\ ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -2x - 4y = 10\ ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ -3x + 4y = 14\ ; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 1,5y + x = -0,5 \\ 2x + 3y = -1. \end{cases}$

15. Chứng minh rằng nếu một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có hai nghiệm phân biệt thì hệ đó có vô số nghiệm.

Dạng 2
GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

I. Phương pháp giải

Để giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng *phương pháp thế*, ta cần tiến hành các bước sau đây:

1. Biểu diễn một ẩn từ một phương trình nào đó của hệ qua ẩn kia.

2. Thay ẩn này bởi biểu thức biểu diễn nó vào phương trình còn lại.

3. Giải phương trình một ẩn nhận được.

4. Tìm giá trị tương ứng của ẩn còn lại.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm trên đường thẳng $y = 3x + 8$ điểm có hoành độ bằng tung độ.

Giải

Giả sử điểm cần tìm là $M(x_0; y_0)$. Điểm này có hoành độ bằng tung độ nên $x_0 = y_0$. Mặt khác, M thuộc đường thẳng $y = 3x + 8$ nên toạ độ của nó thoả mãn phương trình của đường thẳng, tức là $y_0 = 3x_0 + 8$. Ta có hệ phương trình hai ẩn x_0, y_0:

$$\begin{cases} x_0 = y_0 & (1) \\ y_0 = 3x_0 + 8. & (2) \end{cases}$$

Thay x_0 bởi y_0 từ phương trình (1) vào phương trình (2), ta có

$$y_0 = 3y_0 + 8 \Leftrightarrow -2y_0 = 8 \Leftrightarrow y_0 = -4.$$

Từ đó $x_0 = -4$. Vậy điểm cần tìm là $M(-4; -4)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = 12 & (1) \\ 7x - 2y = 31. & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (1), biểu diễn y theo x ta có $y = 12 - 2x$. Thay y trong phương trình (2) bởi $12 - 2x$, ta được

$$7x - 2(12 - 2x) = 31$$

$$\Leftrightarrow 7x - 24 + 4x = 31$$

$$\Leftrightarrow 11x = 55$$

$$\Leftrightarrow x = 5.$$

Thay $x = 5$ vào phương trình $y = 12 - 2x$, ta được

$$y = 12 - 2.5 = 2.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (5; 2)$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x\sqrt{2} - y = 3 & (1) \\ x - 2y\sqrt{2} = -5\sqrt{2}. & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ (1) rút ra $y = 3x\sqrt{2} - 3$. Thay vào (2) ta có

$$x - 2\sqrt{2}\left(3x\sqrt{2} - 3\right) = -5\sqrt{2} \Rightarrow -11x = -11\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

Từ đó tìm được $y = 3$. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (\sqrt{2}; 3)$.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax - y = 2 & (1) \\ x + ay = 3. & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $a = \sqrt{3} - 1$.

b) Chứng minh rằng với mọi a hệ luôn có nghiệm duy nhất, tìm nghiệm đó.

Giải

a) Với $a = \sqrt{3} - 1$ hệ trở thành

$$\begin{cases}(\sqrt{3}-1)x - y = 2 & (1)\\ x + \left(\sqrt{3}-1\right)y = 3. & (2)\end{cases}$$

Giải hệ bằng phương pháp thế, từ (2) ta có

$$x = 3 - \left(\sqrt{3}-1\right)y.$$

Thay vào (1), ta có

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\left[3-\left(\sqrt{3}-1\right)y\right] - y = 2$$

$$\Leftrightarrow -\left(\sqrt{3}-1\right)^2 y - y = 2 - 3\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[-\left(\sqrt{3}-1\right)^2 - 1\right]y = 2 - 3\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(-5+2\sqrt{3}\right)y = 5 - 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-5} = \frac{\left(5-3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+5\right)}{-13} = \frac{5\sqrt{3}-7}{13}.$$

Từ đó $x = 3 - \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(5\sqrt{3}-7\right)}{13} = \dfrac{39-\left(15-5\sqrt{3}-7\sqrt{3}+7\right)}{13} = \dfrac{17+12\sqrt{3}}{13}$.

Vậy hệ có nghiệm là $(x; y) = \left(\dfrac{12\sqrt{3}+17}{13}; \dfrac{5\sqrt{3}-7}{13}\right)$.

b) Xét hệ

$$\begin{cases}ax - y = 2 & (1)\\ x + ay = 3. & (2)\end{cases}$$

Từ phương trình (2) rút ra $x = 3 - ay$. Thay vào phương trình (1), ta được

$$a(3-ay) - y = 2$$

$$\Leftrightarrow 3a - a^2y - y = 2 \Leftrightarrow \left(a^2+1\right)y = 3a - 2. \qquad (3)$$

Do $a^2 + 1 \neq 0$ với mọi a nên phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$$y = \frac{3a-2}{a^2+1}, \text{ suy ra } x = 3 - \frac{a(3a-2)}{a^2+1} = \frac{2a+3}{a^2+1}.$$

Vậy với mọi a hệ luôn có nghiệm duy nhất

$$\left(\frac{2a+3}{a^2+1}; \frac{3a-2}{a^2+1}\right).$$

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba đường thẳng

$2x-y=-1$ $\qquad(d_1)$

$x+y=-2$ $\qquad(d_2)$

$y=-2x-m.$ $\qquad(d_3)$

Xác định m để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

Giải

Toạ độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+y=-2. \end{cases}$$

Giải hệ này bằng phương pháp thế, ta được nghiệm $x=-1$, $y=-1$. Vậy giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là $I(-1; -1)$. Ba đường thẳng đã cho đồng quy khi và chỉ khi điểm I nằm trên đường thẳng (d_3), tức là toạ độ của I thoả mãn phương trình

$$y=-2x-m.$$

Ta có $-1=-2.(-1)-m$, suy ra $m=3$.

Vậy với $m=3$ thì ba đường thẳng đã cho đồng quy.

III. Bài tập

16. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 8y-x=4 \\ 2x-21y=2\,; \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 7x+6y=6 \\ 3x+4y=9\,; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{y}{4}-\dfrac{x}{5}=6 \\ \dfrac{x}{15}+\dfrac{y}{12}=0\,; \end{cases}$ $\qquad$ d) $\begin{cases} \dfrac{6x}{5}+\dfrac{y}{15}=2,3 \\ \dfrac{x}{10}-\dfrac{2y}{3}=1,2. \end{cases}$

17. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2u+5v=0 \\ -8u+15v=7\,; \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 4u+3v=14 \\ 5u-3v=25\,; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4z + t = 2 \\ -8z - 2t = 1 ; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{z}{3} - \dfrac{t}{2} = -4 \\ 2z - 3t = -24. \end{cases}$

18. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x\sqrt{2} + y = 3 + \sqrt{2} \\ -x + (\sqrt{2} - 1)y = 1 - \sqrt{2} ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 5 \\ x + y = 2\sqrt{2}. \end{cases}$

19. Xác định a và b để đồ thị hàm số y = ax + b đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(5; 0)$, $B(-2; 21)$;

b) $A(\sqrt{3} ; 2)$, $B(-1; 2)$.

Vẽ các đồ thị nhận được.

20. Xác định m để hai đường thẳng $y = 4x + 8$ và $y = \dfrac{1}{2}x - m$ cắt nhau tại một điểm trên trục hoành.

21. Tìm trên đường thẳng $y = 5x - 4$ các điểm cách trục tung một khoảng bằng 2 đơn vị.

22. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (m - 1)x - y = 2 \\ mx + y = m. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = \sqrt{2}$.

b) Xác định giá trị của m để hệ có nghiệm (x; y) duy nhất thoả mãn điều kiện $x + y > 0$.

23. Bằng cách biểu diễn x và y theo z, hãy tìm x, y, z từ hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + 4y = 10 \\ y - z = 11 \\ z + \dfrac{x}{2} = -6. \end{cases}$$

Dạng 3

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ

I. Phương pháp giải

Để giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng *phương pháp cộng đại số*, ta cần tiến hành các bước sau đây:

1. Nhân cả hai vế của các phương trình trong hệ với số thích hợp (nếu cần) để đưa hệ đã cho về hệ mới, trong đó các hệ số của một ẩn nào đó bằng nhau (hoặc đối nhau).

2. Trừ (hoặc cộng) từng vế của các phương trình trong hệ mới để khử bớt một ẩn.

3. Giải phương trình một ẩn thu được.

4. Thay giá trị tìm được của ẩn này vào một trong hai phương trình của hệ để tìm ẩn kia.

Lưu ý

1. Khi trong hệ có chứa những biểu thức giống nhau, ta kết hợp phương pháp đặt ẩn phụ để đưa hệ về một hệ mới đơn giản hơn.
2. Một hệ phương trình có thể được giải bằng một trong hai phương pháp: thế hoặc cộng đại số. Tuỳ theo đặc điểm của mỗi phương trình mà ta chọn phương pháp thích hợp.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ x - 3y \quad = 26; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 11y = 8 \\ 10x - 7y = 74. \end{cases}$

Giải

a) Các hệ số của ẩn y trong hai phương trình là đối nhau, vì vậy, ta cộng từng vế của hai phương trình để khử ẩn y, thu được

$3x = 21 \Leftrightarrow x = 7.$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta có

$$7 - 3y = 26 \Leftrightarrow 3y = -19 \Leftrightarrow y = -\frac{19}{3}.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(7; -\frac{19}{3}\right)$.

b) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2, giữ nguyên phương trình thứ hai, ta nhận được hệ mới:

$$\begin{cases} 10x + 22y = 16 \\ 10x - 7y = 74. \end{cases}$$

Trừ từng vế của phương trình thứ nhất (mới) cho phương trình thứ hai, thu được

$$29y = -58 \Leftrightarrow y = -2.$$

Thay vào phương trình thứ hai, ta có

$$10x - 7.(-2) = 74 \Leftrightarrow 10x = 60 \Leftrightarrow x = 6.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (6; -2)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 5y = 93 \\ 5x - 4y = 103. \end{cases}$$

Giải

Ta hãy chọn các nhân tử thích hợp để khi nhân cả hai vế của từng phương trình với chúng, các hệ số của một ẩn, chẳng hạn y, là đối nhau. Để ý rằng BCNN (5, 4) = 20, nhân hai vế của phương trình thứ nhất với (–4), phương trình thứ hai với 5, ta nhận được hệ mới

$$\begin{cases} -12x + 20y = -372 \\ 25x - 20y \;\; = 515. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình, ta được

$$13x = 143 \Rightarrow x = 11.$$

Thay giá trị vừa tìm được của x vào phương trình $5x - 4y = 103$, tìm được $y = -12$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (11; -12)$.

Ví dụ 3: Xác định m, n để hệ phương trình

$$\begin{cases} mx - y = n \\ mx + ny = 2 \end{cases}$$

a) Có nghiệm $(x; y) = (-\sqrt{2}\,;\, \sqrt{3})$.

b) Vô nghiệm.

Giải

a) Hệ có nghiệm $(x; y) = (-\sqrt{2}\,;\, \sqrt{3})$ tức là

$$\begin{cases} m.(-\sqrt{2}) - \sqrt{3} = n \\ m.(-\sqrt{2}) + n\sqrt{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}\,m - n = \sqrt{3} \\ -\sqrt{2}\,m + \sqrt{3}\,n = 2. \end{cases}$$

Đây là hệ hai phương trình bậc nhất đối với hai ẩn m, n. Sử dụng phương pháp cộng đại số, tìm được

$$m = \frac{-5\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}+1)}\ ;\ n = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}.$$

b) Từ phương trình thứ nhất rút ra y = mx − n, thay vào phương trình thứ hai ta được

$$mx + n(mx - n) = 2 \Leftrightarrow m(n+1)x = n^2 + 2.$$

Để ý rằng $n^2 + 2 > 0\ \forall n$, nên phương trình sau cùng vô nghiệm khi và chỉ khi $m(n + 1) = 0$, tức là $m = 0$ hoặc $n = -1$.

Vậy hệ đã cho vô nghiệm khi $m = 0$ hoặc $n = -1$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{7}{2x+y} + \dfrac{4}{2x-y} = 74 \\ \dfrac{3}{2x+y} + \dfrac{2}{2x-y} = 32. \end{cases}$$

Giải

Đặt $\dfrac{1}{2x+y} = u,\ \dfrac{1}{2x-y} = v$, ta có hệ $\begin{cases} 7u + 4v = 74 \\ 3u + 2v = 32. \end{cases}$

Giải hệ phương trình này (bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số) ta tìm được

$$\begin{cases} u = 10 \\ v = 1. \end{cases}$$

Từ đó ta có $\begin{cases} 2x + y = \dfrac{1}{10} \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{40} \\ y = -\dfrac{9}{20}. \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\dfrac{11}{40}; -\dfrac{9}{20}\right)$.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + |y| = 3 \\ x - y = 6. \end{cases}$$

Giải

– Xét trường hợp $y \geq 0$, hệ trở thành

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 6. \end{cases}$$

Bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số, tìm được $x = 3$, $y = -3$.

Giá trị $y = -3$ không thoả mãn điều kiện ở trên nên cặp số $(3; -3)$ không phải là nghiệm của hệ đã cho.

– Xét trường hợp $y < 0$, hệ trở thành

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 6. \end{cases}$$

Trừ từng vế của hệ, tìm được $x = -3$, từ đó $y = -9$ (thoả mãn điều kiện đặt ra).

Vậy hệ đã cho có một nghiệm $(-3; -9)$.

III. Bài tập

24. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ 15x - 9y = 20\ ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 6x + 10y = 4\ ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(2x + y) - 26 = 3x - 2y \\ 15 - (x - 3y) = 2x + 5\ ; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - y - 24 = 2(5x - 2y) \\ 3y - 2 = 4 - (x - y). \end{cases}$

25. Tìm hàm số $y = kx + b$, biết rằng đồ thị của nó đi qua các điểm:

a) $M(5; 5)$ và $N(-10; -19)$;

b) $P(4; 1)$ và $Q(3; -5)$;

c) $A(8; -1)$ và $B(\sqrt{2}\ ; -1)$;

d) $I(2; 4)$ và $J(2; -7)$.

26. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \dfrac{v}{3} - \dfrac{u}{8} = 3 \\ 7u + 9v = -2\ ; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{5u}{6} - v = -\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{2u}{3} + 3v = -\dfrac{2}{3}\ ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x\sqrt{3} + 3y = 1 \\ 2x - y\sqrt{3} = \sqrt{3}\ ; \end{cases}$

d) $\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})y = 5 \\ (1 - \sqrt{2})x + (\sqrt{3} - \sqrt{2})y = -11. \end{cases}$

27. Bằng phương pháp đặt ẩn phụ, hãy giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{y} = 17 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{y} = 13 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2y}{y+2} = 3 \\ \dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{y}{y+2} = -4. \end{cases}$

28. Các đường thẳng $2x + 3y = 20$; $3x - 5y = 11$ và $x + y = 9$ có đồng quy tại một điểm hay không?

29. Xác định a để hệ phương trình sau có nghiệm, tìm nghiệm đó:

$$\begin{cases} 3x - y = -16 \\ -2x + ay = a - 1 \\ 2x + y = 1. \end{cases}$$

30. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ |x - 2| - y - 1 = 0. \end{cases}$$

31. Xác định a, b để hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - ay = b \\ ax + by = 1 \end{cases}$$

a) Có nghiệm là $\left(\sqrt{2}\,;\, -\sqrt{2}\right)$;

b) Có vô số nghiệm.

Dạng 4
GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. Phương pháp giải

Để giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình ta có thể tiến hành theo các bước sau.

Bước 1. Lập hệ phương trình:

– Chọn ẩn (thường là các đại lượng cần tìm) và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.

– Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hệ phương trình vừa lập.

Bước 3. Kiểm tra xem các nghiệm của hệ có thoả mãn điều kiện đặt ra, rồi trả lời.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Một khách du lịch đi trên ô tô 4 giờ, sau đó đi tiếp bằng tàu hoả trong 7 giờ được quãng đường dài 640km. Hỏi vận tốc của tàu hoả và ô tô, biết rằng mỗi giờ tàu hoả đi nhanh hơn ô tô 5km?

Giải

Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h), vận tốc của tàu hoả là y (km/h) ($x > 0$, $y > 0$). Quãng đường khách du lịch đi bằng ô tô là 4x (km), đi bằng tàu hoả là 7y (km). Theo giả thiết ta có $4x + 7y = 640$. Kết hợp điều kiện vận tốc của tàu hoả hơn vận tốc ô tô 5km/h, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} y - x = 5 \\ 4x + 7y = 640. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế tìm được $x = 55$; $y = 60$.

Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện đặt ra.

Trả lời: Vận tốc của tàu hoả là 60km/h. Vận tốc của ô tô là 55km/h.

Ví dụ 2: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 1 giờ 20 phút bể sẽ đầy. Nếu mở vòi thứ nhất trong 10 phút và vòi thứ hai trong 12 phút thì được $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu mới đầy bể?

Giải

Gọi x là thời gian vòi I chảy một mình đầy bể, y là thời gian vòi II chảy một mình đầy bể (đơn vị: giờ, $x > 0$, $y > 0$).

Trong một giờ, vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Trong 1 giờ 20 phút, tức $\frac{4}{3}$ giờ, cả hai vòi chảy được $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ bể (đầy bể).

Trong 10 phút $\left(\frac{1}{6}\text{ giờ}\right)$, vòi I chảy được $\frac{1}{6x}$ bể, trong 12 phút $\left(\frac{1}{5}\text{ giờ}\right)$, vòi II chảy được $\frac{1}{5y}$ bể. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 1 \\ \frac{1}{6x}+\frac{1}{5y} = \frac{2}{15}. \end{cases}$$

Bằng cách đặt $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ ta đưa về hệ

$$\begin{cases} u + v = \frac{3}{4} \\ \frac{u}{6} + \frac{v}{5} = \frac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Từ đó tìm được x = 2, y = 4 (thoả mãn điều kiện đặt ra).

Trả lời: Vòi thứ nhất chảy một mình trong 2 giờ đầy bể, vòi thứ hai chảy một mình trong 4 giờ đầy bể.

Ví dụ 3: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết hiệu giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị là 7; nếu lấy số đã cho chia cho số viết theo thứ tự ngược lại ta được thương là 3 và số dư là 5.

Giải

Gọi số phải tìm là $\overline{xy} = 10x + y$ (x, y nguyên dương), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 10x + y = 3(10y + x) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 7 \\ 7x - 29y = 5. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được x = 9; y = 2 (thoả mãn điều kiện).

Vậy số cần tìm là 92.

Ví dụ 4: Bạn Nam có 1 triệu đồng gồm 2 tờ 500 000 đồng. Nhân dịp đầu xuân mới, Nam muốn đổi lấy 30 tờ gồm hai loại 50 000 đồng và 20 000 đồng. Hỏi bạn Nam có thể đạt được ý muốn hay không?

Giải

Giả sử Nam đã đổi được 1 triệu đồng lấy 30 tờ gồm x tờ loại 50 000 đồng và y tờ loại 20 000 đồng. Ta phải có x + y = 30.

Mặt khác, vì tổng số tiền vẫn giữ nguyên nên ta có

$$50\,000x + 20\,000y = 1\,000\,000.$$

Ta có hệ phương trình (sau khi rút gọn):

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 5x + 2y = 100. \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được $x = \frac{40}{3}$; $y = \frac{50}{3}$. Theo ý nghĩa của bài toán, x và y phải là *các số tự nhiên*. Do đó các giá trị tìm được của x và y không phù hợp. Vậy bạn Nam không thể đạt được ý muốn của mình.

III. Bài tập

32. Biết rằng 15 quả táo và 8 quả thanh long nặng 7,1kg; 5 quả táo nặng hơn 3 quả thanh long 100g. Hỏi mỗi quả táo, quả thanh long nặng bao nhiêu?

33. Ở một công ty lắp ráp xe cơ giới, người ta lắp 430 chiếc lốp cho 150 xe gồm ô tô (4 bánh) và mô tô (2 bánh). Hỏi mỗi loại xe có bao nhiêu chiếc?

34. Khối lượng của $600cm^3$ nhôm và $1,5dm^3$ sắt là 13,32kg. Tìm khối lượng riêng của nhôm, biết rằng nó nhỏ hơn khối lượng riêng của sắt là $5,1kg/dm^3$.

35. Tìm một số có hai chữ số, biết rằng tổng các chữ số của số đó bằng 9 và viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng $\frac{2}{9}$ số ban đầu.

36. Một hình thang có diện tích $140cm^2$, chiều cao bằng 8cm. Tính độ dài các đáy của hình thang, biết rằng chúng hơn kém nhau 15cm.

37. Hai người khách du lịch xuất phát đồng thời từ hai thành phố cách nhau 38km. Họ đi ngược chiều và gặp nhau sau 4 giờ. Hỏi vận tốc của mỗi người, biết rằng đến khi gặp nhau, người thứ nhất đi được nhiều hơn người thứ hai 2km?

38. Một chiếc canô đi xuôi dòng theo một khúc sông trong 3 giờ và đi ngược dòng trong 4 giờ, được 380km. Một lần khác, canô này đi xuôi dòng trong 1 giờ và ngược dòng trong 30 phút được 85km. Hãy tính vận tốc thật (lúc nước yên lặng) của canô và vận tốc của dòng nước (vận tốc thật của canô và vận tốc dòng nước ở hai lần là như nhau).

39. Hai năm trước đây, tuổi của anh gấp đôi tuổi của em, còn 8 năm trước đây, tuổi anh gấp 5 lần tuổi em. Hỏi hiện nay anh và em bao nhiêu tuổi?

40. Một giá sách gồm ba ngăn. Số sách ở ngăn giữa nhiều hơn số sách ở ngăn dưới 10% và nhiều hơn số sách ở ngăn trên 30%. Hỏi mỗi giá sách đựng bao nhiêu quyển, biết rằng số sách ở ngăn dưới nhiều hơn số sách ở ngăn trên 80 quyển?

41. Một canô chạy xuôi dòng sông 108km rồi chạy ngược dòng 63km hết tất cả 7giờ. Một lần khác, canô này chạy xuôi dòng 81km rồi ngược dòng 84km cũng hết 7giờ. Hãy tính vận tốc thật của canô và vận tốc dòng nước (vận tốc thật của canô và vận tốc dòng nước ở hai lần là như nhau).

42. Con đường từ bản A đến trạm xá gồm một đoạn lên dốc dài 3km, đoạn nằm ngang 12km và đoạn xuống dốc 6km. Một cán bộ đi xe máy từ bản A đến trạm xá hết 1 giờ 7 phút.

Sau đó cán bộ này từ trạm xá trở về bản hết 1 giờ 16 phút. Hãy tính vận tốc của xe máy lúc lên dốc và lúc xuống dốc, biết rằng trên đoạn đường nằm ngang, xe máy đi với vận tốc 18km/h và vận tốc khi lên dốc, khi xuống dốc trong lúc đi và lúc về là như nhau.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

CHỦ ĐỀ 1

1. Thay $x = 4t + 1$, $y = 3t$ vào phương trình $3x - 4y = 3$, ta được đẳng thức $3(4t + 1) - 4.3t = 3$, thoả mãn với mọi $t \in \mathbf{R}$.

Vậy các cặp số dạng $(4t + 1 ; 3t)$, với $t \in \mathbf{R}$, là nghiệm của phương trình đã cho.

2. Cặp số $(0 ; 0)$ thoả mãn phương trình $ax + by = 0$ nên gốc toạ độ $O(0 ; 0)$ nằm trên đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình đã cho.

3. a) Ta có $x = \dfrac{4y+12}{3}$ hoặc $y = \dfrac{3x-12}{4}$, do đó công thức nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\begin{cases} x = \dfrac{4y+12}{3} \\ y \in \mathbf{R} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \dfrac{3x-12}{4}. \end{cases}$$

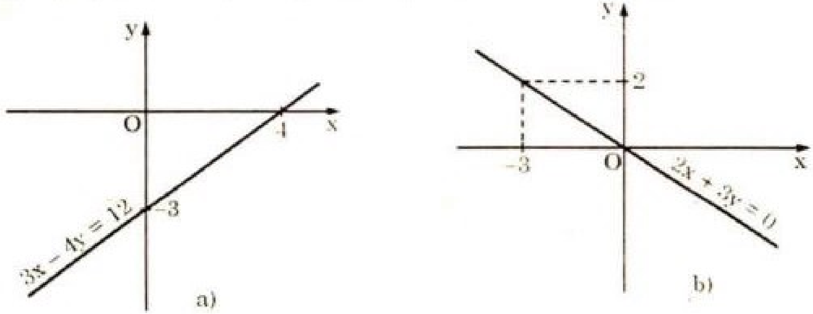
b) Công thức nghiệm tổng quát

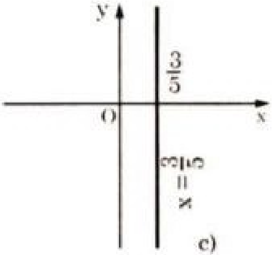
$$\left(x ; -\frac{2}{3}x\right), x \in \mathbf{R} \text{ hoặc } \left(-\frac{3}{2}y ; y\right),\ y \in \mathbf{R}.$$

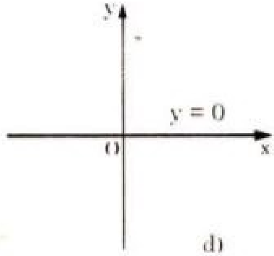
c) $\begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y \in \mathbf{R}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = 0 \end{cases}$ (các điểm nằm trên trục hoành).

Tập nghiệm của các phương trình được biểu diễn trên hình 3.6.







Hình 3.6

4. a) Đường thẳng có phương trình $x = -\frac{3}{2}$, nó có thể biểu diễn tập nghiệm của phương trình, chẳng hạn $2x + 0y = -3$ (hoặc $4x + 0y = -6$).

b) Đường thẳng $y = \frac{5}{3}$, nó có thể biểu diễn tập nghiệm của phương trình, chẳng hạn $0x + 3y = 5$.

c) Đường thẳng đi qua gốc toạ độ, có hệ số góc bằng $\frac{1}{3}$, do đó phương trình của nó là $y = \frac{1}{3}x$.

Đường thẳng này biểu diễn tập nghiệm của phương trình, chẳng hạn $x - 3y = 0$.

d) Đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình

$$ax + by = c \ (a^2 + b^2 \neq 0, c \neq 0),$$

trong đó các cặp số $(0 ; 2)$ và $(4 ; 0)$ là nghiệm của nó.

Ta có $a.0 + b.2 = c$ và $a.4 + b.0 = c$

Suy ra $b = \frac{c}{2}$, $a = \frac{c}{4}$. Phương trình cần tìm có dạng $\frac{c}{4}x + \frac{c}{2}y = c$ hay $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 1$.

5. Phương trình $2x + \frac{7}{5}y = 7$ có nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = 5 - \frac{10}{7}x. \end{cases}$

Các điểm nằm trong hình chữ nhật ABCD (h.3.7) có toạ độ $(x ; y)$ thoả mãn

$$0 < x < 5 ; -4 < y < 2 \qquad (*)$$

Ta phải có

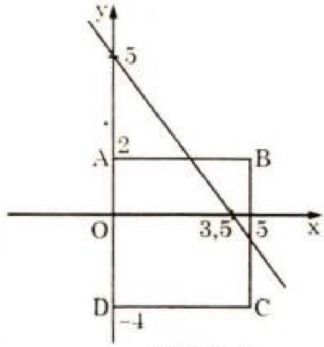
$$-4 < 5 - \frac{10}{7}x < 2$$

hay $\quad x < \frac{63}{10}$ và $x > \frac{21}{10} \qquad (**)$

Từ (*) và (**) suy ra $x = 3$; $x = 4$.

Tương ứng tìm được $y = \frac{5}{7}$; $y = -\frac{5}{7}$ (không là số nguyên).

Vậy trong hình chữ nhật ABCD không tìm được điểm nào trên đường thẳng $2x + \frac{7}{5}y = 7$ có toạ độ là những số nguyên.



Hình 3.7

6. a) Từ phương trình $2x + y = 0$ rút ra $y = -2x$.

Đặt $x = t$, ta có $y = -2t$.

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t, t \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

b) Tương tự, các cặp số nguyên cần tìm có dạng $(3t ; t)$, $t \in \mathbf{Z}$.

c) Ta có $y = \frac{3x-1}{2} = x + \frac{x-1}{2}$. Vì $x, y \in \mathbf{Z}$ nên $\frac{x-1}{2} \in \mathbf{Z}$. Đặt $\frac{x-1}{2} = t$ $(t \in \mathbf{Z})$, ta có $x = 2t + 1$. Khi đó $y = x + t = 3t + 1$. Vậy các cặp số nguyên cần tìm có dạng

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 1, t \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

d) Viết lại phương trình dưới dạng $6x - 4 = 15y$.

Với x, y nguyên, vế trái là một số chẵn, nên y phải là số chẵn. Đặt $y = 2k$ $(k \in \mathbf{Z})$, ta được

$$6x - 4 = 30k \Leftrightarrow 3x - 2 = 15k \Leftrightarrow 3x - 15k = 2.$$

Vế trái là số nguyên chia hết cho 3, trong khi đó vế phải không chia hết cho 3. Vậy không tồn tại các cặp số nguyên thoả mãn phương trình đã cho.

Chú ý. Các bài toán tìm các cặp số nguyên trên đây được gọi là bài toán *giải phương trình nghiệm nguyên*. Đối với phương trình bậc nhất hai ẩn

$$ax + by = c \ (a, b, c \in \mathbf{Z}), \qquad (1)$$

người ta chứng minh được kết quả : Nếu phương trình (1) có nghiệm nguyên thì c chia hết cho ước chung lớn nhất của a và b. Khi a và b nguyên tố cùng nhau, phương trình (1) luôn có nghiệm nguyên. Trong bài toán 6d) ta có phương trình $6x - 15y = 4$. Vì ƯCLN $(6, 15) = 3$ và 4 không chia hết cho 3 nên phương trình này không có nghiệm nguyên.

7. Giả sử có x con chó, y con gà khi đó x, y nguyên dương. Theo giả thiết ta có

$$4x + 2y = 8.$$

Xét $x = 1$, khi đó $2y = 4$, suy ra $y = 2$.

Với $x > 1$ thì không tồn tại y nguyên dương.

Như vậy phương trình có nghiệm nguyên dương duy nhất $(x ; y) = (1 ; 2)$, tức là có 1 con chó và 2 con gà.

Nhận xét. Ta có thể lập luận đơn giản như sau :

Theo giả thiết, mỗi loại phải có ít nhất 1 con. Giả sử có 1 con chó, khi đó còn lại 4 cái chân. Đây không phải là 4 chân của 1 con chó, vì nếu như thế thì không có con gà nào. Vậy 4 chân còn lại phải là chân gà, tức có 2 con gà. Không thể có nhiều hơn 1 con chó, vì nếu như thế thì không có con gà nào. Tóm lại, có 1 con chó và 2 con gà.

CHỦ ĐỀ 2

8. Thay trực tiếp các giá trị $u = 3$, $v = -1$ vào mỗi phương trình của hệ, ta được $(3 ; -1)$ là nghiệm của cả hai hệ phương trình a) và b); không là nghiệm của hệ phương trình c).

9. Thay lần lượt từng cặp số vào hệ phương trình đã cho ta có cặp số $(-4 ; 3)$ là nghiệm.

10. (A) → b. (B) → a. (C) → d. (D) → c.

11. Viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} y = -2x + \dfrac{1}{2} & (1) \\ y = (2m+1)x + \dfrac{1}{2}. & (2) \end{cases}$$

Hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi hai đường thẳng (1) và (2) trùng nhau, tức là $2m + 1 = -2$ hay $m = -\dfrac{3}{2}$. Khi đó công thức nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -2x + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

12. a) *Cách 1*. Viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{2} & (1) \\ y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{4}. & (2) \end{cases}$$

Dễ thấy hai đường thẳng (1) và (2) song song, vì chúng có cùng hệ số góc và có tung độ gốc khác nhau. Vậy hệ vô nghiệm.

Cách 2. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $6x - 4y = 14$. Đối chiếu với phương trình thứ hai của hệ thấy ngay hệ vô nghiệm.

b) Hệ có vô số nghiệm. Tập nghiệm được biểu diễn bởi đường thẳng $y = 5x - 11$.

c) Ta có $2y = 4 \Leftrightarrow y = 2$. Đồ thị của phương trình là đường thẳng song song với trục hoành. Trong khi đó, đồ thị của phương trình $x + 3y = 1$, tức $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$ là đường thẳng không song song với trục hoành. Hai đường thẳng này phải cắt nhau. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

d) $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Đồ thị của phương trình này song song với trục tung. Còn phương trình $2x - y = 3$, hay $y = 2x - 3$, có đồ thị không song song với trục tung. Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

13. a) Ta có $(1) \Leftrightarrow y = -3x + 7$. Nghiệm tổng quát của (1) là $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -3x + 7. \end{cases}$

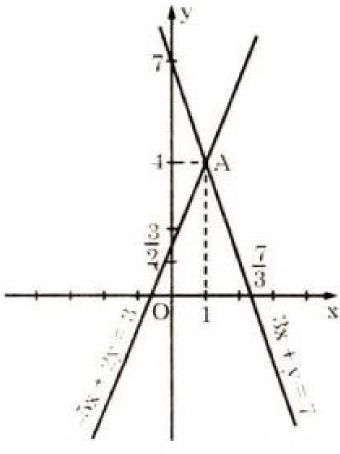
$(2) \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2}$. Nghiệm tổng quát của (2) là $\left(t\ ;\ \dfrac{5}{2}t + \dfrac{3}{2}\right)$, $t \in \mathbf{R}$.

b) Đồ thị (h.3.8)

Hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của các phương trình (1) và (2) cắt nhau tại điểm A(1 ; 4).

Thay cặp số (1 ; 4) vào mỗi phương trình (1), (2), ta được các đẳng thức đúng.

Vậy nghiệm chung của hai phương trình là (1 ; 4).



Hình 3.8

14. Học sinh tự vẽ đồ thị. ĐS :

a) (x ; y) = (3 ; 2).

b) Vô nghiệm.

c) (x ; y) = (−2 ; 2).

d) Vô số nghiệm, nghiệm tổng quát có dạng

$$\begin{cases} x = -1,5y - 0,5 \\ y \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

15. Trong một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, tập nghiệm của mỗi phương trình được biểu diễn bởi một đường thẳng. Hệ có hai nghiệm phân biệt tức là hai đường thẳng đó có hai điểm chung, do đó chúng trùng nhau. (Qua hai điểm phân biệt chỉ có một đường thẳng duy nhất). Vậy hệ đang xét có vô số nghiệm.

16. a) Từ phương trình thứ nhất rút ra $x = 8y - 4$, thay x trong phương trình thứ hai bởi $8y - 4$ ta được $2(8y - 4) - 21y = 2 \Leftrightarrow 16y - 21y = 2 + 8$

$$\Leftrightarrow -5y = 10 \Leftrightarrow y = -2.$$

Từ đó tìm được $x = 8.(-2) - 4 = -20$.

Vậy hệ có nghiệm $(x ; y) = (-20 ; -2)$.

Chú ý. Ta có thể trình bày lời giải như sau :

$$\begin{cases} 8y - x = 4 \\ 2x - 21y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8y - 4 \\ 2x - 21y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8y - 4 \\ 2(8y - 4) - 21y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8y - 4 \\ -5y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8y - 4 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -20 \\ y = -2. \end{cases}$$

Phép biến đổi trên đây gọi là *phép biến đổi tương đương* hệ phương trình.

b) Biểu diễn x qua y từ phương trình thứ hai :

$$3x = 9 - 4y,\ x = \frac{9 - 4y}{3}.$$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$7.\frac{9 - 4y}{3} + 6y = 6.$$

Giải phương trình ẩn y tìm được $y = 4,5$.

Từ đó suy ra $x = -3$.

Trả lời : Nghiệm của hệ là $(-3 ; 4,5)$.

c) Viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} 5y - 4x = 120 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y - 4x = 120 \\ y = -\dfrac{4}{5}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5.\left(-\dfrac{4}{5}x\right) - 4x = 120 \\ y = -\dfrac{4}{5}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x = 120 \\ y = -\dfrac{4}{5}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -15 \\ y = 12. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $(-15 ; 12)$.

d) HD. Đưa hệ về dạng hệ phương trình với các hệ số nguyên rồi dùng phương pháp thế.

ĐS. $(2 ; -1{,}5)$.

17. a) $u = -0{,}5$; $v = 0{,}2$. b) $u = \dfrac{13}{3}$; $v = -\dfrac{10}{9}$.

c) Từ phương trình thứ nhất rút ra $t = 2 - 4z$, thay vào phương trình thứ hai được

$-8z - 2(2 - 4z) = 1 \Leftrightarrow -4 = 1$ (vô lí !).

Phương trình ẩn z vô nghiệm, vậy hệ vô nghiệm.

d) Viết lại hệ thành

$$\begin{cases} 2z - 3t = -24 \\ 2z - 3t = -24. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ có vô số nghiệm.

Công thức nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases} z = \dfrac{3}{2}t - 12 \\ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

18. HD. Dùng phương pháp thế.

ĐS. a) $x = \sqrt{2}$; $y = \sqrt{2} + 1$.

b) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; $y = \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

19. a) Vì các điểm A và B thuộc đồ thị của hàm số nên toạ độ của chúng thoả mãn phương trình $y = ax + b$, tức là

$$\begin{cases} 0 = a.5 + b \\ 21 = a.(-2) + b \end{cases} \text{hay} \begin{cases} 5a + b = 0 \\ -2a + b = 21. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất ta có $b = -5a$, thế vào phương trình thứ hai nhận được $-2a - 5a = 21 \Leftrightarrow -7a = 21 \Leftrightarrow a = -3$.

Suy ra b = 15.

Ta có hàm số y = −3x + 15.

Đồ thị được biểu diễn trên hình 3.9a.

b) Lập luận tương tự, ta có hệ phương trình ẩn a, b :

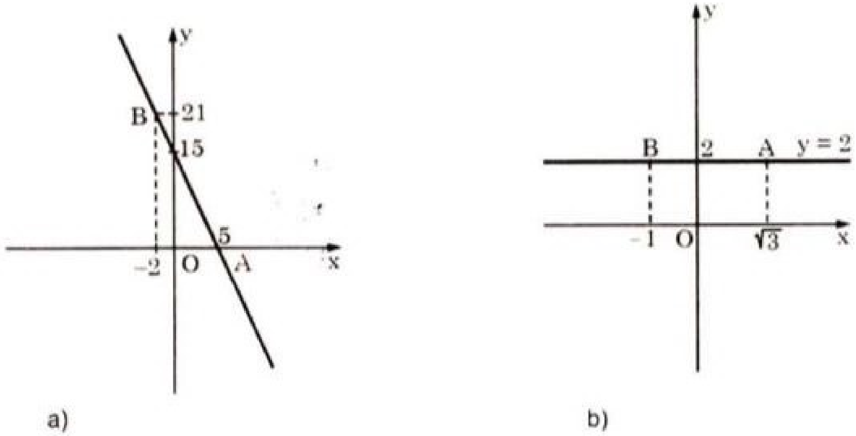
$$\begin{cases} a\sqrt{3} + b = 2 \\ -a + b = 2. \end{cases}$$

Thay b = a + 2 từ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất, nhận được

$a\sqrt{3} + a + 2 = 2 \Leftrightarrow a(\sqrt{3} + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0.$

Từ đó tìm được b = 2.

Ta có hàm số y = 2 (hàm hằng). Đồ thị của nó được biểu diễn trên hình 3.9b.



Hình 3.9

20. Đường thẳng y = 4x + 8 cắt trục hoành tại điểm I(−2 ; 0) (giải phương trình 4x + 8 = 0). Theo giả thiết, điểm I phải thuộc đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - m$.

Suy ra

$$0 = \frac{1}{2}.(-2) - m \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy với m = −1 thì hai đường thẳng đã cho cắt nhau tại một điểm trên trục hoành.

21. Các điểm cách trục tung một khoảng bằng 2 đơn vị sẽ có hoành độ là ±2.

– Xét điểm M(2 ; y_0). Vì M thuộc đường thẳng y = 5x − 4 nên y_0 = 5.2 − 4 = 6, do đó M(2 ; 6).

– Xét điểm $N(-2 ; y_0)$. Vì N thuộc đường thẳng $y = 5x - 4$ nên

$$y_0 = 5.(-2) - 4 = -14, \text{ do đó } N(-2 ; -14).$$

Vậy có hai điểm cần tìm là $M(2 ; 6)$ và $N(-2 ; -14)$.

22. a) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}+6}{7} ; \dfrac{\sqrt{2}-10}{7}\right)$.

b) Cộng từng vế hai phương trình trong hệ, ta được

$$(2m-1)x = m+2.$$

Với $2m - 1 \neq 0$, tức $m \neq \dfrac{1}{2}$ (*) thì hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{m+2}{2m-1},\ y = \frac{m^2-3m}{2m-1}.$$

$$x + y = \frac{m+2+m^2-3m}{2m-1} = \frac{(m-1)^2+1}{2m-1}.$$

Vậy $x + y > 0 \Leftrightarrow 2m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$.

Kết hợp với (*), ta có điều kiện để thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m > \dfrac{1}{2}$.

23. Xét hệ

$$\begin{cases} x + 4y = 10 & (1) \\ y - z = 11 & (2) \\ z + \dfrac{x}{2} = -6. & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) ta có $y = z + 11$. Từ phương trình (3) ta có

$$2z + x = -12 \Rightarrow x = -2z - 12.$$

Thay các biểu thức của x và y vào phương trình (1), ta được

$$-2z - 12 + 4(z + 11) = 10 \Leftrightarrow 2z = -22 \Leftrightarrow z = -11.$$

Từ đó tìm được $y = 0$, $x = 10$.

Vậy $x = 10 ; y = 0 ; z = -11$.

Nhận xét. Bằng cách biểu diễn một ẩn qua các ẩn còn lại, ta có thể đưa một hệ ba phương trình ba ẩn về hệ phương trình chỉ còn hai ẩn. Phương pháp giải hệ phương trình ở trên cũng được gọi là *phương pháp thế*.

24. a) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 3, ta được hệ phương trình tương đương :

$$\begin{cases}15x-9y=24\\15x-9y=20.\end{cases}$$

Rõ ràng hệ này vô nghiệm. Vậy hệ đã cho cũng vô nghiệm.

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}6x+10y=4\\6x+10y=4.\end{cases}$$

(nhân hai vế của phương trình đầu với 2)

Hệ này có vô số nghiệm. Công thức nghiệm tổng quát của hệ là

$$\begin{cases}x\in\mathbf{R}\\y=\dfrac{2-3x}{5}.\end{cases}$$

c) Biến đổi rút gọn hệ đã cho thành

$$\begin{cases}3x+5y=26\\-3x+3y=-10.\end{cases}$$

Cộng từng vế các phương trình của hệ, thu được $8y=16\Leftrightarrow y=2$.

Thay giá trị vừa tìm được của y vào phương trình đầu, tìm được $x=\dfrac{16}{3}$.

Vậy hệ có nghiệm $\left(\dfrac{16}{3}\ ;\ 2\right)$.

d) Đưa hệ về dạng

$$\begin{cases}-2x+y=8\\x+2y=6.\end{cases}$$

Nghiệm của hệ là : $(-2\ ;\ 4)$.

25. Vì M và N thuộc đồ thị hàm số $y=kx+b$ nên toạ độ của chúng thoả mãn phương trình $y=kx+b$.

Nghĩa là

$$\begin{cases}5=k.5+b\\-19=k.(-10)+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5k+b=5\\-10k+b=-19.\end{cases}$$

Coi đây là hệ phương trình với hai ẩn k, b. Bằng phương pháp cộng đại số ta có $15k=24\Leftrightarrow k=\dfrac{24}{15}=\dfrac{8}{5}$.

Thay vào phương trình thứ nhất ta tìm được $b=5-5k=5-8=-3$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{8}{5}x - 3$.

b) Lập luận tương tự, tìm được hàm số $y = 6x - 23$.

c) ĐS. Hàm hằng $y = -1$.

d) Ta có hệ

$$\begin{cases} 4 = k.2 + b \\ -7 = k.2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + b = 4 \\ 2k + b = -7. \end{cases}$$

Rõ ràng hệ này vô nghiệm. Vậy không tồn tại hàm số nào thoả mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Đường thẳng đi qua hai điểm $I(2\ ;\ 4)$ và $J(2\ ;\ -7)$ có phương trình $x = 2$. Tuy nhiên, đường thẳng này không là đồ thị của một hàm số nào.

26. a) Đưa hệ về dạng

$$\begin{cases} -3u + 8v = 72 \\ 7u + 9v = -2. \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 7, của phương trình thứ hai với 3 rồi cộng từng vế hai phương trình, thu được $83v = 498 \Leftrightarrow v = 6$.

Từ đó tìm được $u = -8$.

Vậy nghiệm của hệ là $(u\ ;\ v) = (-8\ ;\ 6)$.

b) ĐS : $(-1\ ;\ 0)$.

c) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với $\sqrt{3}$, của phương trình thứ hai với 3, ta được

$$\begin{cases} 3x + 3\sqrt{3}y = \sqrt{3} \\ 6x - 3\sqrt{3}y = 3\sqrt{3}. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình, thu được

$$9x = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

Từ đó tìm được $y = -\frac{1}{9}$.

Vậy hệ có nghiệm $\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\ ;\ -\frac{1}{9}\right)$.

d) HD. Cộng từng vế hai phương trình.

ĐS. $x = -3\ ;\ y = -(6 + 3\sqrt{6} + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{2})$.

27. a) Đặt $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ ta có hệ

$$\begin{cases} u - 6v = 17 \\ 5u + 6v = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u = 30 \\ u - 6v = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ u - 6v = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = -2. \end{cases}$$

Từ đó $x = \frac{1}{u} = \frac{1}{5}$, $y = \frac{1}{v} = -\frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x ; y) = \left(\frac{1}{5} ; -\frac{1}{2}\right)$.

Nhận xét. Ta có thể cộng từng vế hai phương trình của hệ, thu được $\frac{6}{x} = 30 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ cũng tìm được $y = -\frac{1}{2}$.

b) HD. Đặt ẩn phụ. Đáp số $x = \frac{1}{2}$; $y = -4$.

28. Ta cần xét xem hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 3y = 20 & (1) \\ 3x - 5y = 11 & (2) \\ x + y = 9 & (3) \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất hay không.

Từ (3) rút ra $y = 9 - x$, thay vào (2) được

$$3x - 5(9 - x) = 11 \Leftrightarrow 8x = 56 \Leftrightarrow x = 7.$$

Thay lại vào (3), tìm được $y = 2$.

Cặp số $(7 ; 2)$ thoả mãn đồng thời các phương trình (2) và (3). Dễ dàng kiểm tra thấy cặp số này cũng thoả mãn phương trình (1). Vậy hệ đang xét có nghiệm duy nhất $(7 ; 2)$, tức là ba đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm, có toạ độ $(7 ; 2)$.

29. Xét hệ

$$\begin{cases} 3x - y = -16 \\ 2x + y = 1. \end{cases}$$

Giải hệ này bằng phương pháp cộng đại số, ta được $x = -3$; $y = 7$. Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi cặp số $(-3 ; 7)$ thoả mãn phương trình

$$-2x + ay = a - 1, \text{ tức là } -2.(-3) + a.7 = a - 1 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{6}.$$

Vậy với $a = -\frac{7}{6}$ thì hệ đã cho có nghiệm, nghiệm đó là $(-3 ; 7)$.

30. – Xét trường hợp $x \geq 2$, ta có $|x-2| = x-2$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases} \text{(thoả mãn điều kiện).}$$

– Xét trường hợp $x < 2$, ta có $|x-2| = 2-x$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{(thoả mãn).}$$

Hệ đã cho có hai nghiệm $(8 ; 5)$ và $(0 ; 1)$.

31. a) Thay $x = \sqrt{2} ; y = -\sqrt{2}$ vào hệ, ta có

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} + \sqrt{2}a = b \\ \sqrt{2}a - \sqrt{2}b = 1. \end{cases}$$

Giải ra, ta được $a = -\frac{5}{2}\left(\sqrt{2}+2\right) ; b = -\left(5 + 3\sqrt{2}\right)$.

b) Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(ay + b) \\ ax + by = 1. \end{cases}$$

Thay biểu thức của x vào phương trình thứ hai, ta được

$$a.\frac{1}{2}(ay + b) + by = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{2} + b\right)y = 1 - \frac{ab}{2}.$$

Hệ đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{a^2}{2} + b = 0 \\ 1 - \frac{ab}{2} = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này bằng phương pháp thế, tìm được $a = -\sqrt[3]{4} ; b = -\sqrt[3]{2}$.

32. Giả sử mỗi quả táo nặng x (kg), mỗi quả thanh long nặng y (kg) ($x > 0$, $y > 0$). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 15x + 8y = 7,1 \\ 5x - 3y = 0,1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, tìm được $x = 0,26 ; y = 0,40$ (thoả mãn điều kiện). Vậy mỗi quả táo nặng 0,26kg ; mỗi quả thanh long nặng 0,40kg.

33. Gọi số ô tô là x, số mô tô là y ($x, y \in \mathbf{N}$).

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 4x + 2y = 430. \end{cases}$$

Giải hệ tìm được x = 65 ; y = 85.

Trả lời : Số ô tô là 65 chiếc, số mô tô là 85 chiếc.

34. Đổi đơn vị : $600cm^3 = 0,6dm^3$.

Gọi khối lượng riêng của nhôm là x(kg/dm^3), khối lượng riêng của sắt là y (kg/dm^3).

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 0,6x + 1,5y = 13,32 \\ x = y - 5,1. \end{cases}$$

Dùng phương pháp thế, tìm được y = 7,8 ; x = 2,7.

Trả lời : Khối lượng riêng của nhôm là $2,7kg/dm^3$.

35. Gọi chữ số hàng chục là x, chữ số hàng đơn vị là y ($x, y \in \mathbf{N}^*$; $1 \le x, y \le 9$). Giá trị của số cần tìm là $\overline{xy} = 10x + y$, giá trị của số viết theo thứ tự ngược lại là $\overline{yx} = 10y + x$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10y + x = \dfrac{2}{9}(10x + y). \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, tìm được x = 8 ; y = 1.

Trả lời : Số cần tìm là 81.

36. Gọi đáy nhỏ của hình thang là x, đáy lớn là y (đơn vị : cm, $y > x > 0$). Theo giả thiết và công thức tính diện tích hình thang, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y - x = 15 \\ \dfrac{(x + y).8}{2} = 140. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, tìm được x = 10 ; y = 25.

Trả lời : Đáy nhỏ của hình thang là 10cm, đáy lớn là 25cm.

37. Gọi vận tốc người thứ nhất là x (km/h) ; Vận tốc người thứ hai là y (km/h).

Cho đến lúc gặp nhau (sau 4 giờ), người thứ nhất đi được 4x (km), người thứ hai đi được 4y (km).

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x + 4y = 38 \\ 4x - 4y = 2. \end{cases}$$

Giải hệ trên bằng phương pháp cộng đại số, tìm được $x = 5$; $y = 4,5$.

Trả lời : Vận tốc người thứ nhất là 5km/h, người thứ hai là 4,5km/h.

38. Gọi vận tốc thật của ca nô là x (km/h), vận tốc của dòng nước là t (km/h) $(x > t > 0)$.

Khi đi xuôi dòng, vận tốc của ca nô là $x + t$ (km/h), khi đi ngược dòng, vận tốc của ca nô là $x - t$ (km/h). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3(x + t) + 4(x - t) = 380 \\ (x + t) + \dfrac{1}{2}(x - t) = 85. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, tìm được $x = 55$; $t = 5$.

Trả lời : Vận tốc thật của canô là 55km/h, vận tốc dòng nước là 5km/h.

39. Gọi tuổi hiện nay của anh là x, tuổi hiện nay của em là y $(x, y \in \mathbf{N}^*)$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2 = 2(y - 2) \\ x - 8 = 5(y - 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 5y = -32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ 3y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 10 \end{cases} \text{(thoả mãn điều kiện).}$$

Trả lời : Hiện nay anh 18 tuổi, em 10 tuổi.

40. Gọi số sách ở ngăn dưới, ngăn giữa, ngăn trên lần lượt là x, y, z (quyển), (x, y, z nguyên dương). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{10}{100}x \\ y = z + \dfrac{30}{100}z \\ x - z = 80 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} y = \dfrac{11}{10}x & (1) \\ y = \dfrac{13}{10}z & (2) \\ x - z = 80 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $11x = 13z \Rightarrow x = \dfrac{13}{11}z$.

Thay vào (3) được $\dfrac{13}{11}z - z = 80 \Leftrightarrow 2z = 880 \Leftrightarrow z = 440$.

Từ đó tìm được $x = 520$; $y = 572$.

Trả lời : Số sách ở ngăn dưới, ngăn giữa và ngăn trên lần lượt là 520 ; 572 và 440 quyển.

41. Gọi vận tốc dòng nước là x (km/h), vận tốc thật của canô là y(km/h). Điều kiện : $y > x > 0$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{108}{y+x} + \dfrac{63}{y-x} = 7 \\ \dfrac{81}{y+x} + \dfrac{84}{y-x} = 7. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ $\dfrac{1}{y+x} = u$; $\dfrac{1}{y-x} = v$,

tìm được $x = 3$; $y = 24$.

Trả lời : Vận tốc thật của canô là 24km/h, vận tốc dòng nước là 3km/h.

42. Gọi x là vận tốc xe máy lúc lên dốc, y là vận tốc xe máy lúc xuống dốc ($y > x > 0$).

Thời gian đi (tính theo giờ) từ bản A đến trạm xá là $\dfrac{3}{x} + \dfrac{12}{18} + \dfrac{6}{y}$, thời gian đi

từ trạm xá về bản là $\dfrac{6}{x} + \dfrac{12}{18} + \dfrac{3}{y}$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{12}{18} + \dfrac{6}{y} = 1\dfrac{7}{60} \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{12}{18} + \dfrac{3}{y} = 1\dfrac{16}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{27}{60} \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{36}{60} \end{cases}$$

Giải hệ bằng cách đặt ẩn phụ, tìm được $x = 12$; $y = 30$.

Trả lời : Vận tốc xe máy lúc lên dốc là 12km/h, lúc xuống dốc là 30km/h.

Chương 4

HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Chủ đề 1

HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số $y = ax^2$ được xác định với mọi giá trị của $x \in \mathbf{R}$.

2. Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2$ *nghịch biến khi $x < 0$* và *đồng biến khi $x > 0$.*

Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2$ *đồng biến khi $x < 0$* và *nghịch biến khi $x > 0$.*

3. Nếu $a > 0$ thì $y > 0$ với mọi $x \neq 0$; $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$.

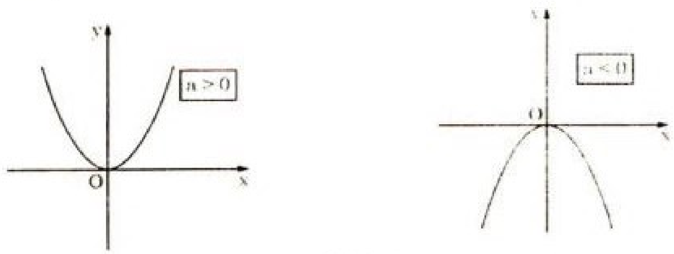
Nếu $a < 0$ thì $y < 0$ với mọi $x \neq 0$; $y = 0$ khi $x = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 0$.

4. Khi ta cho x hai giá trị là hai số đối nhau thì hai giá trị tương ứng của hàm số $y = ax^2$ bằng nhau.

5. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một đường cong đi qua gốc toạ độ, nhận trục Oy làm trục đối xứng, được gọi là một *parabol* và O là đỉnh của nó .

Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.



Hình 4.1

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
SO SÁNH CÁC GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

I. Phương pháp giải

– Xét dấu của hệ số a.

– Xem các giá trị đang xét của đối số x nằm trong khoảng đồng biến hay nghịch biến.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Xét hàm số $y = f(x) = 4x^2$, m và n là hai số thực thoả mãn $0 < m < n$. Trong mỗi cặp số sau đây, số nào lớn hơn?

a) f(m) và f(n);

b) f(m) và f(−m);

c) f(−m) và f(−n);

d) f(−n) và f(n)?

Giải

a) Vì $4 > 0$, hàm số đồng biến khi $x > 0$ nên $f(m) < f(n)$.

b) Theo tính chất của hàm số ta có $f(m) = f(-m)$.

c) Từ $0 < m < n$ suy ra $-n < -m < 0$. Vì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ nên $f(-n) > f(-m)$.

d) Theo tính chất của hàm số ta có $f(-n) = f(n)$.

Ví dụ 2: Cho hình lập phương có cạnh bằng x cm. Gọi S là diện tích toàn phần của hình lập phương.

a) Tính S theo x.

b) S thay đổi như thế nào khi x tăng, khi x giảm?

c) Khi x tăng ba lần thì S tăng hay giảm mấy lần?

Giải

a) Mỗi mặt của hình lập phương là một hình vuông với cạnh có độ dài bằng x cm nên diện tích mỗi mặt là x^2 (cm^2). Vì hình lập phương có 6 mặt bằng nhau nên $S = 6x^2 (cm^2)$.

b) $S = 6x^2$ là một hàm số dạng $y = ax^2$, với $a = 6 > 0$. Hàm số này đồng biến khi $x > 0$. Vì x là độ dài nên $x > 0$. Do đó khi x tăng thì S cũng tăng, x giảm thì S cũng giảm.

c) Giả sử đã cho a là độ dài của cạnh hình lập phương. Khi đó S có giá trị tương ứng là $S_1 = 6a^2$. Khi cạnh hình lập phương tăng lên 3 lần, ta có cạnh hình lập phương mới là 3a. Khi đó giá trị tương ứng của S là

$$S_2 = 6(3a)^2 = 6.9a^2 = 9.(6a^2) = 9S_1.$$

Vậy khi x tăng lên 3 lần thì S tăng lên 9 lần.

Nhận xét. Một cách tổng quát, dễ dàng chứng minh được khi cạnh hình lập phương tăng (hay giảm) k lần (k nguyên dương), thì diện tích toàn phần của nó tăng (hay giảm) k^2 lần.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của x thoả mãn điều kiện $-3 \le x \le -1$, ta đều có $f(-3) \le -2x^2 \le f(-1)$. Suy ra rằng khi x biến đổi thoả mãn điều kiện trên thì y có giá trị bé nhất là -18 và giá trị lớn nhất là -2.

b) Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của y khi x biến đổi thoả mãn điều kiện $-3 \le x \le 1$.

c) Tìm GTLN và GTNN của y khi x biến đổi thoả mãn điều kiện $-3 \le x \le 4$.

Giải

a) Vì $a = -2 < 0$ nên hàm số đồng biến khi $x < 0$. Do đó

$$f(-3) \le f(x) \le f(-1) \text{ hay } -2(-3)^2 \le f(x) \le -2(-1)^2.$$

Vậy $-18 \le f(x) \le -2$. Điều này chứng tỏ rằng khi x biến đổi thoả mãn điều kiện $-3 \le x \le -1$ thì y có GTNN là -18 và GTLN là -2.

b) Vì $-3 < 0 < 1$ và $a = -2 < 0$ nên hàm số $y = -2x^2$ có GTLN là $y = 0$.

Khi $x < 0$, hàm số đồng biến nên với mọi x thoả mãn điều kiện $-3 \le x \le 0$,

ta có $\quad f(-3) \le f(x) \le f(0)$ hay $-18 \le f(x) \le 0$.

Khi $x > 0$, hàm số nghịch biến nên với mọi x thoả mãn điều kiện $0 \le x \le 1$,

ta có $\quad f(0) \ge f(x) \ge f(1)$ hay $0 \ge f(x) \ge -2 > -18$.

Vậy khi x biến đổi thoả mãn điều kiện $-3 \le x \le 1$ thì y có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -18.

c) Lập luận tương tự như phần b), vì $-3 < 0 < 4$ và $a = -2 < 0$ nên hàm số $y = -2x^2$ có giá trị lớn nhất là $y = 0$. Khi $x > 0$, hàm số nghịch biến nên với mọi x thoả mãn điều kiện $0 \le x \le 4$ thì $f(0) \ge f(x) \ge f(4)$ hay $0 \ge f(x) \ge -2.4^2 = -32$.

Vì $-32 < -18$ nên khi x biến đổi thoả mãn điều kiện $-3 \le x \le 4$ thì y có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -32.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = (1-3k)x^2$, $k \neq \frac{1}{3}$. Hãy điền Đ (đúng) hoặc S (sai) vào ô vuông bên cạnh mệnh đề tương ứng:

(A) Nếu $k < \frac{1}{3}$ thì hàm số đồng biến khi $x > 0$ ☐

(B) Nếu $k > \frac{1}{3}$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ ☐

(C) Nếu $k < \frac{1}{3}$ thì hàm số nghịch biến khi $x > 0$ ☐

(D) Nếu $k > \frac{1}{3}$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ ☐

Giải

Nếu $k < \frac{1}{3}$ thì $1 - 3k > 0$, do đó hàm số đồng biến khi $x > 0$, nghịch biến khi $x < 0$.

Nếu $k > \frac{1}{3}$ thì $1 - 3k < 0$, do đó hàm số đồng biến khi $x < 0$, nghịch biến khi $x > 0$.

Vậy (A) và (D) đúng; (B) và (C) sai.

III. Bài tập

1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^2$.

a) Tính $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

b) Tìm các giá trị của x, biết rằng $y = \frac{1}{27}$. Cũng câu hỏi tương tự với $y = 5$.

c) Biết $f(x_1) > f(x_2)$. Hãy so sánh x_1 và x_2 trong mỗi trường hợp sau:

– x_1, x_2 là những số dương.

– x_1, x_2 là những số âm.

2. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$. Biết rằng $x = -2$ thì $y = -\frac{4}{3}$.

a) Tìm hệ số a.

b) Tính f(−1,5), f(0,5).

c) Biết rằng x_1, x_2 là những số âm và $x_1 < x_2$. Hãy so sánh $f(x_1)$ và $f(x_2)$.

d) Biết rằng $x_1 < 0 < x_2$ và $f(x_1) > f(x_2)$. Hãy so sánh $|x_1|$ và $|x_2|$.

3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$. Biết rằng khi x = 5 thì $y = \frac{75}{2}$.

a) Tính giá trị của y khi x = −3.

b) Tìm các giá trị của x khi y = 15.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y khi x biến đổi thoả mãn điều kiện $-4 \le x \le 2$.

4. Cho góc vuông xOy với tia phân giác Ot. Đường thẳng d chuyển động và luôn vuông góc với Ot, cắt Ox và Oy lần lượt tại A và B. Đặt OA = x (cm).

a) Biểu diễn diện tích S của tam giác OAB theo x.

b) Hỏi khi x = 10cm thì diện tích tam giác OAB bằng bao nhiêu?

c) Giả sử diện tích của tam giác OAB bằng $100cm^2$. Tính khoảng cách từ O đến d.

Dạng 2
ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

I. Phương pháp giải

Muốn vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$, ta cho x một số giá trị, chẳng hạn −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, rồi tính các giá trị tương ứng của y và viết chúng trong một bảng như sau:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9a	4a	a	0	a	4a	9a

Mỗi cặp số trong từng cột xác định một điểm của đồ thị (với một giá trị cụ thể của a). Nối các điểm này theo thứ tự ta được phác hoạ đồ thị hàm số.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

a) Đồ thị hàm số nằm phía trên hay phía dưới trục hoành?

b) Điền các giá trị tương ứng của y vào bảng sau:

x	− 6	−4	−2	−1	0	1	2	4	6
y									

c) Vẽ đồ thị của hàm số.

d) Cho các điểm M, N thuộc đồ thị, có hoành độ lần lượt bằng −4 và 4. Tìm tung độ của M và N. Có nhận xét gì về vị trí của M và N đối với trục Oy?

e) Trên đồ thị có bao nhiêu điểm mà tung độ bằng 3. Tìm hoành độ của chúng.

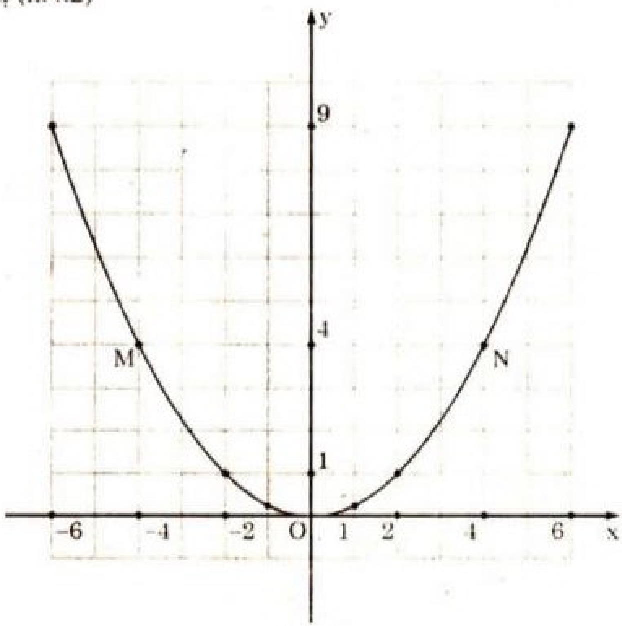
Giải

a) Vì $a = \frac{1}{4} > 0$ nên đồ thị của hàm số đã cho nằm phía trên trục hoành.

b) Ta có bảng sau:

x	− 6	−4	−2	−1	0	1	2	4	6
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

c) Đồ thị (h.4.2)



Hình 4.2

d) (h.4.2) vì M thuộc đồ thị và có hoành độ bằng −4 nên có tung độ

$y = f(-4) = \frac{1}{4}(-4)^2 = 4$. Tương tự, tung độ của N là

$y = f(4) = \frac{1}{4}.4^2 = 4$. Hai điểm M và N đối xứng nhau qua Oy.

e) Giả sử điểm cần tìm có tung độ y = 3 và hoành độ là x. Vì điểm đó thuộc đồ thị nên $3 = y = \frac{1}{4}x^2$. Suy ra $x^2 = 12$. Do đó $x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$.

Vậy có hai điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng 3 là

$E_1(-2\sqrt{3}\ ;\ 3)$ và $E_2(2\sqrt{3}\ ;\ 3)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = ax^2$. Điểm A(2; −2) thuộc đồ thị.

a) Xác định hệ số a.

b) Vẽ đồ thị của hàm số.

c) Dựa vào đồ thị và dùng thước kẻ để xác định điểm B trên đồ thị, biết rằng hoành độ của B là −3. Ước lượng giá trị tung độ của B. Sau đó tính giá trị tung độ của B để so sánh với giá trị ước lượng.

d) Dùng thước kẻ để xác định các điểm C_1, C_2 trên đồ thị, biết rằng tung độ của chúng là −6. Dùng thước kẻ để xác định vị trí các điểm biểu diễn hoành độ của C_1, C_2. Ước lượng giá trị của các hoành độ này. Sau đó tính các hoành độ ấy để so sánh với các giá trị ước lượng.

e) Dựa vào đồ thị, hãy chỉ rõ giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của y khi x nhận các giá trị từ −3 đến 2.

Giải

a) Vì A(2; −2) thuộc đồ thị nên toạ độ của nó thoả mãn phương trình

$y = ax^2$; nghĩa là $-2 = a.2^2 = 4a$. Suy ra $a = -\frac{1}{2}$.

b) Lập bảng

x	−4	−2	−1	0	1	2	4
y	−8	−2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−2	−8

c) Theo hình vẽ (h.4.3) có thể ước lượng tung độ của B gần bằng −4,5.

Điểm B thuộc đồ thị có hoành độ là −3 thì tung độ của nó là

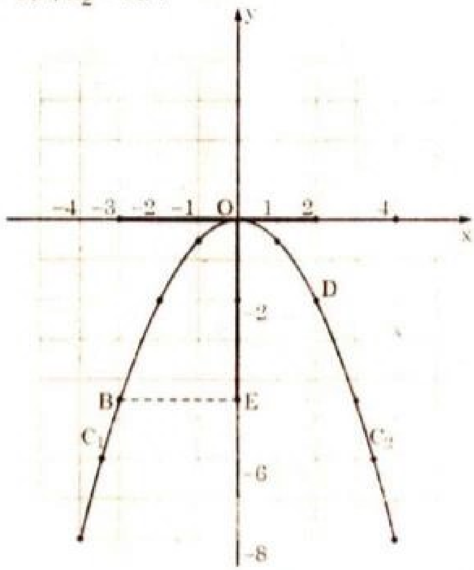
$y = -\frac{1}{2}.(-3) = -\frac{9}{2}$.

Như vậy, sự ước lượng khá chính xác.

d) Gọi hoành độ của C_1 và C_2 lần lượt là x_1 và x_2.

Theo hình vẽ có thể ước lượng

$$x_1 \approx -3,5; x_2 \approx 3,5.$$



Hình 4.3

Nếu các điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng –6 thì hoành độ của chúng phải thoả mãn điều kiện $-6 = -\frac{1}{2}x^2$. Suy ra $x^2 = 12$. Do đó

$$x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}.$$ Vậy $C_1(2\sqrt{3}; -6)$, $C_2(-2\sqrt{3}; -6)$; $(2\sqrt{3} \approx 3,5)$.

e) Căn cứ vào các đoạn tô đậm trên hai trục, ta thấy khi x tăng dần từ –3 đến 2 thì giá trị lớn nhất của y bằng 0 (đạt tại x = 0) và giá trị nhỏ nhất của y bằng $-\frac{9}{2}$ (đạt tại x = –3).

Lưu ý. Ta cũng nói hàm số đạt GTLN bằng 0 và GTNN bằng $-\frac{9}{2}$ trên đoạn [–3;2].

III. Bài tập

5. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Những điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số đã cho:

$$A(5;\ 10),\ B(-2;\ 4),\ C(11;\ 100),\ D\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right),\ E\left(2\sqrt{3};\ 12\right)?$$

c) Tìm GTLN và GTNN của hàm số trên đoạn $[-2;1]$.

6. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$. Biết rằng điểm $A(1;\ 2)$ thuộc đồ thị của hàm số.

a) Xác định hệ số a.

b) Điểm $B\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$ có thuộc đồ thị của hàm số đã cho hay không?

c) Không cần làm tính, hãy tìm thêm 3 điểm của đồ thị, rồi vẽ đồ thị.

d) Tìm GTLN và GTNN của hàm số trên đoạn $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$.

7. Cho hàm số $y = -2x^2$.

a) Biết rằng khi x thay đổi và luôn luôn dương thì y tăng dần từ -8 đến 2. Hỏi x tăng hay giảm và từ giá trị nào đến giá trị nào? Trên trục Ox, hãy tô đậm đoạn thẳng mà hai đầu mút là hai điểm biểu diễn hai giá trị vừa tìm được.

b) Biết rằng khi x thay đổi nhưng không đổi dấu thì y giảm dần từ -2 đến -8. Hỏi x tăng hay giảm và từ giá trị nào đến giá trị nào?

8. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$.

b) Tìm điều kiện để hai điểm $M(x;\ y)$ và $M'(x';\ y')$ đối xứng với nhau qua Ox.

c) Áp dụng kết quả của câu b), trong mặt phẳng toạ độ chứa đồ thị $y = \frac{3}{2}x^2$, hãy căn cứ vào đồ thị ấy để vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{3}{2}x^2$.

Chủ đề 2

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

trong đó x là ẩn số, a, b, c là những số cho trước (hệ số) và $a \neq 0$.

2. Các trường hợp đặc biệt:

– $c = 0$: $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{b}{a}. \end{array}\right.$

– $b = 0$: $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{c}{a}$.

Nếu $-\dfrac{c}{a} > 0$ thì $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

Nếu $-\dfrac{c}{a} < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

3. Công thức nghiệm

a) Đối với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$:

– Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};$$

– Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$;

– Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Đối với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$:

– Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a};\ x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a};$$

– Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$;

– Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Lưu ý. Nếu a và c trái dấu thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, luôn luôn có hai nghiệm phân biệt.

4. Tương giao giữa đồ thị hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ và đường thẳng $y = kx + b$:

Parabol $y = ax^2$ và đường thẳng $y = kx + b$ có điểm chung khi và chỉ khi phương trình $ax^2 = kx + b$ (*) có nghiệm (gọi là *phương trình tương giao*). Nghiệm của (*) là hoành độ điểm chung.

Parabol $y = ax^2$ và đường thẳng $y = kx + b$ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép

5. Định lí Vi-ét

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. (1)

– Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Hệ quả

– Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{c}{a}.$$

– Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm

$$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{c}{a}.$$

– Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $ac < 0$.

– Nếu hai số u và v thoả mãn $u + v = S$, $uv = P$ $(S^2 \geq 4P)$, thì hai số đó là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM. TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. Phương pháp giải

– Xác định các hệ số a, b, c trong phương trình, đặc biệt chú ý đến hệ số a. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là phương trình bậc hai chỉ khi $a \neq 0$.

– Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

– Xét dấu của biệt thức để kết luận sự tồn tại nghiệm hoặc áp dụng công thức để viết nghiệm.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng phương trình $2x^2 - (1 - 2a)x + a - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của a.

Giải

Xét phương trình $2x^2 - (1 - 2a)x + a - 1 = 0$.

$$\Delta = (1 - 2a)^2 - 4.2.(a - 1) = 4a^2 - 12a + 9 = (2a - 3)^2.$$

Vì $\Delta \geq 0$ với mọi a nên phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi a.

Ví dụ 2: Xác định các hệ số a, b, c rồi giải phương trình:

a) $3x^2 - 8x + 7 = 0$; b) $-5x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$;

c) $4x^2 + 7x + \frac{49}{16} = 0$.

Giải

a) $a = 3$, $b = -8$, $c = 7$.

$\Delta = (-8)^2 - 4.3.7 = 64 - 84 = -20$; $\Delta < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

b) $a = -5$, $b = -\sqrt{3}$, $c = 1$.

$$\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4.(-5).1 = 3 + 20 = 23;\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{23};$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{23}}{2.(-5)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{23}}{-10} = -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{23}}{10}.$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{23}}{2.(-5)} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{23}}{-10} = -\frac{\sqrt{3} - \sqrt{23}}{10}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{23}}{10}, \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{3} - \sqrt{23}}{10}.$$

Chú ý. Thông thường, để tránh phải làm tính chia với số âm, ta nên biến đổi phương trình đã cho thành phương trình có hệ số $a > 0$. Chẳng hạn:

$$-5x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0.$$

$$\Delta = (\sqrt{3})^2 - 4.5.(-1) = 3 + 20 = 23;\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{23};$$

Ta cũng tìm được hai nghiệm như trên.

c) $a = 4$, $b = 7$, $c = \frac{49}{16}$.

Để tránh phải làm tính với phân số, ta có thể đổi phương trình này thành phương trình có các hệ số nguyên:

$$4x^2 + 7x + \frac{49}{16} = 0 \Leftrightarrow 64x^2 + 112x + 49 = 0.$$

$$\Delta = 112^2 - 4.64.49 = 0.$$

Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{7}{2.4} = -\frac{7}{8}$.

Ví dụ 3: Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (2). Tìm các giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt;

b) Có nghiệm kép;

c) Vô nghiệm;

d) Có đúng một nghiệm.

Giải

– Nếu $m = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $2x - 3 = 0$. Đó là một phương trình bậc nhất, nó chỉ có một nghiệm là $x = \frac{3}{2}$.

– Xét $m \neq 0$. Khi đó phương trình đã cho là một phương trình bậc hai, có các hệ số:

$$a = m,\ b = -2(m-1),\ c = m - 3.$$

$$\Delta = [-2(m-1)]^2 - 4.m.(m-3) = 4(m^2 - 2m + 1) - (4m^2 - 12m)$$

$$= 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 12m = 4m + 4.$$

$\Delta \geq 0$ khi $4m \geq -4$ hay $m \geq -1$.

Vậy:

a) Với $m > -1$ và $m \neq 0$ thì $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt;

b) Với $m = -1$ thì $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép;

c) Với $m < -1$ thì $\Delta < 0$, phương trình vô nghiệm.

d) Với $m = 0$ hoặc $m = -1$ thì phương trình có đúng một nghiệm.

Chú ý. Nếu xét điều kiện để phương trình (2) có nghiệm, ta phải xét trước hết trường hợp $m = 0$. Sau đó mới xét điều kiện $\Delta \geq 0$. Khi $m \neq 0$ phương trình (2) mới là phương trình bậc hai.

Ví dụ 4: Tìm giá trị của m để phương trình

$$3x^2 + 2(m-3)x + 2m + 1 = 0$$

có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.

Giải

$$\Delta' = (m-3)^2 - 3(2m+1) = m^2 - 6m + 9 - 6m - 3 = m^2 - 12m + 6.$$

Phương trình đã cho có nghiệm kép khi $\Delta' = m^2 - 12m + 6 = 0$.

$$\Leftrightarrow m_1 = 6 + \sqrt{30}, \qquad m_2 = 6 - \sqrt{30}.$$

– Khi $m = 6 + \sqrt{30}$, phương trình đã cho có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = -\frac{m-3}{3} = -\frac{6+\sqrt{30}-3}{3} = -\frac{3+\sqrt{30}}{3}.$$

– Khi $m = 6 - \sqrt{30}$, phương trình đã cho có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = -\frac{m-3}{3} = -\frac{6-\sqrt{30}-3}{3} = -\frac{3-\sqrt{30}}{3}.$$

III. Bài tập

9. Xác định các hệ số a, b, c, tính biệt thức Δ rồi tìm nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; b) $x^2 + 10x + 38 = 0$;

c) $3x^2 + 8x - 2 = 0$; d) $-4x^2 + 9x + 13 = 0$.

10. Xác định các hệ số a, b, c, rồi giải phương trình:

a) $3x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$;

b) $\sqrt{3}x^2 - (5 + \sqrt{3})x + 5 = 0$;

c) $\sqrt{3}x^2 + 2(\sqrt{3} - 3)x - 6 + 4\sqrt{3} = 0$.

11. Đối với mỗi phương trình sau, hãy tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó:

a) $3x^2 + (m-2)x + 1 = 0$; b) $x^2 - 2mx - m + 1 = 0$.

12. Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm rồi giải phương trình:

$$x^2 - mx - 1 = 0.$$

13. Chứng minh rằng

a) Phương trình $x^2 - 2(m+4)x + 2m + 6 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Phương trình

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

luôn có nghiệm với mọi a, b, c. Khi nào phương trình có nghiệm kép?

14. Tìm các giá trị của x để giá trị của hai biểu thức bằng nhau:

a) $x^2 + 2x + 2$ và $-2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$;

b) $2x^2 - 3x + 2\sqrt{2}$ và $x^2 + x - 1$;

c) $5x^2 + 2\sqrt{3}x$ và $4x^2 + 4x + 8\sqrt{3}$.

15. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m + 1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt và đối nhau? Tìm hai nghiệm đối nhau đó.

16. Với giá trị nào của m thì phương trình

$$mx^2 - 4(m - 1)x + 4m + 8 = 0$$

a) Có nghiệm;

b) Có nghiệm kép;

c) Có đúng một nghiệm.

Dạng 2
XÉT TÍNH CHẤT CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. Phương pháp giải

– Áp dụng định lí Vi-ét đối với phương trình bậc hai.

– Sử dụng các hằng đẳng thức và một số biến đổi quen thuộc.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích hai nghiệm của các phương trình (nếu có):

a) $4x^2 + 7x + 2 = 0$; b) $-3x^2 + x + 1 = 0$;

c) $3x^2 - x + 1 = 0$; d) $x^2 + (m - 2)x - m = 0$.

Giải

a) Vì $\Delta = 49 - 32 = 17 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.
Theo định lí Vi-ét:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{4}, x_1x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

b) Vì phương trình có a và c trái dấu nên nó có hai nghiệm phân biệt. Theo định lí Vi-ét:

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}, x_1x_2 = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

c) Vì $\Delta = (-1)^2 - 4.3.1 = -11 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

d) Vì $\Delta = (m-2)^2 - 4.1.(-m) = m^2 - 4m + 4 + 4m = m^2 + 4 > 0$ với mọi m nên phương trình có hai nghiệm.

$$x_1 + x_2 = -(m-2) = 2 - m,\ x_1x_2 = -m.$$

Ví dụ 2: Tìm giá trị của m để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt trái dấu:

a) $x^2 - 3mx - 3m - 1 = 0$. b) $x^2 - 7x + m^2 - 8 = 0$.

Giải

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu

$$\Leftrightarrow ac = -3m - 1 < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}.$$

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac = m^2 - 8 < 0$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}.$$

Ví dụ 3: Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 14 và tích của chúng bằng 3.

Giải

Nếu hai số này tồn tại thì chúng là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - 14x + 3 = 0.$$

Giải phương trình:

$$\Delta' = 7^2 - 1.3 = 49 - 3 = 46;\ \sqrt{\Delta'} = \sqrt{46};$$

$$x_1 = 7 + \sqrt{46},\ x_2 = 7 - \sqrt{46}.$$

Vậy hai số cần tìm là $7 + \sqrt{46}$ và $7 - \sqrt{46}$.

Ví dụ 4: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m = 0$.

a) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Kí hiệu hai nghiệm của phương trình là x_1, x_2. Tính $x_1^2 + x_2^2$, $|x_1^2 - x_2^2|$ theo m.

Giải

a) $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 - m = m^2 + 2m + 1 - m^2 - m = m + 1$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m + 1 > 0$ hay $m > -1$.

b) Theo định lí Vi-ét,

$$x_1 + x_2 = 2(m+1),\ x_1x_2 = m^2 + m.$$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$= [2(m+1)]^2 - 2(m^2 + m) = 4m^2 + 8m + 4 - 2m^2 - 2m$$

$$= 2m^2 + 6m + 4.$$

Ta lại có $\left|x_1^2 - x_2^2\right| = |x_1 + x_2|.|x_1 - x_2| = |x_1 + x_2|\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$

$$= |2(m+1)|\sqrt{4(m+1)^2 - 4(m^2+m)} = 4|m+1|\sqrt{m+1} = 4(m+1)\sqrt{m+1}.$$

Ví dụ 5: Tìm các giá trị của tham số m để các nghiệm x_1, x_2 của phương trình

$x^2 + (m-2)x + m + 5 = 0$ thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Giải

Điều kiện có nghiệm: $\Delta = (m-2)^2 - 4(m+5) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 16 \geq 0$ (*).

Từ phương trình $x^2 + (m-2)x + m + 5 = 0$, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - m \\ x_1x_2 = m + 5. \end{cases} \quad (1)$$

Theo giả thiết $x_1^2 + x_2^2 = 10$. (2)

Cần tìm các giá trị của m để các nghiệm x_1, x_2 của phương trình đã cho thoả mãn (1) và (2).

Ta có (2) $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow (2-m)^2 - 2(m+5) = 10$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m - 16 = 0.$

Giải phương trình với ẩn m

$\Delta' = 3^2 - (-16) = 25;$

$$m_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 3 + 5 = 8; \; m_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = 3 - 5 = -2.$$

Thay $m_1 = 8$ và $m_2 = -2$ vào (*), ta thấy chỉ có $m_2 = -2$ thoả mãn.

Vậy $m = -2$. thì phương trình đã cho có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Ví dụ 6: Giả sử m và n là các nghiệm của phương trình

$x^2 + 5x - 8 = 0$ (1)

Hãy lập phương trình bậc hai có các nghiệm là

$$x_1 = \frac{m}{n+1} \text{ và } x_2 = \frac{n}{m+1}.$$

Giải

Hiển nhiên m, n đều khác -1 vì -1 không thoả mãn phương trình (1).

Áp dụng hệ thức Vi-ét cho phương trình (1) ta được:

$$m + n = -5; \; mn = -8$$

suy ra $m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = 25 + 16 = 41$.

Ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{m}{n+1} + \frac{n}{m+1} = \frac{m^2 + n^2 + m + n}{mn + m + n + 1} = \frac{41 - 5}{-8 - 5 + 1} = -3.$$

$$x_1 x_2 = \frac{m}{n+1} \cdot \frac{n}{m+1} = \frac{mn}{mn + m + n + 1} = \frac{-8}{-8 - 5 + 1} = \frac{2}{3}.$$

Vậy phương trình phải lập là

$$x^2 + 3x + \frac{2}{3} = 0 \text{ hay } 3x^2 + 9x + 2 = 0.$$

III. Bài tập

17. Không giải phương trình, hãy tìm tổng và tích hai nghiệm của mỗi phương trình sau (nếu có):

a) $17x^2 - 2x - 3 = 0$; b) $8x^2 + 6x + 1 = 0$;

c) $9x^2 - 2x + 5 = 0$.

18. Xét tổng a + b + c hoặc a − b + c rồi tính nhẩm các nghiệm của các phương trình

a) $15x^2 - 17x + 2 = 0$; b) $30x^2 - 4x - 34 = 0$;

c) $2\sqrt{3}x^2 + 2(5 - \sqrt{3})x - 10 = 0$.

19. a) Chứng tỏ rằng 5 là một nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 35 = 0$. Hãy tìm nghiệm kia.

b) Chứng tỏ rằng −4 là một nghiệm của phương trình $x^2 + 8x + 16 = 0$. Hãy tìm nghiệm kia.

20. a) Tìm giá trị của m để phương trình $x^2 + 3mx - 108 = 0$ có một nghiệm là 6. Tìm nghiệm kia.

b) Tìm giá trị của m để phương trình $mx^2 - 3(m + 1)x + m^2 - 13m - 4 = 0$ có một nghiệm là −2. Tìm nghiệm kia.

21. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 15$, $uv = 36$; b) $u + v = 4$, $uv = 7$;

c) $u + v = 9$, $uv = -90$; d) $u^2 - v^2 = 9$; $uv = 20$.

22. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là hai số cho trước trong mỗi trường hợp sau:

a) 7 và -11; b) $\frac{1}{2}$ và $\frac{2}{3}$;

c) $1+\sqrt{5}$ và $1-\sqrt{5}$.

23. Giả sử phương trình $x^2+5x-3m=0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2.

a) Hãy lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm là $2x_1$ và $2x_2$.

b) Hãy lập một phương trình có hai nghiệm là $\frac{2}{x_1^2}$ và $\frac{2}{x_2^2}$.

24. Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+m=0$. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm mà tổng của chúng bằng tích của chúng.

25. Cho phương trình $x^2+kx+18=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1-x_2=3$. Hãy tìm k.

26. Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2-2\sqrt{3}x+1=0$.
Không giải phương trình, hãy tính:

a) $x_1^2x_2+x_2^2x_1$; b) $x_1^3+x_2^3$.

27. Tìm hai số u và v, biết $u^2+v^2=13$ và $uv=6$.

28. Cho phương trình $x^2-(2m+3)x+m=0$.

a) Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi m.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị của m để $x_1^2+x_2^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Dạng 3
GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. Phương pháp giải

1. Giải phương trình trùng phương $ax^4+bx^2+c=0$ $(a\neq 0)$:

– Đặt $x^2=t$, $t\geq 0$;

– Giải phương trình $at^2+bt+c=0$ tìm t;

– Với mỗi giá trị không âm của t, giải phương trình $x^2=t$ để tìm x.

2. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

– Đặt điều kiện cho ẩn để các mẫu thức khác 0;

– Quy đồng mẫu, khử mẫu;

– Giải phương trình vừa tìm được;

– Chọn các giá trị của ẩn thoả mãn điều kiện đặt ra rồi kết luận.

3. Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ khác

Chọn biểu thức thích hợp đặt làm ẩn phụ, biểu diễn các biểu thức khác qua ẩn phụ đó, đưa phương trình đã cho về phương trình bậc hai đối với ẩn phụ. Giải phương trình tìm ẩn phụ rồi suy ra ẩn ban đầu.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $2x^4 + 7x^2 + 5 = 0$; b) $3x^4 - 5x^2 - 28 = 0$;

c) $4x^4 - 25x^2 + 6 = 0$.

Giải

Các phương trình đã cho đều là phương trình trùng phương.

Đặt $x^2 = t$, $t \geq 0$.

a) Phương trình $2x^4 + 7x^2 + 5 = 0$ trở thành: $2t^2 + 7t + 5 = 0$.

Vì $2 - 7 + 5 = 0$ nên ta tìm được $t = -1$ hoặc $t = -\frac{5}{2}$. Hai giá trị này của t bị loại vì không thoả mãn điều kiện $t \geq 0$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Phương trình $3x^4 - 5x^2 - 28 = 0$ trở thành $3t^2 - 5t - 28 = 0$.

$$\Delta = 25 + 336 = 361; \ \sqrt{\Delta} = 19.$$

$$t = \frac{5+19}{6} = 4 \text{ hoặc } t = \frac{5-19}{6} = -\frac{7}{3} \text{ (loại)}.$$

Với $t = 4$, ta có $x^2 = 4$.

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

c) Phương trình $4x^4 - 25x^2 + 6 = 0$ trở thành $4t^2 - 25t + 6 = 0$.

$$\Delta = 625 - 96 = 529; \ \sqrt{\Delta} = 23.$$

$$t = \frac{25+23}{8} = 6 \text{ hoặc } t = \frac{25-23}{8} = \frac{1}{4}.$$

– Với $t = 6$, ta có $x^2 = 6$ hay $x = \pm\sqrt{6}$.

– Với $t = \frac{1}{4}$, ta có $x^2 = \frac{1}{4}$ hay $x = \pm\frac{1}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\sqrt{6}; \sqrt{6}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}.$$

Giải

Điều kiện: $x \neq -2$, $x \neq 3$.

Khử mẫu thức và biến đổi ta được phương trình

$$x^2 - 3x + 5 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Vì $1 - 4 + 3 = 0$ nên ta tìm được: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Vì $x = 3$ không thoả mãn điều kiện trên nên phương trình đã cho chỉ có một nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 3: Giải phương trình $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24 = 0$.

Giải

Phương trình đã cho có thể viết thành:

$$[(x + 1)(x + 4)][(x + 2)(x + 3)] - 24 = 0$$

hay $$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24 = 0.$$

Đặt $t = x^2 + 5x + 4$, ta có $x^2 + 5x + 6 = t + 2$ và

$$t(t + 2) - 24 = 0 \text{ hay } t^2 + 2t - 24 = 0.$$

$$\Delta' = 1 + 24 = 25;\ \sqrt{\Delta'} = 5.$$

$$t_1 = -1 + 5 = 4,\ t_2 = -1 - 5 = -6.$$

– Với $t_1 = 4$, ta có: $x^2 + 5x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x + 5) = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm $x_1 = 0$, $x_2 = -5$.

– Với $t_2 = -6$, ta có: $x^2 + 5x + 4 = -6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$.

$$\Delta = 25 - 40 < 0.$$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $\{0; -5\}$.

Ví dụ 4: Giải phương trình

$$3x^2 - 14|x| - 5 = 0. \qquad (1)$$

Giải

Dùng phương pháp đặt ẩn phụ:

Đặt $y = |x| \geq 0$, ta có: $3y^2 - 14y - 5 = 0.$ (2)

Phương trình (2) có hai nghiệm: $y_1 = -\frac{1}{3}$ (loại), $y_2 = 5$.

Với $y = 5$, ta có $|x| = 5$.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm: $x = \pm 5$.

Ví dụ 5: Giải phương trình

$$3x^2 + 2x - 34 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = 0. \quad (1)$$

Giải

Ta có $3x^2 + 2x - 34 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 34 = 0$.

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$3(y^2 - 2) + 2y - 34 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 + 2y - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 = -4;\ y_2 = \frac{10}{3}.$$

Với $y = -4$ thì $x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$.

Với $y = \frac{10}{3}$ thì $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{3};\ x_4 = 3$.

Phương trình có tập nghiệm là $\{-2 \pm \sqrt{3};\ \frac{1}{3};\ 3\}$.

III. Bài tập

29. Giải các phương trình sau:

a) $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$;

b) $5x^4 - 9x^2 = 0$;

c) $3x^4 - x^2 - 234 = 0$;

d) $11x^4 + 3x - 2 = 3x - 15x^2 - 6$.

30. Giải các phương trình sau:

a) $(x - 1)^3 + 3x - 2 = x^3 - x^2 + x - 1$;

b) $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 3x + 2$;

c) $(x^2 + x)^2 + (x + 1)^2 = 2(x + 1)^3 - 4x + 4$;

31. Đưa về phương trình tích rồi giải các phương trình:

a) $(2x+3)^2 - 10x - 15 = 0$; b) $x^2(x+1) - 3x = 3x^2 - 2x - 2$;

c) $(x^2 - x - 1)^2 = (2x+1)^2$.

32. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{2x+3}{(x-1)(x+2)}$; b) $\dfrac{2x+22}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{x-4}{x+2}$;

c) $\dfrac{3x^2-15x}{x^2-9} = x - \dfrac{x}{x-3}$.

33. Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

a) $(x^2-2x)^2 + 4x^2 - 8x + 3 = 0$; b) $(x^2-5x+2)(x^2-5x+1) = 6$;

c) $\left(x^2 - \dfrac{6}{x^2}\right)^2 + 6\left(x^2 - \dfrac{6}{x^2}\right) = -5$; d) $x^2 - 2x + 3\sqrt{x^2-2x+4} = 6$.

34. Giải các phương trình:

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + x + \dfrac{1}{x} = 4$; b) $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} = -\dfrac{5}{2}$;

35. Giải các phương trình:

a) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$; b) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 8$.

Dạng 4
XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA PARABOL $y = ax^2$ VÀ ĐƯỜNG THẲNG $y = kx + b$

I. Phương pháp giải

Để xét vị trí tương đối giữa parabol $y = ax^2$ và đường thẳng $y = kx + b$, ta lập phương trình $ax^2 = kx + b$ hay $ax^2 - kx - b = 0$. Số nghiệm của phương trình này chính bằng số điểm chung của hai đồ thị.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d có phương trình $y = mx + 1$.

a) Chứng minh rằng với mọi m, đường thẳng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Tìm giá trị của m để tam giác OAB có diện tích bằng 3.

Giải

Xét phương trình tương giao $x^2 = mx + 1$ hay $x^2 - mx - 1 = 0$.

a) Vì a, c trái dấu nên $\Delta > 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt. Do đó d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B mà $x_A < 0 < x_B$.

b) Gọi I là giao của d và trục Oy, ta có I(0; 1). Vì $x_A < 0 < x_B$ nên I thuộc đoạn AB.

$$S_{AOB} = S_{OAI} + S_{OIB} = \frac{|x_A|.OI + |x_B|.OI}{2} = \frac{|x_A| + |x_B|}{2}$$

$$= \frac{x_B - x_A}{2} = \frac{\sqrt{m^2+4}}{1} = \sqrt{m^2+4}.$$

Vì $S_{AOB} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+4} = 3 \Leftrightarrow m^2 = 5 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5}$.

Ví dụ 2: a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính toạ độ hai điểm này khi $m = \frac{3}{2}$.

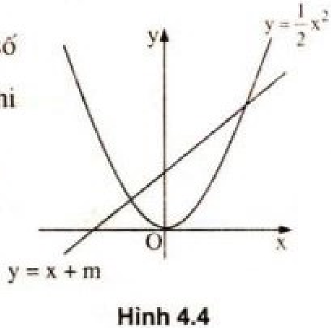
Giải

a) Đồ thị như hình bên.

b) Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $\frac{1}{2}x^2 = x + m$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 1 + 2m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.



Hình 4.4

Khi $m = \frac{3}{2}$ phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là -1 và 3.

– Với $x = -1$ thì $y = \frac{1}{2}$, suy ra $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

– Với $x = 3$ thì $y = \frac{9}{2}$, suy ra $B\left(3; \frac{9}{2}\right)$.

Ví dụ 3: Cho parabol (P): $y = ax^2$ và đường thẳng d: $y = kx + 3$.

a) Xác định các hệ số a và k, biết parabol và đường thẳng có một điểm chung là A(3; 18).

b) Từ kết quả câu a), hãy tìm giao điểm thứ hai (nếu có) của (P) và d.

Giải

a) Từ giả thiết suy ra điểm A(3; 18) thuộc (P) và d, do đó ta có:

$$\begin{cases} 18 = 9a \\ 18 = 3k + 3. \end{cases}$$

Vậy a = 2 và k = 5.

b) Ta có hoành độ giao điểm của (P) và d là nghiệm của phương trình

$2x^2 = 5x + 3$ hay $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

$\Delta = 5^2 - 4.2.(-3) = 49$,

$$x_1 = \frac{5+7}{4} = 3;\ x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}.$$

x_1 chính là hoành độ điểm A, với $x_2 = -\frac{1}{2}$ ta có $y_2 = 2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Vậy giao điểm thứ hai của (P) và (d) là $B\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x) = (m-2)x^2$ $(m \neq 2)$.

a) Xác định m để hàm số nghịch biến $\forall x > 0$.

b) Xác định m để hàm số đi qua điểm M(−2; − 4).

c) Xác định m để đường thẳng $y = 2x + 1$

– Không cắt đồ thị hàm số:

– Tiếp xúc với đồ thị của hàm số. Tìm toạ độ tiếp điểm.

Giải

a) Hàm số có dạng $y = ax^2$. Hàm số nghịch biến $\forall x > 0$ khi và chỉ khi $a < 0$, tức là $m - 2 < 0$. Vậy $m < 2$.

b) Để đồ thị hàm số đi qua M(−2; − 4) thì

$$-4 = (m-2)(-2)^2 \Leftrightarrow m - 2 = -1 \Leftrightarrow m = 1.$$

c) Số giao điểm của parabol đã cho và đường thẳng $y = 2x + 1$ là số nghiệm của phương trình $(m-2)x^2 = 2x + 1$ hay $(m-2)x^2 - 2x - 1 = 0$. (*)

Ta có $\Delta' = 1 + m - 2 = m - 1$.

– Đường thẳng không cắt parabol $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

– Đường thẳng tiếp xúc với parabol $\Leftrightarrow \Delta' = 0$ hay $m = 1$. Khi đó phương trình (*) có nghiệm kép $x_0 = -1$, suy ra tiếp điểm là $(-1; -1)$.

III. Bài tập

36. Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng d: $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

a) Vẽ (P) và d trên cùng một hệ trục toạ độ.

b) Gọi A, B là hai giao điểm của (P) và d. Tính diện tích tam giác OAB.

37. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị là parabol (P).

a) Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm A và B thuộc (P), biết $x_A = -2$; $x_B = 4$;

b) Xác định toạ độ điểm $M \in (P)$, biết đường thẳng tiếp xúc với (P) tại M song song với đường thẳng AB.

38. Cho đường thẳng d có phương trình: $y = -\frac{2(m-1)}{m-2}x + 2 = 0$, $m \neq 2$.

a) Tìm m để đường thẳng d cắt parabol $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Tìm toạ độ trung điểm của AB theo m.

39. Cho parabol (P): $y = mx^2$ và đường thẳng (d): $y = nx + 4$. Xác định m, n để (P) và (d) tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x = -2$.

40. Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = mx + n$.

Xác định các hệ số m và n để đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 0)$ và tiếp xúc với parabol. Tìm toạ độ của tiếp điểm.

Dạng 5
GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. Phương pháp giải

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình:

1. Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn;

2. Lập phương trình:

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết qua ẩn và các đại lượng đã biết;

– Dựa vào mối liên hệ giữa các đại lượng để lập phương trình;

3. Giải phương trình;

4. Trả lời: Chọn kết quả thích hợp và trả lời.

II. Ví dụ

Ví dụ 1: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $720m^2$. Nếu tăng chiều dài thêm 6m, giảm chiều rộng đi 4m thì diện tích mảnh vườn không thay đổi. Tính các kích thước của mảnh vườn.

Giải

– Gọi chiều dài mảnh vườn là x (m) (x > 0), khi đó chiều rộng mảnh vườn là $\frac{720}{x}(m)$.

Chiều dài và chiều rộng mảnh vườn sau khi thay đổi lần lượt là x + 6 (m) và $\frac{720}{x} - 4(m)$.

Diện tích mới của mảnh vườn là $(x+6)\left(\frac{720}{x} - 4\right)(m^2)$.

Theo giả thiết ta có phương trình

$$(x+6)\left(\frac{720}{x} - 4\right) = 720.$$

– Giải phương trình: Biến đổi phương trình thành

$$720 - 4x + \frac{4320}{x} - 24 = 720 \Leftrightarrow 4x^2 + 24x - 4320 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 1080 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 30$ (thoả mãn), $x_2 = -36$ (loại).

Với x = 30 ta có $\frac{720}{x} = \frac{720}{30} = 24$.

– Vậy chiều dài của mảnh vườn là 30m, chiều rộng là 24m.

Ví dụ 2: Hà Nội cách Nam Định 90km. Hai ôtô khởi hành đồng thời, một xe từ Hà Nội, xe kia từ Nam Định và đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ chúng gặp nhau. Tiếp tục đi, xe thứ hai tới Hà Nội trước khi xe thứ nhất tới Nam Định là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Giải

Đổi: 27 phút = $\frac{9}{20}$ giờ

Gọi vận tốc của xe thứ nhất (đi từ Hà Nội) là x (km/h). Vì sau 1 giờ hai xe gặp nhau nên tổng quãng đường đi được của hai xe trong 1 giờ là 90 km, tức tổng vận tốc của hai xe là 90 km/h. Do đó vận tốc của xe thứ hai là $90 - x$ (km/h) ($x < 90$).

Quãng đường mà xe thứ nhất phải đi tiếp là $(90 - x)$ km. Vì thế, thời gian xe thứ nhất đi tiếp để tới Nam Định là $\frac{90-x}{x}$(giờ).

Thời gian xe thứ hai đi tiếp để tới Hà Nội là $\frac{x}{90-x}$(giờ).

Ta có phương trình $\frac{90-x}{x} - \frac{x}{90-x} = \frac{9}{20}$ hay

$$x^2 - 490x + 18000 = 0.$$

Giải phương trình tìm được $x_1 = 450$, $x_2 = 40$.

Vì $x_2 = 450 > 90$ nên chỉ có giá trị $x_1 = 40$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời: Vận tốc của xe thứ nhất là 40 km/h;

Vận tốc của xe thứ hai là 50 km/h.

Ví dụ 3: Hai đội công nhân cùng làm một quãng đường thì 12 ngày xong việc. Nếu một đội làm một mình hết nửa công việc, rồi đội thứ hai tiếp tục một mình làm nốt phần việc còn lại thì hết tất cả 25 ngày. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong việc?

Giải

Gọi thời gian đội thứ nhất làm xong nửa công việc là x (ngày). $2x > 12$ và $x < 25$, hay $6 < x < 25$.

Thời gian đội thứ hai làm xong nửa công việc là $25 - x$ (ngày).

Trong 1 ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{2x}$ (công việc); đội thứ hai làm được $\frac{1}{2(25-x)}$ (công việc).

Trong 1 ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{12}$ (công việc).

Ta có phương trình $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(25-x)}=\frac{1}{12}$ hay $x^2-25x+150=0$.

Giải phương trình: $\Delta = 625 - 600 = 25$;

$$x_1 = \frac{25+5}{2} = 15,\ x_2 = \frac{25-5}{2} = 10.$$

Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời: Đội thứ nhất làm một mình trong 20 ngày thì xong việc;

Đội thứ hai làm một mình trong 30 ngày thì xong việc;

hoặc: Đội thứ nhất làm một mình trong 30 ngày thì xong việc;

Đội thứ hai làm một mình trong 20 ngày thì xong việc.

III. Bài tập

41. Một phòng họp có một số dãy ghế, tổng cộng 40 chỗ. Do phải xếp 55 chỗ nên người ta kê thêm 1 dãy và mỗi dãy xếp thêm 1 chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế trong phòng?

42. Tìm một số có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng đơn vị bé hơn chữ số hàng chục là 2, tổng các bình phương của hai chữ số bé hơn số đã cho là 19.

43. Hai phân xưởng cơ khí được giao làm 240 sản phẩm trong một thời gian quy định. Mỗi ngày phân xưởng I sản xuất được nhiều hơn phân xưởng II là 8 sản phẩm và đã hoàn thành công việc sớm hơn thời gian quy định là 3 ngày và sớm hơn phân xưởng II là 1 ngày. Hỏi thời gian quy định là bao nhiêu ngày?

44. Tính các cạnh góc vuông của một tam giác vuông biết hiệu của chúng bằng 4m và diện tích tam giác bằng $48m^2$.

45. Một ô tô đi từ A đến B theo dự tính mất 5 giờ. Nhưng khi đi được 56km nó dừng lại 10 phút. Để đến B đúng thời gian dự tính, ô tô phải tăng vận tốc thêm 2km/h. Tính khoảng cách AB.

46. Hai dung dịch muối có khối lượng tổng cộng bằng 220kg. Lượng muối trong dung dịch I là 5kg, lượng muối trong dung dịch II là 4,8kg. Biết nồng độ muối trong dung dịch I nhiều hơn nồng độ muối trong dung dịch II là 1%. Tính khối lượng mỗi dung dịch nói trên.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

CHỦ ĐỀ 1

1. a) $f(-3) = 3$, $f(-1) = \frac{1}{3}$, $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{3}$, $f(3) = 3$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$.

b) $\frac{1}{27} = y = \frac{1}{3}x^2$. Suy ra $x^2 = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$. Vậy $x = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$.

c) Vì $a = \frac{1}{3} > 0$ nên hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.

Do đó :

– Khi x_1 và x_2 cùng dương thì từ $f(x_1) > f(x_2)$ suy ra $x_1 > x_2$.

– Khi x_1 và x_2 cùng âm thì từ $f(x_1) > f(x_2)$ suy ra $x_1 < x_2$.

2. a) Theo giả thiết, $a(-2)^2 = y = -\frac{4}{3}$ hay $4a = -\frac{4}{3}$. Suy ra $a = -\frac{1}{3}$.

b) $f(-1,5) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{3}.\frac{9}{4} = -\frac{3}{4}$;

$$f(0,5) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{3}.\frac{1}{4} = -\frac{1}{12}.$$

c) Vì $a = -\frac{1}{3} < 0$ nên hàm số đồng biến khi $x < 0$. Do đó từ $x_1 < x_2 < 0$ suy ra $f(x_1) < f(x_2)$.

d) Vì $|x_1|, |x_2|$ cùng dương và hàm số nghịch biến khi $x > 0$ nên từ

$$f(|x_1|) = f(x_1) > f(x_2) = f(|x_2|) \text{ suy ra } |x_1| < |x_2|.$$

3. a) Theo giả thiết, $a.5^2 = y = \frac{75}{2}$ hay $25a = \frac{75}{2}$. Suy ra $a = \frac{3}{2}$. Do đó, khi $x = -3$ thì $y = \frac{3}{2}.(-3)^2 = \frac{27}{2}$.

b) Khi $y = 15$, ta có $\frac{3}{2}x^2 = 15$. Do đó $x^2 = 10$.

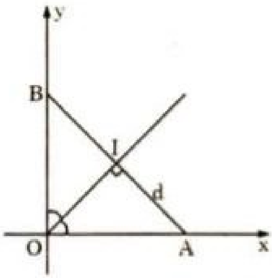
Vậy $x = \pm\sqrt{10}$.

c) Vì $a = \frac{3}{2} > 0$ nên $y = 0$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số và hàm số nghịch biến khi $x < 0$, đồng biến khi $x > 0$. Do đó:

Khi $-4 \le x \le 0$ thì $f(-4) = \frac{3}{2}.(-4)^2 = 24 \ge f(x) \ge f(0) = 0$;

Khi $0 \le x \le 2$ thì $0 = f(0) \le f(x) \le f(2) = \frac{3}{2}.2^2 = 6$.

Vậy khi x biến đổi, thoả mãn điều kiện $-4 \le x \le 2$ thì giá trị nhỏ nhất của y bằng 0 và giá trị lớn nhất của y bằng 24.



Hình 4.5

4. a) Dễ thấy ΔOAB vuông cân tại O nên $S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}x^2\ (cm^2)$ (h.4.4).

b) Khi x = 10cm thì $S = \frac{1}{2}.10^2 = 50(cm^2)$.

c) $S = 100cm^2$ tức là $\frac{1}{2}x^2 = 100$ thì $x^2 = 200$. Suy ra $x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

Vì tam giác OAB vuông cân nên OI là phân giác đồng thời là đường trung tuyến. Do đó

$$OI = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{OA^2 + OB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(10\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2.200} = 10\ (cm).$$

Vậy khoảng cách từ O đến đường thẳng d là 10 cm.

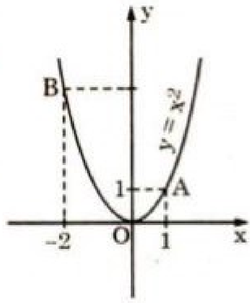
5. a) Đồ thị (h.4.6).

b) Vì $f(5) = 25 \ne 10$ nên A không thuộc đồ thị.

Tương tự, $f(-2) = (-2)^2 = 4$, $f(11) = (11)^2 = 121 \ne 100$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, $f\left(2\sqrt{3}\right) = 12$ nên các điểm B, D, E thuộc đồ thị, còn các điểm A và C không thuộc đồ thị.

c) Nhờ đồ thị ta thấy hàm số đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$.

Trên đoạn $[-2\ ;\ 1]$, điểm cao nhất của đồ thị là B, điểm thấp nhất của đồ thị là O. Vậy hàm số có GTLN bằng 4 và GTNN bằng 0.



Hình 4.6

6. a) Vì $2 = f(1) = a.1^2$ nên $a = 2$.

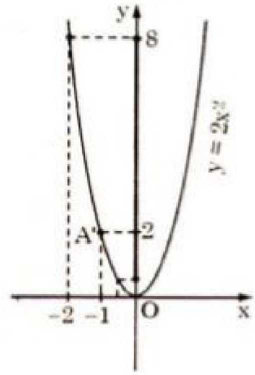
b) $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$. Vậy điểm B thuộc đồ thị.

c) Có thể chọn ngay 3 điểm sau đây :

O(0 ; 0), A'(−1 ; 2) và B'$\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$ lần lượt đối xứng với A và B qua Oy.

Đồ thị (h.4.7).

d) Hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$, do đó nó đạt GTLN bằng 8 tại x = −2 và đạt GTNN bằng $2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ tại $x=-\frac{1}{2}$.



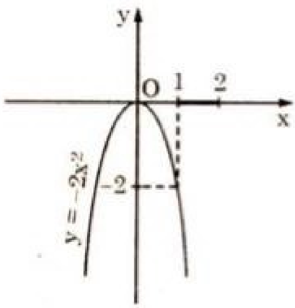
Hình 4.7

7. a) Vì hàm số $y=-2x^2$ có hệ số $a=-2<0$, nên khi $x>0$ thì hàm số nghịch biến. Do đó khi y tăng từ − 8 đến −2 thì x giảm. Ta có $-8=f(x_1)=-2x_1^2$ và $-2=f(x_2)=-2x_2^2$. Từ đó suy ra $x_1=2$ và $x_2=1$ (vì theo giả thiết $x_1>0$, $x_2>0$). Vậy x giảm từ 2 đến 1 (h.4.8).

b) Lập luận tương tự câu a).

– Nếu x luôn luôn dương thì x tăng từ 1 đến 2.

– Nếu x luôn luôn âm thì x giảm từ −1 đến −2, vì hàm số đồng biến khi $x<0$.



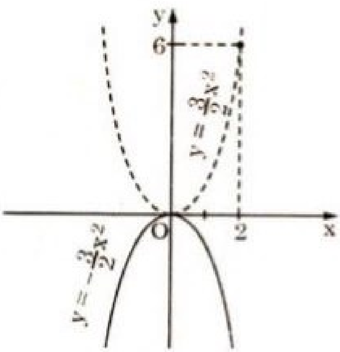
Hình 4.8

8. a) Lập bảng rồi vẽ đồ thị (h.4.9).

x	−2	−1	0	1	2
y	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6

b) Hai điểm M(x ; y) và M'(x' ; y') đối xứng với nhau qua Ox khi x' = x và y' = − y.

c) Để vẽ đồ thị của hàm số $y=-\frac{3}{2}x^2$, ta chỉ cần lấy những điểm đối xứng với các điểm đã chọn khi vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{3}{2}x^2$. (Đồ thị hàm số $y=-\frac{3}{2}x^2$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=\frac{3}{2}x^2$ qua trục hoành).



Hình 4.9

$$m_1 = \frac{4+4\sqrt{3}}{2} = 2+2\sqrt{3}, \; m_2 = \frac{4-4\sqrt{3}}{2} = 2-2\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình có nghiệm kép khi $m = 2 \pm 2\sqrt{3}$.

– Khi $m = 2+2\sqrt{3}$, phương trình có nghiệm kép là

$$x_1 = x_2 = -\frac{m-2}{2.3} = -\frac{2+2\sqrt{3}-2}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

– Khi $m = 2 - 2\sqrt{3}$, phương trình có nghiệm kép là

$$x_1 = x_2 = -\frac{m-2}{2.3} = -\frac{2-2\sqrt{3}-2}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) $\Delta = (-2m)^2 - 4.(-m+1) = 4m^2 + 4m - 4$.

Phương trình có nghiệm kép khi $\Delta = 4m^2 + 4m - 4 = 0$.

Giải ra ta được

$$m_1 = \frac{-4+4\sqrt{5}}{2.4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \; m_2 = \frac{-4-4\sqrt{5}}{2.4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm kép khi $m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

– Khi $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, phương trình có nghiệm kép là

$$x_1 = x_2 = m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

– Khi $m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, phương trình có nghiệm kép là

$$x_1 = x_2 = m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

24. $\Delta = m^2 - 4.(-1) = m^2 + 4 > 0$.

Vậy với mọi giá trị của m, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt :

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2+4}}{2}.$$

25. a) Ta có $\Delta' = (m+4)^2 - (2m+6) = m^2 + 6m + 10 = (m+3)^2 + 1 > 0$ với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Biến đổi phương trình thành

$$3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0.$$

Ta có

$$\Delta' = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$
$$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$$

Vậy phương trình luôn có nghiệm.

Phương trình có nghiệm kép khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = b = c$.

26. a) $x^2 + 2x + 2 = -2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + 2(1+\sqrt{2})x + 2 + 2\sqrt{2} = 0$.

$\Delta' = 1$; $x_1 = -1 - \sqrt{2} + 1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = -1 - \sqrt{2} - 1 = -2 - \sqrt{2}$.

b) $2x^2 - 3x + 2\sqrt{2} = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 + 2\sqrt{2} = 0$.

$\Delta' = 3 - 2\sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = (\sqrt{2} - 1)^2$.

$x_1 = 2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 2 - \sqrt{2} + 1 = 3 - \sqrt{2}$.

c) $5x^2 + 2\sqrt{3}x = 4x^2 + 4x + 8\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 - 2(2-\sqrt{3})x - 8\sqrt{3} = 0$.

$\Delta' = (2-\sqrt{3})^2 + 8\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$.

$x_1 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$, $x_2 = 2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$.

27. Phương trình có hai nghiệm đối nhau khi :

$$4m = 0 \text{ và } (m+1)(4m-1) < 0$$

hay khi $m = 0$ và $1(-1) < 0$.

Vậy với $m = 0$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm đối nhau.

Khi $m = 0$, phương trình đã cho trở thành $x^2 - 1 = 0$ hay $x^2 = 1$.

Hai nghiệm của phương trình là $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

28. – Nếu $m = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $4x + 8 = 0$. Đó là một phương trình bậc nhất, có nghiệm $x = -2$.

– Xét $m \neq 0$, phương trình đã cho là một phương trình bậc hai.

Ta có

$$\Delta' = [2(m-1)]^2 - m(4m+8) = -16m + 4 = 4(1-4m).$$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}.$$

Như vậy :

a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \le \frac{1}{4}$ (giá trị $m = 0$ thoả mãn).

b) Phương trình có nghiệm kép khi và chỉ khi $m = \frac{1}{4}$.

c) Phương trình có đúng một nghiệm khi và chỉ khi $m = \frac{1}{4}$ hoặc $m = 0$.

17. a) Vì a và c trái dấu nên phương trình có hai nghiệm. Khi đó

$x_1 + x_2 = \frac{2}{17}$, $x_1x_2 = -\frac{3}{17}$.

b) $\Delta' = 9 - 8 = 1 > 0$, phương trình có hai nghiệm và $x_1 + x_2 = -\frac{3}{4}$, $x_1x_2 = \frac{1}{8}$.

c) $\Delta' = 1 - 45 < 0$. Phương trình vô nghiệm.

18. a) $a + b + c = 0$: $x_1 = 1$. $x_2 = \frac{2}{15}$.

b) $a - b + c = 0$: $x_1 = -1$. $x_2 = -\frac{-34}{30} = \frac{17}{15}$.

c) $a + b + c = 0$: $x_1 = 1$. $x_2 = \frac{-10}{2\sqrt{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

19. a) $2.5^2 - 3.5 - 35 = 0$ nên 5 là một nghiệm của phương trình đã cho.

Nghiệm còn lại là, $x_2 = -\frac{35}{2.5} = -\frac{7}{2}$.

b) Tương tự, -4 là một nghiệm của phương trình đã cho. Nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{16}{-4} = -4$.

20. a) Vì $x_1 = 6$ là một nghiệm của phương trình nên $6^2 + 3m.6 - 108 = 0$. Suy ra $m = 4$; $x_2 = -18$.

b) Vì -2 là một nghiệm của phương trình nên

$$4m + 6m + 6 + m^2 - 13m - 4 = 0 \text{ hay } m^2 - 3m + 2 = 0.$$

Suy ra $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

– Khi $m = 1$ thì $x_2 = 8$.

– Khi $m = 2$ thì $x_2 = \frac{13}{2}$.

21. a) u và v là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 15x + 36 = 0$; $u = 12$, $v = 3$ hoặc $u = 3$, $v = 12$.

b) Vì $4^2 - 4.7 < 0$ nên không tồn tại u và v.

c) $u = -6$, $v = 15$ hoặc $u = 15$, $v = -6$.

d) Đặt $t = -v^2$, ta có $u^2 + t = 9$, $u^2t = -400$, suy ra $u^2 = 25$, $t = -16$.

Với $u^2 = 25$, ta có $u = \pm 5$. Vì $uv = 20$ nên ta có : $u = 5$, $v = 4$ hoặc $u = -5$, $v = -4$.

22. a) Vì $7 - 11 = -4$; $7.(-11) = -77$ nên 7 và -11 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 4x - 77 = 0$.

b) $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$ hay $6x^2 - 7x + 2 = 0$.

c) $x^2 - 2x - 4 = 0$.

23. a) Vì $x_1 + x_2 = -5$, $x_1x_2 = -3m$ nên $2x_1 + 2x_2 = -10$; $2x_1.2x_2 = -12m$. Do đó $2x_1$ và $2x_2$ là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 + 10x - 12m = 0.$$

b) Ta có

$$\frac{2}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} = \frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2x_2^2} = \frac{2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]}{(x_1x_2)^2} = \frac{2(25 + 6m)}{9m^2},$$

$$\frac{2}{x_1^2} \cdot \frac{2}{x_2^2} = \frac{4}{(x_1x_2)^2} = \frac{4}{9m^2}.$$

Vậy phương trình cần tìm là $x^2 - \frac{2(25 + 6m)}{9m^2}x + \frac{4}{9m^2} = 0$

hay $9m^2x^2 - 2(6m + 25)x + 4 = 0$.

24. Trước hết, phương trình có nghiệm khi

$$\Delta' = m^2 + 2m + 1 - m^2 - m = m + 1 \geq 0 \text{ hay } m \geq -1.$$

Khi đó

$$x_1 + x_2 = 2(m + 1),\ x_1x_2 = m^2 + m.$$

Tổng hai nghiệm bằng tích của chúng khi

$$2(m + 1) = m^2 + m \text{ hay } m^2 - m - 2 = 0.$$

Suy ra $m = -1$ hoặc $m = 2$ (thoả mãn điều kiện).

25. Điều kiện có nghiệm : $\Delta = k^2 - 4.18 \geq 0 \Leftrightarrow k^2 \geq 72$.

Ta có $(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 = 3^2 + 4.18 = 81$, suy ra $x_1 + x_2 = \pm 9$.

Vì $k = -(x_1 + x_2)$ nên $k = \pm 9$, thoả mãn điều kiện. Vậy $k = \pm 9$.

26. Ta có $\Delta' = 3 - 1 = 2 > 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

a) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = x_1x_2(x_1 + x_2) = 2\sqrt{3}$.

b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2]$

$$= 2\sqrt{3}\left[(2\sqrt{3})^2 - 1\right] = 22\sqrt{3}.$$

27. Từ giả thiết $u^2 + v^2 = 13$ và $uv = 6$, ta có

$$\begin{cases}(u+v)^2 - 2uv = 13\\ uv = 6,\end{cases}$$

suy ra $(u + v)^2 = 25$ hay $u + v = \pm 5$.

– Nếu $u + v = 5$ thì u, v là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + 6 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm là 2 và 3.

Do đó $u = 2$, $v = 3$ hoặc $u = 3$, $v = 2$.

– Nếu $u + v = -5$ thì u, v là hai nghiệm của phương trình $X^2 + 5X + 6 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm là -3 và -2.

Do đó $u = -3$, $v = -2$ hoặc $u = -2$, $v = -3$.

Vậy $u = 2$, $v = 3$ hoặc $u = 3$, $v = 2$ hoặc $u = -3$, $v = -2$ hoặc $u = -2$, $v = -3$.

28. a) Ta có $\Delta = (2m + 3)^2 - 4m = 4m^2 + 8m + 9 = 4(m + 1)^2 + 5 > 0$.

Vậy phương trình có nghiệm với mọi m.

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có

$$x_1 + x_2 = 2m + 3 ; x_1x_2 = m.$$

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$= 4m^2 + 12m + 9 - 2m = 4m^2 + 10m + 9$$

$$= \left(2m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}, \forall m.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $(x_1^2 + x_2^2)$ là $\frac{11}{4}$, đạt được khi $m = -\frac{5}{4}$.

29. Đặt $x^2 = t \geq 0$.

a) $t_1 = 1, t_2 = \frac{5}{2}$ suy ra $x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

b) ĐS : $x = 0, x = \pm\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

c) $t_1 = 9, t_2 = -\frac{26}{3}$ (loại) suy ra $x = \pm 3$.

d) Phương trình đã cho rút gọn lại $11x^4 + 15x^2 + 4 = 0$, dẫn đến

$$11t^2 + 15t + 4 = 0.$$

$$\Leftrightarrow t_1 = -1 \text{ (loại)}, t_2 = -\frac{4}{11} \text{ (loại)}.$$

Phương trình đã cho vô nghiệm.

30. a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x - 2 = x^3 - x^2 + x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$.

$x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$.

b) Vô nghiệm.

c) $(x^2 + x)^2 + (x + 1)^2 = 2(x + 1)^3 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

Đặt $t = x^2 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5$ $(t \geq 0) \Leftrightarrow t_1 = -1$ (loại); $t_2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

31. a) $(2x + 3)^2 - 10x - 15 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 - 5(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow (2x + 3)(2x + 3 - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)(2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ hoặc } x = 1.$$

b) $x^2(x + 1) - 3x = 3x^2 - 2x - 2 \Leftrightarrow x^2(x + 1) - 3x - 3x^2 + 2x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 3x + 2) = 0.$$

Phương trình có 3 nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$.

c) $(x^2 - x - 1)^2 = (2x + 1)^2 \Leftrightarrow (x^2 - x - 1)^2 - (2x + 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)(x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x + 1)(x^2 - 3x - 2) = 0.$$

Phương trình có 4 nghiệm :

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, x_4 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}.$$

32. a) Điều kiện : $x \neq -2$, $x \neq 1$.

Khử mẫu thức và biến đổi ta được $x^2 + 2x = -2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm : $x = -1$, $x = -3$.

b) Điều kiện : $x \neq -2$, $x \neq 1$.

Khử mẫu thức và biến đổi ta được $2x + 22 = x^2 - 5x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 18 = 0$.

$$\Leftrightarrow x_1 = 9 \text{ hoặc } x_2 = -2 \text{ (loại)}.$$

Vậy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm $x = 9$.

c) Điều kiện : $x \neq \pm 3$.

Khử mẫu và biến đổi ta được $3x^2 - 15x = x^3 - 9x - x^2 - 3x$

$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = 3$ (loại).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

33. a) $(x^2 - 2x)^2 + 4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) + 3 = 0$.

Đặt $x^2 - 2x = t$, ta có $t^2 + 4t + 3 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm : $t_1 = -1$, $t_2 = -3$.

– Với $t = -1$, ta có $x^2 - 2x = -1$ hay $x^2 - 2x + 1 = 0$. Phương trình có nghiệm kép $x = 1$.

– Với $t = -3$, ta có $x^2 - 2x = -3$ hay $x^2 - 2x + 3 = 0$. Phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm kép : $x = 1$.

b) Đặt $x^2 - 5x + 1 = t$, ta có $(t + 1)t = 6 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm : $t_1 = 2$, $t_2 = -3$.

– Với $t = -3$, ta có $x^2 - 5x + 1 = -3$ hay $x^2 - 5x + 4 = 0$. Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

– Với $t = 2$, ta có $x^2 - 5x + 1 = 2$ hay $x^2 - 5x - 1 = 0$. Phương trình có hai nghiệm :

$$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2},\ x_4 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}.$$

c) Điều kiện : $x \neq 0$.

Đặt $x^2 - \frac{6}{x^2} = t$, ta có $t^2 + 6t + 5 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = -1$, $t_2 = -5$.

– Với $t = -1$, ta có $x^2 - \frac{6}{x^2} = -1$. Suy ra $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm : $x = \pm\sqrt{2}$.

– Với $t = -5$, ta có $x^2 - \frac{6}{x^2} = -5$. Suy ra $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm : $x = \pm 1$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm : $\{-\sqrt{2} ; \sqrt{2} ; -1 ; 1\}$.

d) Đặt $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = t$ $(t > 0)$, ta có $t^2 + 3t - 10 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm : $t_1 = 2$, $t_2 = -5$ (loại).

Với $t = 2$, ta có $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$.

Phương trình có hai nghiệm : $x = 0$, $x = 2$.

34. a) Đặt $x + \frac{1}{x} = y$.

Đáp số : $1 ; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) Đặt $\frac{x^2 + 1}{x} = y$ ta có phương trình

$$y + \frac{1}{y} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2y^2 + 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Với $y = -2$ ta được $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Với $y = -\frac{1}{2}$ ta được $2x^2 + x + 2 = 0$, vô nghiệm.

35. a) HD. Đặt $x + 4 = y$, đưa về phương trình

$$(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 16.$$

Đáp số : $x_1 = -3$; $x_2 = -5$.

b) Biến đổi phương trình thành

$$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 8.$$

Đặt $x^2 + 3x + 1 = y$. Tìm được $y = \pm 3$.

Đáp số : $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

36. a) Bạn đọc tự vẽ.

b) Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm $x = 2$, $x = -4$.

Các giao điểm của (P) và d là A (2 ; 1) và B (–4 ; 4).

Hạ $AH \perp Ox$ và $BK \perp Ox$, ta có AH = 1; BK = 4; OH = 2; OK = 4.

$$S_{AOB} = S_{AHKB} - S_{OKB} - S_{OAH} = 6 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

37. a) Điểm $A \in (P)$ có $x_A = -2 \Rightarrow y_A = \frac{1}{4}x_A^2 = 1$.

Điểm $B \in (P)$ có $x_B = 4 \Rightarrow y_B = 4$.

Phương trình đường thẳng qua A(–2; 1) và B(4; 4) là:

$$y = \frac{1}{2}x + 2.$$

b) Phương trình đường thẳng song song với AB có dạng $y = \frac{1}{2}x + k$ (d).

Đường thẳng d tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ phương trình: $\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + k$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 4k = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-1}{4}$.

Hoành độ tiếp điểm M là nghiệm kép: $x_M = 1$. Khi đó $y_M = \frac{1}{4}.1^2 = \frac{1}{4}$.

Tiếp điểm là $M\left(1 ; \frac{1}{4}\right)$.

38. a) Xét hệ $\begin{cases} 2(m-1)x + (m-2)y = 2 \\ y = x^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow (m-2)x^2 + 2(m-1)x - 2 = 0 \qquad (1).$$

Để d cắt parabol $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-2 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \Delta' = m^2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > \sqrt{3} \text{ hoặc } m < -\sqrt{3}. \end{cases}$$

b) Gọi I là trung điểm của AB thì $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1-m}{m-2}$.

$$I \in (d) \Leftrightarrow 2(m-1)x_I + (m-2)y_I = 2$$

$$\Leftrightarrow 2(m-1).\frac{1-m}{m-2} + (m-2)y_I = 2 \Leftrightarrow y_I = \frac{2(m^2 - m - 1)}{(m-2)^2}.$$

39. Để (P) tiếp xúc với d tại điểm có hoành độ là $x = -2$ thì phương trình $mx^2 = nx + 4$ phải có nghiệm kép $x = -2$ hay phương trình $mx^2 - nx - 4 = 0$ có nghiệm kép $x = -2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(-2)^2 - n(-2) - 4 = 0 \\ n^2 + 4.4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 4 \end{cases}.$$

40. Đường thẳng $y = mx + n$ đi qua $A(-1\ ;\ 0) \Leftrightarrow 0 = m(-1) + n \Leftrightarrow n = m$.

Phương trình đường thẳng có dạng $y = mx + m$.

Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi phương trình

$$\frac{1}{2}x^2 = mx + m \quad (1)$$

có nghiệm kép.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - mx - m = 0$$

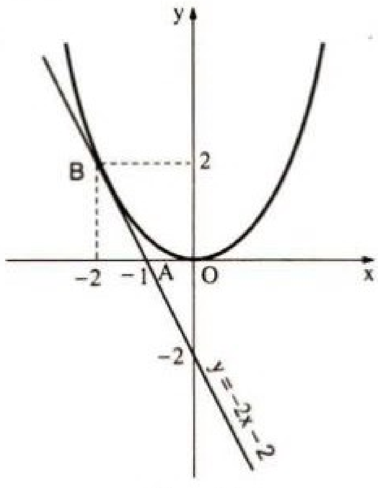
$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m = 0.$$

Điều kiện để (1) có nghiệm kép :

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m_1 = 0, m_2 = -2.$$



Hình 4.10

Với m = 0, đường thẳng là y = 0 (trục hoành), nghiệm kép của (1) là x = 0.

Ta có tiếp điểm là $O(0 ; 0)$. Với $m = -2$, tiếp tuyến có phương trình $y = -2x - 2$. Phương trình (1) có dạng $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Tiếp điểm là $B(-2 ; 2)$.

41. Gọi số dãy ghế trong phòng lúc đầu là x dãy (x nguyên dương). Mỗi dãy lúc đầu có $\dfrac{40}{x}$ chỗ.

Lúc sau, trong phòng có $x + 1$ dãy, mỗi dãy xếp $\dfrac{55}{x+1}$ chỗ.

Mỗi dãy ghế lúc sau nhiều hơn lúc đầu 1 chỗ nên có phương trình :

$$\frac{55}{x+1} - \frac{40}{x} = 1.$$

Giải phương trình

$$\frac{55}{x+1} - \frac{40}{x} = 1 \Leftrightarrow 55x - 40(x + 1) = x(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 55x - 40x - 40 = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 - 14x + 40 = 0$$

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = 10$; $x_2 = 4$.

Hai giá trị trên của x đều thoả mãn điều kiện của bài toán.

Vậy lúc đầu trong phòng có 4 dãy, mỗi dãy có 10 chỗ, hoặc có 10 dãy, mỗi dãy có 4 chỗ.

42. Gọi chữ số hàng đơn vị là x, $x \in \mathbf{N}$, $x \leq 9$.

Khi đó chữ số hàng chục là $x + 2$.

Tổng các bình phương của hai chữ số là $(x + 2)^2 + x^2$.

Số đã cho là $10(x + 2) + x$.

Theo đầu bài ta có phương trình $(x + 2)^2 + x^2 + 19 = 10(x + 2) + x$ hay

$$2x^2 - 7x + 3 = 0.$$

Giải phương trình tìm được hai nghiệm : $x_1 = 3$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

Vì x phải là số nguyên nên chữ số hàng đơn vị là 3.

Trả lời : Số phải tìm là 53.

43. Gọi thời gian quy định là x (ngày), $x > 0$.

Vì phân xưởng I làm xong trước thời hạn 3 ngày nên thực tế họ chỉ làm trong $x - 3$ (ngày).

Vì phân xưởng II xong sau phân xưởng I là 1 ngày nên thực tế họ chỉ làm trong x − 2 (ngày).

Do đó mỗi ngày phân xưởng I làm được $\dfrac{240}{x-3}$ (sản phẩm) ; phân xưởng II làm được $\dfrac{240}{x-2}$ (sản phẩm).

Vì mỗi ngày phân xưởng I làm được nhiều hơn phân xưởng II là 8 sản phẩm nên ta có phương trình :

$$\frac{240}{x-3} - \frac{240}{x-2} = 8 \text{ hay } x^2 - 5x - 24 = 0.$$

$$x_1 = 8,\ x_2 = -3 \text{ (loại)}.$$

Trả lời : Thời gian quy định là 8 ngày.

44. Gọi độ dài cạnh góc vuông nhỏ bằng x (mét) (x > 0).

Ta có phương trình

$$\frac{x(x+4)}{2} = 48$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 96 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -12 \text{ (loại)} ;\ x_2 = 8.$$

Đáp số : 8m và 12m.

45. *Cách 1.* Gọi khoảng cách AB là x (km), x > 0.

Vận tốc dự định là $\dfrac{x}{5}$ (giờ).

Thời gian đi 56km đầu tiên là $\dfrac{56.5}{x} = \dfrac{280}{x}$ (giờ).

Vì xe dừng lại 10 phút (hay $\dfrac{1}{6}$ giờ) nên thời gian phải đi trên quãng đường còn lại là $5 - \dfrac{1}{6} - \dfrac{280}{x} = \dfrac{29x - 1680}{6x}$.

Vận tốc đi trên quãng đường còn lại là $\dfrac{6x(x-56)}{29x-1680}$.

Theo đầu bài ta có phương trình

$$\frac{6x(x-56)}{29x-1680} = \frac{x}{5} + 2 \text{ hay } x^2 - 290x + 16800 = 0.$$

Giải phương trình ta được : $x_1 = 210$, $x_2 = 80$.

Trả lời : Khoảng cách AB là : 210km hoặc 80km.

Lưu ý. Có thể tìm khoảng cách gián tiếp qua vận tốc.

Gọi vận tốc dự định là x (km/h), $x > 0$.

Khoảng cách AB là 5x (km).

Thời gian đi 56km đầu tiên là $\frac{56}{x}$ (giờ).

Vận tốc đi quãng đường còn lại là $x + 2$ (km/h).

Thời gian đi quãng đường còn lại là $\frac{5x-56}{x+2}$ (giờ).

Theo đầu bài ta có phương trình :

$$\frac{56}{x} + \frac{1}{6} + \frac{5x-56}{x+2} = 5$$

hay $x^2 - 58x + 672 = 0$.

Giải phương trình ta được $x_1 = 42$, $x_2 = 16$.

Trả lời : Khoảng cách AB là 42. 5 = 210 (km) hoặc 16. 5 = 80 (km).

46. Gọi khối lượng dung dịch I là x (kg) thì khối lượng dung dịch II là $220 - x$ (kg) $(0 < x < 220)$.

Ta có phương trình $\frac{5}{x} - \frac{4,8}{220-x} = \frac{1}{100}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1200x + 110000 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1100 \text{ (loại)} ; x_2 = 100.$$

Đáp số : Khối lượng dung dịch I là 100kg,

Khối lượng dung dịch II là 120kg.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

BÀI TẬP

1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{8+2\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \dfrac{7-2\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;

b) $B = \left(\dfrac{8-4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\dfrac{4+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2$.

2. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{a-\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \left(\frac{\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).$$

a) Rút gọn biểu thức.

b) Tìm các giá trị của a và b để $A = 0$.

3. Cho biểu thức

$$B = \frac{4x(x-\sqrt{x}+1)}{x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}+1} : \left(\frac{1}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x-2\sqrt{x}+1}\right).$$

Tính $\sqrt{B}$.

4. Cho biểu thức

$$P = \left(2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-3}\right) : \left(\frac{6\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right).$$

a) Rút gọn P;

b) Tính giá trị của P khi $x = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}$;

c) So sánh P với $\dfrac{3}{2}$.

5. Cho biểu thức $P = \dfrac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4} - \dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn P;

b) Chứng minh $P > -3$;

c) Tìm giá trị lớn nhất của P.

6. Cho hàm số $y = (m - 1)x + 5$.

a) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến? nghịch biến?

b) Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = 3x - 2$.

c) Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = -3x + 2$.

d) Tìm giá trị của m để điểm $A(-2; 3)$ thuộc đồ thị của hàm số. Trong trường hợp này hãy xác định hệ số góc của đồ thị.

7. a) Cho hàm số $y = ax + b$. Xác định a và b để đồ thị của hàm số đi qua hai điểm $A(-1; -5)$ và $B(3; 7)$.

b) Cho hai đường thẳng (d_1): $y = (m - 1)x - 2n$ và (d_2): $y = (m + 1)x + n - 8$.

Xác định m và n để hai đường thẳng cắt nhau tại $A(1; -2)$.

8. Chứng minh rằng nếu trong phương trình $ax + by = 84$, các hệ số a, b là các số nguyên thì cặp số $(15; 40)$ không thể là nghiệm của phương trình này.

9. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}(x+3)(y-2)=(x-5)(y+1)\\(x-2)(y+6)=(x+5)(y-4)\end{cases}$;

b) $\begin{cases}\dfrac{x-6}{y-4}+\dfrac{8}{y^2-16}=\dfrac{x+6}{y+4}\\[2mm]\dfrac{5}{y^2-3y}+\dfrac{2}{3x-xy}=-\dfrac{6}{xy}\end{cases}$.

10. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}2|x|+3y=y-4\\5|x|-4y=14-y\end{cases}$;

b) $\begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt{x+2}}-\dfrac{4}{\sqrt{y-3}}=-1\\[2mm]\dfrac{2}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{5}{\sqrt{y-3}}=\dfrac{19}{6}\end{cases}$.

11. Hai người thợ làm chung một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì được 25% công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong việc?

12. Một người đi xe đạp dự định từ A đến B mất một thời gian. Nếu tăng vận tốc thêm 3km/h thì đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Nếu giảm vận tốc 2km/h thì đến B muộn hơn 1 giờ. Tính vận tốc và thời gian dự định của người ấy.

13. Cho hàm số $y = ax^2$ và điểm $A(-2; -2)$ thuộc đồ thị.

a) Xác định hệ số a.

b) Điểm $B\left(3; -\dfrac{9}{2}\right)$ có thuộc đồ thị của hàm số hay không?

c) Vẽ đồ thị của hàm số.

14. Giải các phương trình:

a) $x^4 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$;

b) $1 - \dfrac{12}{x^2 - 4} = \dfrac{3}{x + 2}$;

c) $2x^4 - 3x^2 + 5 = (x^2 - 1)^2 + 16$.

15. Tìm hai số, biết rằng tổng và tích của chúng lần lượt bằng tích và tổng hai nghiệm của phương trình $x^2 + 4x - 21 = 0$.

16. Một người đi xe máy dự định đi quãng đường từ A đến B dài 60km trong một thời gian. Nhưng thực tế, trên $\dfrac{1}{2}$ quãng đường đầu người ấy đi với vận tốc dự định. Trên quãng đường còn lại, vận tốc giảm đi 6km/h. Vì thế người ấy đến B chậm hơn dự định là 15 phút. Tính thời gian dự định.

17. Hai người cùng làm một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình công việc ấy thì tổng số thời gian làm việc của hai người là 25 giờ. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Nhận xét : $8 + 2\sqrt{15} = 5 + 2\sqrt{5}.\sqrt{3} + 3 = (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$.

$$A = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{7 - 2\sqrt{10}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{5 + 2\sqrt{15} + 3}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{10} + 2}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2} = 2\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

b) $$B = \left(\frac{8 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{4 + 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{6 - 2.2\sqrt{3} + 2}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 + \sqrt{3}}\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right]^2 - \left[\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{1+\sqrt{3}}\right]^2 = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 - \left(1+\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 6 - 2\sqrt{12} + 2 - 1 - 2\sqrt{3} - 3 = 4 - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4 - 6\sqrt{3}.$$

2. Điều kiện : $a > 0,\ b \geq 0,\ a \neq b$.

a) $A = \left(\frac{a-\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \left(\frac{\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$

$$= \left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right] : \left[\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}(a-b)} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right]$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \left(\frac{\sqrt{b}}{a-b} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

$$= -\frac{\sqrt{b}(a-b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{a}}.$$

b) $A = \frac{\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{a}} = 0$ khi và chỉ khi $b = 0$ hoặc $a = b > 0$ (loại).

Vậy $A = 0$ khi và chỉ khi $b = 0$.

3. Điều kiện : $x \geq 0,\ x \neq 1$.

$B = \frac{4x(x-\sqrt{x}+1)}{x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}+1} : \left(\frac{1}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x-2\sqrt{x}+1}\right)$

$$= \frac{4x(x-\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+\sqrt{x}+1} : \left[\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2}\right]$$

$$= \frac{4x(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} : \frac{x-2\sqrt{x}+1+2x-2+x+2\sqrt{x}+1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{4x(x-1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2 4x} = (\sqrt{x}-1)^2.$$

Từ đó, $\sqrt{B} = \sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} = \left|\sqrt{x}-1\right|$.

Vậy $\sqrt{B} = \sqrt{x} - 1$ khi $x > 1$.

$\sqrt{B} = 1 - \sqrt{x}$ khi $0 \leq x < 1$.

4. Điều kiện: $x \geq 0; x \neq \frac{9}{4}$.

a) $P = \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} + 1}$.

b) $x = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \Rightarrow P = \frac{6 - 13\sqrt{2}}{4}$.

c) Với điều kiện $x \geq 0; x \neq \frac{9}{4}$ ta có $P - \frac{3}{2} = \frac{-13}{2\left(2\sqrt{x} + 1\right)} < 0$ hay $P < \frac{3}{2}$.

5. Điều kiện $x \geq 0; x \neq 1$.

a) $P = \frac{7 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4}$.

b) Với điều kiện $x \geq 0; x \neq 1$ ta có $P - (-3) = P + 3 = \frac{19}{\sqrt{x} + 4} > 0$ hay $P > -3$.

c) $P = \frac{-3\sqrt{x} - 12 + 19}{\sqrt{x} + 4} = -3 + \frac{19}{\sqrt{x} + 4}$.

Với $x \geq 0$ ta có

$$\sqrt{x} + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{19}{\sqrt{x} + 4} \leq \frac{19}{4} \Rightarrow P \leq -3 + \frac{19}{4} = \frac{7}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất $P_{max} = \frac{7}{4}$ đạt được khi $\sqrt{x} = 0$ hay $x = 0$.

6. Xét hàm số $y = (m - 1)x + 5$.

a) Hàm số đồng biến khi $m - 1 > 0$ hay khi $m > 1$.

Hàm số nghịch biến khi $m < 1$.

b) Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = 3x - 2$ khi $m - 1 = 3$ hay khi $m = 4$.

c) Đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = -3x + 2$ khi $m - 1 \neq -3$ hay $m \neq -2$.

d) Điểm $A(-2 ; 3)$ thuộc đồ thị của hàm số khi

$$3 = (m - 1)(-2) + 5 \Leftrightarrow -2m = -4 \Leftrightarrow m = 2.$$

Khi $m = 2$, hệ số góc của đồ thị là 1.

7. a) Vì A(–1 ; –5) và B(3 ; 7) thuộc đồ thị nên toạ độ của chúng thoả mãn đẳng thức y = ax + b ; nghĩa là

$$\begin{cases} -5 = a.(-1) + b \\ 7 = a.3 + b \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a - b = 5 \\ 3a + b = 7. \end{cases}$$

Coi a và b như hai ẩn của một hệ phương trình. Giải hệ này ta được :

$$a = 3, b = -2.$$

b) Vì điểm A(1 ; –2) thuộc cả hai đường thẳng d_1 và d_2 nên toạ độ của nó thoả mãn hai phương trình của hai đường thẳng ấy, nghĩa là :

$$\begin{cases} -2 = (m-1).1 - 2n \\ -2 = (m+1).1 + n - 8 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} m - 2n = -1 \\ m + n = 5. \end{cases}$$

Coi m và n như hai ẩn của một hệ phương trình, giải hệ này ta được :

$$n = 2, m = 3.$$

8. Thay x = 15, y = 40 vào phương trình đã cho ta được 15a + 40b = 84. Coi đây là phương trình bậc nhất với hai ẩn a, b. Vì ƯCLN (15, 40) = 5, mà 84 không chia hết cho 5 nên phương trình này không có nghiệm nguyên.

Vậy nếu a, b nguyên thì phương trình ax + by = 84 không thể nhận cặp số (15 ; 40) là nghiệm.

9. a) $\begin{cases} (x+3)(y-2) = (x-5)(y+1) \\ (x-2)(y+6) = (x+5)(y-4) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - 2x + 3y - 6 = xy + x - 5y - 5 \\ xy + 6x - 2y - 12 = xy - 4x + 5y - 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 8y = -1 \\ 10x - 7y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x - 56y = -7 \\ 80x - 56y = -64 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 59x = -57 \\ 10x - 7y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{57}{59} \\ y = -\dfrac{14}{59}. \end{cases}$$

b) Điều kiện : $x \neq 0, y \neq 0, y \neq 3, y \neq \pm 4$. Với điều kiện đó ta có

$$\begin{cases} \dfrac{x-6}{y-4} + \dfrac{8}{y^2-16} = \dfrac{x+6}{y+4} \\ \dfrac{5}{y^2-3y} + \dfrac{2}{3x-xy} = -\dfrac{6}{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(y+4) + 8 = (x+6)(y-4) \\ 5x - 2y = -6(y-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + 4x - 6y - 24 + 8 = xy - 4x + 6y - 24 \\ 5x + 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 12y = -8 \\ 5x + 4y = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 12y = -8 \\ 15x + 12y = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23x = 46 \\ 5x + 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

10. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 2|x| + 3y = y - 4 \\ 5|x| - 4y = 14 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x| + 2y = -4 \\ 5|x| - 3y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = -y - 2 \\ -8y = 24 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Hệ có hai nghiệm : $(1 ; -3)$ và $(-1 ; -3)$.

b) Điều kiện : $x > -2$, $y > 3$.

Đặt $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = u$, $\dfrac{1}{\sqrt{y-3}} = v$, $u > 0$, $v > 0$, ta có :

$$\begin{cases} 3u - 4v = -1 \\ 2u + 5v = \dfrac{19}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u - 8v = -2 \\ 6u + 15v = \dfrac{19}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 23v = \dfrac{23}{2} \\ 3u - 4v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{3} \\ v = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \sqrt{x+2} = 3 \\ \sqrt{y-3} = 2 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm : $(7 ; 7)$.

11. Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong việc là x (giờ), $x > 0$; thời gian người thứ hai làm một mình xong việc là y (giờ), $y > 0$.

Theo đầu bài ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{16} \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình ta được : $x = 24$, $y = 48$.

Trả lời :

Người thứ nhất làm một mình trong 24 giờ xong việc.

Người thứ hai làm một mình trong 48 giờ thì xong việc.

12. Gọi vận tốc và thời gian dự định đi quãng đường AB lần lượt là x (km/h), y (giờ), $x > 0$, $y > 0$.

Quãng đường AB = xy (km).

Nếu tăng vận tốc thêm 3km/h, tức là vận tốc bằng $x + 3$ (km/h) thì thời gian đi hết quãng đường là $y - 1$ (giờ) và quãng đường $AB = (x + 3)(y - 1)$ (km)

Nếu giảm vận tốc 2km/h, tức là vận tốc bằng $x - 2$ (km/h) thì thời gian đi hết quãng đường là $y + 1$ (giờ) và quãng đường $AB = (x - 2)(y + 1)$ (km).

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} xy = (x+3)(y-1) \\ xy = (x-2)(y+1) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x - 3y = -3 \\ x - 2y = 2 \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được : $x = 12$, $y = 5$.

Trả lời : Vận tốc dự định là 12km/h.

Thời gian dự định là 5 giờ.

13. a) Vì $A(-2\,;-2)$ thuộc đồ thị nên $-2 = a.(-2)^2 = 4a$. Vậy $a = -\frac{1}{2}$.

Hàm số đã cho là $y = -\frac{1}{2}x^2$.

b) Thay toạ độ của B vào đẳng thức $y = -\frac{1}{2}x^2$, ta có $-\frac{1}{2}.3^2 = -\frac{9}{2}$ (đúng).

Vậy B thuộc đồ thị của hàm số.

c) Học sinh tự vẽ đồ thị.

14. a) $x^4 - 9x^2 + 12x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 - (9x^2 - 12x + 4) = 0 \Leftrightarrow x^4 - (3x - 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 2)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = 0$ hoặc $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Giải phương trình $x^2 + 3x - 2 = 0$:

$$\Delta = 9 + 8 = 17\,;\ x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\,;\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}.$$

Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có $a + b + c = 0$ nên có hai nghiệm là

$x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm :

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2},\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = 2.$$

b) Điều kiện : $x \neq \pm 2$.

Khử mẫu thức và biến đổi ta được : $x^2 - 4 - 12 = 3(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

Giải phương trình cuối cùng ta được $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ (loại).

Vậy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm $x = 5$.

c) $2x^4 - 3x^2 + 5 = (x^2 - 1)^2 + 16 \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 1 + 16$

$\Leftrightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0.$

Đặt $x^2 = t$, $t \geq 0$, ta có $t^2 - t - 12 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = 4$, $t_2 = -3$ (loại).

Với $t = 4$, ta có $x^2 = 4$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : $x_1 = -2$; $x_2 = 2$.

15. Gọi u và v là hai số cần tìm.

Vì phương trình $x^2 + 4x - 21 = 0$ có a và c trái dấu nên nó có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo định lí Vi-ét : $x_1 + x_2 = -4$, $x_1 x_2 = -21$.

Vì $u + v = -21$ và $uv = -4$ nên chúng là hai nghiệm của phương trình

$t^2 + 21t - 4 = 0.$

Phương trình này có hai nghiệm

$$t_1 = \frac{-21 + \sqrt{457}}{2}, t_2 = \frac{-21 - \sqrt{457}}{2}.$$

Vậy hai số cần tìm là

$$\frac{-21 - \sqrt{457}}{2} \text{ và } \frac{-21 + \sqrt{457}}{2}.$$

16. Gọi vận tốc dự định là x (km/h), $x > 0$.

Ta có thời gian dự định là $\frac{60}{x}$ (giờ).

Thời gian đi trên 30km đầu là $\frac{30}{x}$ (giờ).

Vận tốc đi trên 30km sau là $x - 6$ (km/h).

Thời gian đi quãng đường sau là $\frac{30}{x-6}$ (giờ).

Vì thời gian thực tế đã đi lâu hơn thời gian dự định là 15 phút $\frac{1}{4}$ giờ, nên ta có phương trình :

$$\frac{60}{x} = \frac{30}{x} + \frac{30}{x-6} - \frac{1}{4} \text{ hay } \frac{30}{x} = \frac{30}{x-6} - \frac{1}{4}.$$

Khử mẫu và biến đổi ta được :

$$120(x - 6) = 120x - x(x - 6) \Leftrightarrow x^2 - 6x - 720 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm

$$x_1 = 30, x_2 = -24 \text{ (loại)}.$$

Vậy vận tốc dự định là 30km/h. Do đó thời gian dự định là 60 : 30 = 2 (giờ).

Trả lời : Thời gian dự định là 2 giờ.

17. Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong việc là : x (giờ), $0 < x < 25$.

Khi đó thời gian người thứ hai làm một mình xong việc là : $25 - x$ (giờ).

Trong 1 giờ, người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc) ;

Người thứ hai làm được $\frac{1}{25-x}$ (công việc) ;

Hai người làm chung được $\frac{1}{6}$ (công việc).

Ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{25-x} = \frac{1}{6}$.

Khử mẫu và biến đổi ta được : $x(25 - x) = 6(25 - x) + 6x$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25x + 150 = 0 ; x_1 = 15, x_2 = 10.$$

Trả lời : Người thứ nhất làm một mình trong 15 giờ thì xong việc.

Người thứ hai làm một mình trong 10 giờ thì xong việc.

MỤC LỤC

Trang

LỜI NÓI ĐẦU 3

Chương 1

CĂN BẬC HAI – CĂN BẬC BA

Chủ đề 1. CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ 5
A. Kiến thức cần nhớ 5
B. Các dạng bài tập cơ bản 6

Chủ đề 2. CĂN BẬC HAI CỦA MỘT BIỂU THỨC 10
A. Kiến thức cần nhớ 10
B. Các dạng bài tập cơ bản 12

Chủ đề 3. CĂN BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH, MỘT THƯƠNG 26
A. Kiến thức cần nhớ 26
B. Các dạng bài tập cơ bản 27

Chủ đề 4. BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI 41
A. Kiến thức cần nhớ 41
B. Các dạng bài tập cơ bản 43

Chủ đề 5. CĂN BẬC BA 70
A. Kiến thức cần nhớ 70
B. Các dạng bài tập cơ bản 71

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ 76

Chương 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT

Chủ đề 1. NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ 96
A. Kiến thức cần nhớ 96
B. Các dạng bài tập cơ bản 98

Chủ đề 2. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT 106
A. Kiến thức cần nhớ 106
B. Các dạng bài tập cơ bản 106

Chủ đề 3. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT 111
A. Kiến thức cần nhớ 111
B. Các dạng bài tập cơ bản 112

Chủ đề 4. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU 118
A. Kiến thức cần nhớ 118
B. Các dạng bài tập cơ bản 119
Chủ đề 5. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ 123
A. Kiến thức cần nhớ 123
B. Các dạng toán cơ bản 124
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ 127

Chương 3
HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Chủ đề 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN 134
A. Kiến thức cần nhớ 134
B. Các dạng bài tập cơ bản 135
Chủ đề 2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN 139
A. Kiến thức cần nhớ 139
B. Các dạng bài tập cơ bản 140
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ 157

Chương 4
HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Chủ đề 1. HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ 173
A. Kiến thức cần nhớ 173
B. Các dạng bài tập cơ bản 174
Chủ đề 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN 181
A. Kiến thức cần nhớ 181
B. Các dạng bài tập cơ bản 183
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ 202

ÔN TẬP CUỐI NĂM

BÀI TẬP 218
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ 221

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng biên tập **NGÔ ÁNH TUYẾT**
Giám đốc CTCP Sách giáo dục tại TP Hà Nội **CẤN HỮU HẢI**

Biên tập nội dung :
DƯƠNG VŨ KHÁNH THUẬN – MAI MINH TUẤN

Sửa bản in :
ĐỖ HỮU PHÚ

Trình bày bìa :
HOÀNG MẠNH DỨA

Thiết kế sách và chế bản :
CÔNG TY CP SÁCH GIÁO DỤC TẠI THÀNH PHỐ HÀ NỘI

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 9 THEO CHỦ ĐỀ - *Phần* ĐẠI SỐ

(BÁM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG)

Mã số: T9T83S1 - TTS

In 2.500 cuốn (QĐ: 51TK), khổ 17x24cm. In tại Công ty in Giao thông - NXBGTVT

Số xuất bản: 27-2011/CXB/93-2126/GD

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2011