PHAN DOÃN THOẠI (Chủ biên)
CHU TUẤN – HỒ QUANG VINH

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 9

THEO CHỦ ĐỀ

PHẦN HÌNH HỌC

(BÁM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG)

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Chương trình toán trung học cơ sở được trình bày theo các chủ đề. Trong mỗi chủ đề có quy định chuẩn (mức độ cần đạt) về kiến thức và kĩ năng tương đối chi tiết. Do những quy định về thời lượng dạy học, mỗi chủ đề được phân phối trong một hoặc nhiều bài học của SGK. Để giúp học sinh THCS nắm vững kiến thức và phương pháp giải toán, chúng tôi biên soạn bộ sách :

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN THEO CHỦ ĐỀ

Bộ sách gồm 8 quyển. Mỗi lớp hai quyển, một quyển bao gồm các chủ đề Số học (lớp 6), Đại số (lớp 7, 8, 9), một quyển bao gồm các chủ đề Hình học.

Sách được phân chia thành các chương với tên chương như trong SGK. Mỗi chương gồm các chủ đề. Mỗi chủ đề gồm hai phần :

A. **Kiến thức cần nhớ**. Phần này trình bày tóm tắt những kiến thức cơ bản và nâng cao cần thiết cho việc giải toán.

B. **Các dạng bài tập cơ bản**. Dựa vào những nội dung cơ bản của từng chủ đề, chúng tôi đưa ra các dạng bài tập để thực hành và luyện tập các nội dung phục vụ cho chủ đề. Trong mỗi dạng bài tập có ba nội dung chính sau đây : **Phương pháp giải**; **Ví dụ**; **Bài tập**. Mỗi phương pháp giải đưa ra một số ví dụ minh họa tiêu biểu.

Hệ thống bài tập, về cơ bản gồm hai loại : Loại 1, áp dụng trực tiếp phương pháp và các ví dụ nêu trên; Loại 2, gồm các bài tập vận dụng một cách tổng hợp các phương pháp đó.

Các tác giả đã dành nhiều thời gian để sắp xếp các chủ đề theo thứ tự lôgic của chương trình; lựa chọn các ví dụ và bài tập từ dễ đến khó và cố gắng đáp ứng nhu cầu nắm vững kiến thức cơ bản của đa số học sinh, đồng thời hướng học sinh đi sâu (ở một số bài tập có dấu "*"), phát triển những kiến thức được truyền thụ và rèn luyện kĩ năng.

Mặc dù bộ sách đã được các tác giả nhiều năm kinh nghiệm giảng dạy dày công biên soạn nhưng cũng không thể tránh khỏi thiếu sót, rất mong được bạn đọc góp ý.

Mọi thư từ góp ý xin gửi về :

P. Khai thác và Quản lí Đề tài – Công ty CP Sách Giáo dục tại Tp Hà Nội.

Địa chỉ : Lô B1 DN 14/3 – Nguyễn Khánh Toàn – Quan Hoa – Cầu Giấy – Hà Nội.

Hà Nội, ngày 01 tháng 01 năm 2011.

Các tác giả

Chương 1

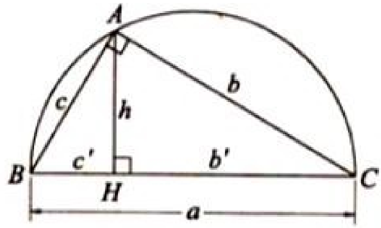
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Chủ đề 1

HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho ΔABC vuông tại A, cạnh huyền BC = a, các cạnh góc vuông AC = b và AB = c. Gọi AH = h là đường cao ứng với cạnh huyền và CH = b', BH = c' lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC (H.1).



Hình 1

I. Ba hệ thức về cạnh

$$b^2 = ab' \qquad (1)$$

$$c^2 = ac' \qquad (2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ (hệ thức Py-ta-go)} \qquad (3)$$

II. Ba hệ thức về đường cao

$$h^2 = b'c' \qquad (4)$$

$$ah = bc \qquad (5)$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \qquad (6)$$

III. Dấu hiệu nhận biết tam giác vuông

Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng một nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

Dấu hiệu này sinh ra cách vẽ một tam giác vuông bằng thước kẻ và compa gồm hai bước :

Bước 1. Vẽ một nửa đường tròn tâm O, đường kính BC.

Bước 2. Lấy điểm A bất kì trên nửa đường tròn thu được ΔABC vuông tại A.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. – Xác định vị trí cạnh huyền.

– Áp dụng hệ thức về cạnh hoặc đường cao.

2. – Dùng kĩ thuật đại số hoá hình học.

Nếu $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$ (m, n là hằng số) thì AB = mt, CD = nt, với $t > 0$.

– Xác định độ dài cạnh huyền.

– Áp dụng hệ thức về cạnh hoặc đường cao.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hãy tính x, y trong mỗi hình cho dưới đây với các kích thước kèm theo.

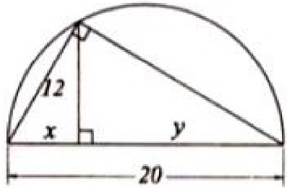
Giải

H.2 : Ta có cạnh huyền là $x + y = 20$.

Áp dụng hệ thức về cạnh $c^2 = ac'$, ta được

$$12^2 = 20.x \Leftrightarrow x = \frac{12^2}{20} = 7,2.$$

Vậy $y = 20 - x = 20 - 7,2 = 12,8$.



Hình 2

H.3 : Ta có cạnh huyền là $x + y$.

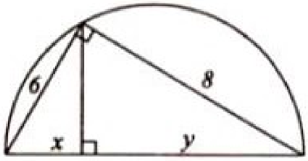
Áp dụng hệ thức Py-ta-go, thu được

$$(x + y)^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \text{ hay } x + y = 10.$$

Áp dụng hệ thức về cạnh : $b^2 = ab'$, ta được

$$8^2 = 10.y \Leftrightarrow y = \frac{64}{10} = 6,4.$$

Vậy $x = 10 - y = 10 - 6,4 = 3,6$.

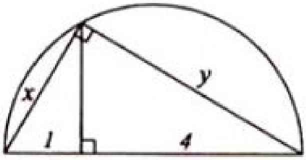


Hình 3

H.4 : Cạnh huyền là : $1 + 4 = 5$.

Áp dụng hệ thức về cạnh : $b^2 = ab'$, ta được $y^2 = 5.4 = (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow y = 2\sqrt{5}$ (vì $y > 0$) ;

$c^2 = ac'$ ta được $x^2 = 5.1 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}$ (vì $x > 0$).

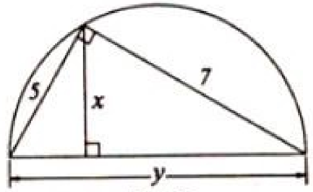


Hình 4

H.5 : Cạnh huyền là y.

Áp dụng công thức Py-ta-go, ta được

$y^2 = 5^2 + 7^2 = 74 \Rightarrow y^2 = (\sqrt{74})^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{74}$ (vì $y > 0$).



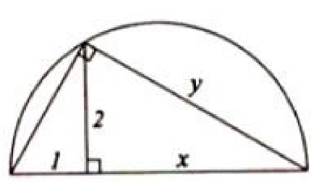
Hình 5

Áp dụng hệ thức về đường cao $ah = bc$, ta được :

$$x.\sqrt{74} = 5.7 \Rightarrow x = \frac{35}{\sqrt{74}}.$$

H.6 : Áp dụng hệ thức về đường cao $h^2 = b'c'$, thu được $2^2 = 1.x \Rightarrow x = 4$, nên cạnh huyền là :

$$1 + x = 1 + 4 = 5.$$



Hình 6

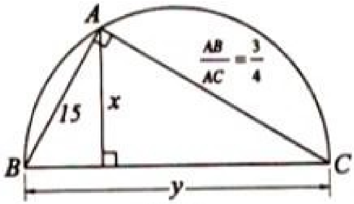
Áp dụng hệ thức về cạnh $b^2 = b'a$, ta được

$$y^2 = 4.5 = (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow y = 2\sqrt{5} \text{ (vì } y > 0).$$

Ví dụ 2. Hãy tính x, y trong các hình cho dưới đây, với các kích thước kèm theo.

Giải

H.7 : Vì $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$ nên $\begin{cases} AB = 3t \\ AC = 4t \end{cases}$ $(t > 0)$.



Hình 7

Do đó : $15 = AB = 3t \Leftrightarrow t = 5$.

Suy ra : $AC = 4.5 = 20$.

Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho ΔABC vuông tại A, ta được

$$y^2 = 15^2 + 20^2 = 25^2 \Leftrightarrow y = 25 \text{ (vì } y > 0).$$

Áp dụng hệ thức về đường cao $ah = bc$, thu được $25.x = 15.20 \Leftrightarrow x = 12$.

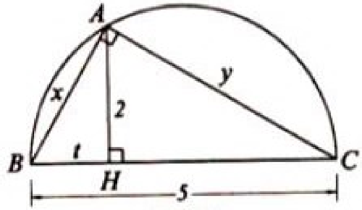
H.8 : Gọi $BH = t$ thì $HC = 5 - t$

Áp dụng hệ thức về đường cao $h^2 = b'c'$, ta được

$$2^2 = t(5-t) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4. \end{array}\right.$$



Hình 8

Với $t = 1$ thì $BH = 1$, $HC = 4$. Lúc đó $x^2 = 1.5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ (vì $x > 0$) ;

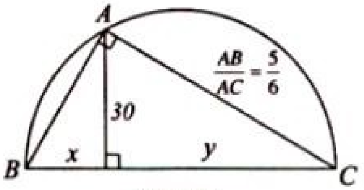
$$y^2 = 4.5 = (2\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{5} \text{ (vì } y > 0).$$

Với $t = 4$: làm tương tự.

H.9a : Áp dụng hệ thức về cạnh

$$b^2 = b'a. \qquad (1)$$

$$c^2 = c'a. \qquad (2)$$



Hình 9a

Chia (1) cho (2) theo vế, thu được

$$\frac{y}{x} = \frac{b'}{c'} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{5^2}{6^2}$$

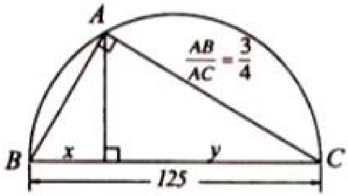
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 25t \\ x = 36t \end{cases} \text{ (với } t > 0\text{).}$$

Áp dụng hệ thức về đường cao $h^2 = b'c'$, thu được

$$30^2 = (5.6)^2.t^2 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (vì } t > 0\text{).}$$

Vậy : $y = 25$, $x = 36$.

H.9b : Vì $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$ nên $\begin{cases} AB = 3t \\ AC = 4t \end{cases}$ $(t > 0)$



Hình 9b

mà cạnh huyền là $x + y = 125$.

Áp dụng hệ thức Py-ta-go, thu được

$125^2 = (3t)^2 + (4t)^2 \Leftrightarrow 5^2.t^2 = 5^6 \Leftrightarrow t^2 = 5^4$

$\Leftrightarrow t = 25$ (vì $t > 0$).

Áp dụng hệ thức về cạnh : $b^2 = b'a$ và $a^2 = c'$, ta được

$$(4t)^2 = y.125 \Leftrightarrow y = \frac{4^2.5^4}{5^3} = 80.$$

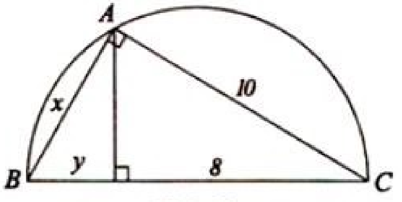
Vậy $x = 125 - y = 125 - 80 = 45$.

Bạn có biết ?

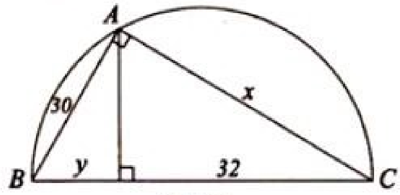
- Bộ ba số nguyên dương (a, b, c) thoả mãn hệ thức Py-ta-go gọi là bộ ba số Py-ta-go. Người ta cũng nói (a, b, c) là một tam giác Py-ta-go. Ví dụ : (3, 4, 5) là bộ ba số Py-ta-go.
- Có vô số bộ ba số Py-ta-go, chẳng hạn : (3, 4, 5) ; (5, 12, 13) ; (7, 24, 25) ; (8, 15, 17) ; (20, 21, 29),...
- Nếu (a, b, c) là bộ ba số Py-ta-go thì (at, bt, ct) với $t \in \mathbb{N}^*$ cũng là bộ ba số Py-ta-go, chẳng hạn : (6, 8, 10) ; (9, 12, 15) ; (15, 20, 25) ; (10, 24, 26) ; (14, 48, 50) ;...

III. BÀI TẬP

1. Hãy tính x, y trong các hình 10 và 11 dưới đây :



Hình 10



Hình 11

2. Cho ΔABC ($\widehat{A} = 90^0$), AB = 12cm, BC = 13cm. Tính AC, đường cao AH, các đoạn thẳng BH, CH và diện tích của tam giác.

3. Cho ΔABC vuông cạnh huyền AB, cạnh AC = 15, đường cao CH chia AB thành hai đoạn AH và HB với HB = 16. Tính diện tích tam giác vuông ABC.

4. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh bên bằng 15cm, cạnh đáy bằng 18cm. Tính độ dài các đường cao.

5. Tính diện tích của một tam giác cân có chiều cao ứng với cạnh đáy bằng 10cm, chiều cao ứng với cạnh bên bằng 12cm.

6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác trong BE, biết EC = 3, BC = 6. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC.

7. Tính diện tích tam giác có độ dài ba cạnh là 10cm, 17cm, 21cm.

Dạng 2
DỰNG ĐOẠN THẲNG PY-TA-GO
DỰNG ĐOẠN TRUNG BÌNH NHÂN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Dựng đoạn thẳng Py-ta-go

Loại 1. Cho trước hai đoạn thẳng a và b. Dựng đoạn thẳng

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow x^2 = a^2 + b^2.$$

Dựng tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông là a và b thì cạnh huyền bằng x.

Loại 2. Cho trước 2 đoạn thẳng a và b. Dựng đoạn thẳng

$$y = \sqrt{a^2 - b^2}\ (a > b) \Leftrightarrow y^2 + b^2 = a^2.$$

Dựng tam giác vuông có cạnh huyền là a cạnh góc vuông là b thì cạnh góc vuông kia là y.

2. Dựng đoạn trung bình nhân

Cho trước hai đoạn thẳng a và b. Dựng đoạn thẳng $x = \sqrt{ab}$.

Dựng tam giác ABC có cạnh huyền BC = a + b ($\widehat{A} = 90^o$) thì đường cao ứng với cạnh huyền là x với BH = a, HC = b.

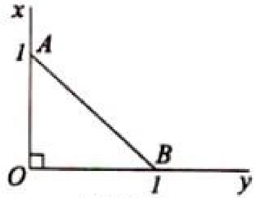
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Dựng các đoạn thẳng $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ bằng cách dựng đoạn thẳng Py-ta-go.

Giải

a) (H.12) Gọi $AB = \sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$ thì AB là cạnh huyền của tam giác vuông cân có cạnh là 1.

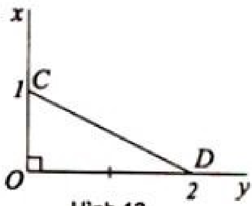
Trên Ox, Oy là hai cạnh góc vuông của góc vuông xOy, lấy A, B sao cho OA = OB = 1 thì $AB = \sqrt{2}$ là đoạn thẳng cần dựng.



Hình 12

b) (H.13) Gọi $CD = \sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ thì CD là cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 2 và 1.

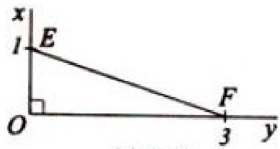
Dựng góc vuông xOy, lấy $C \in Ox$, $D \in Oy$ sao cho OC = 1, OD = 2 thì $CD = \sqrt{5}$ là đoạn thẳng cần dựng.



Hình 13

c) (H.14) Gọi $EF = \sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}$ thì EF là cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh là 1 và 3.

Dựng góc vuông xOy, lấy $E \in Ox$, $F \in Oy$ sao cho OE = 1, OF = 3 thì $EF = \sqrt{10}$ là đoạn thẳng cần dựng.



Hình 14

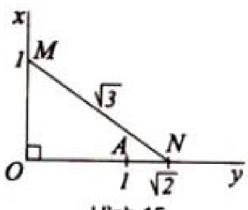
Ví dụ 2. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{3}$ bằng cách dựng đoạn thẳng Py-ta-go.

Giải (H.15)

Gọi $MN = \sqrt{3} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}$ thì MN là cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh là 1 và $\sqrt{2}$.

Bước 1. Dựng góc vuông xOy.

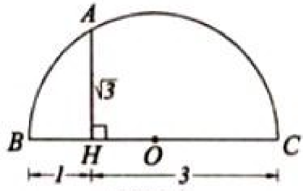
Bước 2. Lấy $M \in Ox$, $A \in Oy$ sao cho OM = OA = 1 thì $MA = \sqrt{2}$.



Hình 15

Bước 3. Lấy $N \in Oy$ sao cho $ON = MA = \sqrt{2}$ thì $MN = \sqrt{3}$ là đoạn thẳng phải dựng.

Ví dụ 3. Dựng các đoạn thẳng $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ bằng cách dựng đoạn trung bình nhân.



Hình 16

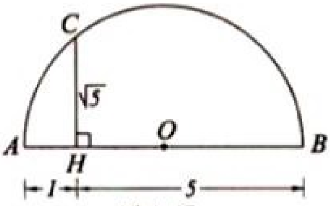
Giải

a) (H.16) *Phân tích:* Gọi AH $= \sqrt{3} = \sqrt{1.3}$ thì AH là đường cao thuộc cạnh huyền của ΔABC vuông tại A, có BH = 1 và HC = 3.

Dựng nửa đường tròn tâm O đường kính BC = 4.

Lấy $H \in BC$ sao cho BH = 1. Dựng $Hx \perp BC$, cắt nửa đường tròn đường kính BC tại A. Ta có ΔABC vuông tại A, vì ΔABC có trung tuyến AO = $\frac{BC}{2}$, do đó $AH = \sqrt{BH.HC} = \sqrt{1.3} = \sqrt{3}$.

Vậy AH chính là đoạn thẳng cần dựng.



Hình 17

b) (H.17) Gọi CH = $\sqrt{1.5}$ thì CH là đường cao thuộc cạnh huyền của ΔCAB vuông tại C.

Dựng nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 6. Lấy $H \in AB$ sao cho AH = 1. Kẻ $Hy \perp AB$, cắt nửa đường tròn đường kính AB tại C thì CH là đoạn thẳng cần dựng. Thật vậy ΔCAB có trung tuyến CO = $\frac{AB}{2}$ nên vuông tại C.

Áp dụng hệ thức về đường cao, ta được $CH^2 = 1.5 \Leftrightarrow CH = \sqrt{5}$.

III. BÀI TẬP

8. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{6}$ bằng cách dựng đoạn thẳng Py-ta-go.

9. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{7}$ bằng cách dựng đoạn trung bình nhân.

Dạng 3
CHỨNG MINH HỆ THỨC HÌNH HỌC

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức. Tính các đoạn thẳng đó nhờ các hệ thức về cạnh và đường cao.

2. Liên kết các giá trị trên rút ra hệ thức phải chứng minh.

II. VÍ DỤ

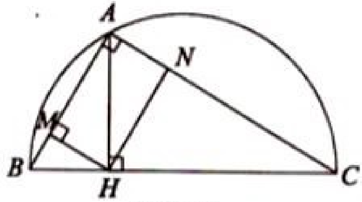
Ví dụ 1. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Chứng minh rằng :

1) $AM.AB = AN.AC$;

2) $HB.HC = MA.MB + NA.NC$;

3) $\dfrac{HB}{HC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Giải



Hình 18

1) (H.18) Áp dụng hệ thức về cạnh cho ΔABH vuông tại H và ΔACH vuông tại H, thu được :

$$AH^2 = AM.AB. \qquad (1)$$

$$AH^2 = AN.AC. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AM.AB = AN.AC$ (đpcm).

2) Áp dụng hệ thức về đường cao cho ΔABH vuông tại H và ΔACH vuông tại H, ta được

$$\left.\begin{array}{l} MH^2 = MA.MB \\ NH^2 = NA.NC \end{array}\right\} \Rightarrow MA.MB + NA.NC = MH^2 + NH^2. \qquad (1)$$

Tứ giác AMHN là hình chữ nhật nên

$$MH^2 + NH^2 = AH^2. \qquad (2)$$

Áp dụng hệ thức về đường cao cho ΔABC vuông, ta được

$$AH^2 = HB.HC \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $HB.HC = MA.MB + NA.NC$ (đpcm).

3) Áp dụng hệ thức về cạnh cho tam giác vuông ABC, thu được

$$AB^2 = BH.BC\ ; \qquad (1)$$

$$AC^2 = CH.BC. \qquad (2)$$

Chia (1) cho (2) theo từng vế, thu được :

$$\frac{BH}{CH} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Ví dụ 2. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI cắt tia CB ở K. Kẻ $Dx \perp DI$ cắt tia BC ở L. Chứng minh rằng :

1) Tam giác DIL là một tam giác cân.

2) Tổng $\dfrac{1}{DI^2}+\dfrac{1}{DK^2}$ không đổi khi I di động trên cạnh AB.

Giải (H.19)

Gọi độ dài cạnh hình vuông là : AD = DC = a > 0.

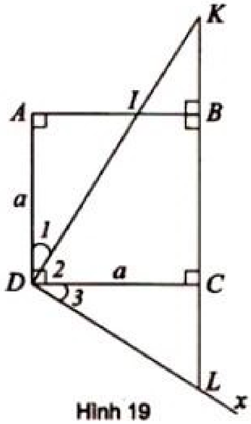
1) Vì $\begin{cases}\widehat{A}=\widehat{C}=90^o\\ AD=CD=a\\ \widehat{D_1}=\widehat{D_3} \text{ (do cùng phụ với } D_2)\end{cases} \Rightarrow \Delta ADI = \Delta CDL$ (g.c.g).

Suy ra DI = DL. Vậy ΔDIL cân tại D.

2) Áp dụng hệ thức về đường cao cho ΔDKL vuông tại D thu được

$$\frac{1}{DC^2}=\frac{1}{DL^2}+\frac{1}{DK^2}$$

hay $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{DI^2}+\dfrac{1}{DK^2}$ (không đổi) (đpcm).



Hình 19

III. BÀI TẬP

10. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A}<90^o$), kẻ $BM \perp CA$.

Chứng minh rằng $\dfrac{AM}{MC}=2\left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2-1$.

11. Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A lấy điểm D sao cho $DB = DC = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng BD, DH và HA là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

12*. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Hãy chứng minh các hệ thức sau :

1) $\dfrac{CE}{BD}=\left(\dfrac{CA}{AB}\right)^3$; 2) $AH^3 = BC.\,BD.CE$;

3) $3AH^2+BD^2+CE^2=BC^2$; 4) $\sqrt[3]{BD^2}+\sqrt[3]{CE^2}=\sqrt[3]{BC^2}$.

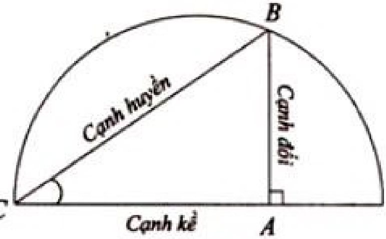
Chủ đề 2

TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC NHỌN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Định nghĩa

Cho góc nhọn α, từ một điểm bất kì trên một cạnh của góc α, kẻ đường vuông góc với cạnh kia (H.20). Khi đó



Hình 20

$$\sin\alpha = \frac{\text{Cạnh đối}}{\text{Cạnh huyền}} = \frac{AB}{BC};$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh huyền}} = \frac{AC}{BC};$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{Cạnh đối}}{\text{Cạnh kề}} = \frac{AB}{AC};\ \text{cotg}\alpha = \frac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh đối}} = \frac{AC}{AB}.$$

Nhận xét : Vì độ dài các cạnh trong một tam giác vuông đều dương và hai cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền nên $0 < \sin\alpha < 1$, $0 < \cos\alpha < 1$, $\text{tg}\,\alpha > 0$, $\cot\alpha > 0$.

II. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Nếu hai góc phụ nhau (có tổng số đo bằng 90^o) thì : sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

Trên hình 20 : $\sin B = \cos C$; $\cos B = \sin C$;

$\text{tg}B = \text{cotg}C$; $\text{cotg}B = \text{tg}C$.

III. Tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt

Tỉ số lượng giác \ α	30^o	45^o	60^o
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
$\text{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{cotg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÍNH TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC NHỌN TRONG MỘT TAM GIÁC VUÔNG, BIẾT ĐỘ DÀI HAI CẠNH

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định cạnh đối, cạnh kề, cạnh huyền, viết tỉ số lượng giác theo định nghĩa.

2. Tính cạnh còn lại nhờ hệ thức Py-ta-go hoặc hệ thức về cạnh, đường cao.

3. Tính tỉ số lượng giác còn lại theo định lí tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

II. VÍ DỤ

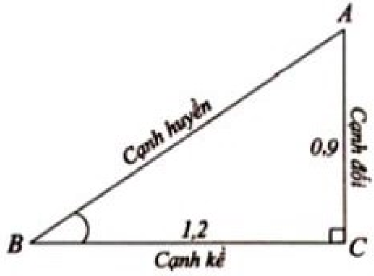
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại C, có BC = 1,2, CA = 0,9. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A.

Giải (H.21)

Ta đã biết cạnh đối và cạnh kề của góc B, cần tính cạnh huyền.

Ta có : $\mathrm{tg}B = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{0,9}{1,2} = \dfrac{3}{4}$;

$$\mathrm{cotg}B = \frac{CB}{CA} = \frac{1,2}{0,9} = \frac{4}{3}.$$



Hình 21

Vì A và B phụ nhau, nên

$$\mathrm{cotg}A = \mathrm{tg}B = \frac{3}{4},$$

$$\mathrm{tg}A = \mathrm{cotg}B = \frac{4}{3}.$$

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại C, ta có

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 \text{ hay } AB^2 = 1,2^2 + 0,9^2 = 1,5^2 \Rightarrow AB = 1,5 \text{ (vì } AB > 0).$$

Do đó : $\sin B = \dfrac{CA}{AB} = \dfrac{0,9}{1,5} = \dfrac{3}{5}$, $\cos B = \dfrac{CB}{BA} = \dfrac{1,2}{1,5} = \dfrac{4}{5}$.

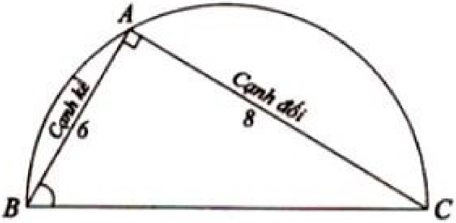
Vì A và B phụ nhau, nên

$$\sin A = \cos B = \frac{4}{5}, \cos A = \sin B = \frac{3}{5}.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 6, AC = 8. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc C.

Giải (H.22)

Ta đã biết hai cạnh góc vuông của tam giác ABC, cần tính cạnh huyền của tam giác ABC.



Hình 22

Ta có

$$\sin B = \frac{CA}{CB} = \frac{8}{CB};$$

$$\cos B = \frac{BA}{BC} = \frac{6}{BC}.$$

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A, thu được

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } BC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow BC = 10 \text{ (vì } BC > 0).$$

Từ đó $\quad \sin B = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \ \cos B = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$

Vì góc C phụ với góc B nên

$$\sin C = \cos B = \frac{3}{5}, \cos C = \sin B = \frac{4}{5}.$$

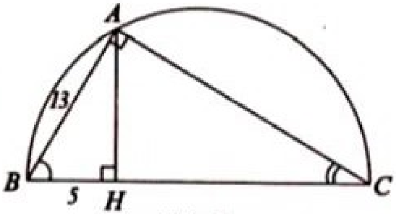
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Tính sinB, sinC trong mỗi trường hợp sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư) biết rằng :

a) AB = 13, BH = 5 ;

b) BH = 3, CH = 4.

Giải

a) Trong tam giác ABH vuông tại H (H.23), có $\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{13}$.



Hình 23

Áp dụng hệ thức Py-ta-go, ta được

$$AB^2 = BH^2 + AH^2$$

hay $\quad 13^2 = 5^2 + AH^2 \Rightarrow AH = 12$ (vì $AH > 0$).

Vậy $\sin B = \frac{12}{13} \approx 0{,}9231$.

Trong tam giác ABC vuông tại A, ta có

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{13}{BC}.$$

Áp dụng hệ thức về cạnh, ta được

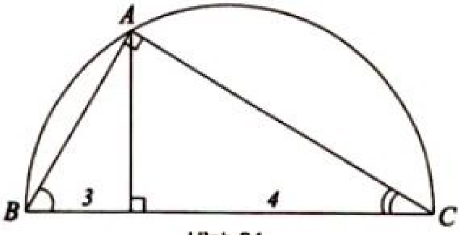
$$AB^2 = BH.BC \text{ hay } BC = \frac{13^2}{5} = \frac{169}{5}.$$

Vậy $\sin C = \frac{13.5}{169} \approx 0{,}3846$.

b) Trong tam giác ABC vuông tại A (H.24) có cạnh huyền BC = 7, ta có

$$\sin B = \frac{CA}{CB} = \frac{CA}{7};$$

$$\sin C = \frac{BA}{BC} = \frac{BA}{7}.$$



Hình 24

Áp dụng hệ thức về cạnh

$$AB^2 = BH.BC = 21 \Rightarrow BA = \sqrt{21}.$$

$$AC^2 = CH.CB = 4.7 = 28.$$

Suy ra $AC = 2\sqrt{7}$.

Vậy $\sin B = \dfrac{2\sqrt{7}}{7} \approx 0,7559$, $\sin C = \dfrac{\sqrt{21}}{7} \approx 0,6547$.

III. BÀI TẬP

13. Cho tam giác ABC có hai cạnh góc vuông là AB = 16mm, AC = 3cm.

a) Tính tỉ số lượng giác của các góc nhọn ;

b) Tính tổng $\sin^2 B + \sin^2 C$.

Dạng 2

DỰNG GÓC α BIẾT MỘT TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC LÀ $\frac{m}{n}$

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Dựng một tam giác vuông có :

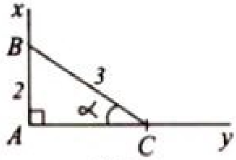
– Cạnh góc vuông và cạnh huyền là m, n nếu cho $\sin\alpha$ hoặc $\cos\alpha$ bằng $\dfrac{m}{n}$;

– Hai cạnh góc vuông là m, n nếu cho $tg\,\alpha$ hoặc $cotg\,\alpha$ bằng $\dfrac{m}{n}$.

2. Xác định tỉ số lượng giác để nhận ra góc α.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Dựng góc nhọn α biết $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$.



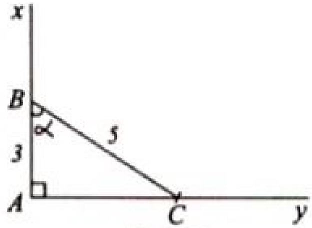
Hình 25

Giải

Vì $\sin\alpha = \dfrac{2}{3} = \dfrac{\text{Cạnh đối}}{\text{Cạnh huyền}}$ nên 2 và 3 là độ dài cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác vuông ABC, trong tam giác này $\widehat{C}$ đối diện với cạnh bằng 2 nên $\widehat{C} = \alpha$ (H.25).

Ví dụ 2. Dựng góc nhọn α biết $\cos\alpha = 0{,}6$.

Giải



Hình 26

Vì $\cos\alpha = 0{,}6 = \dfrac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh huyền}}$ nên 3 và 5 là độ dài cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác ABC. Trong tam giác này góc B kề với cạnh bằng 3, vậy $\widehat{B} = \alpha$ (H.26).

III. BÀI TẬP

14. Dựng góc nhọn α biết $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$.

15. Dựng góc nhọn α biết $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{3}{2}$.

Dạng 3

TÍNH CẠNH, TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC CÒN LẠI KHI BIẾT MỘT TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định cạnh đối, cạnh kề của một góc, viết tỉ số lượng giác theo định nghĩa.

2. Dùng kĩ thuật đại số hoá hình học :

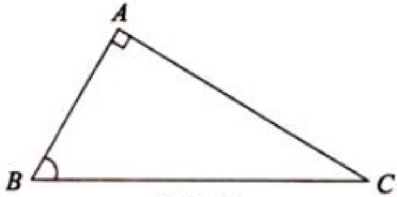
$$\text{Nếu } \frac{AB}{CD} = \frac{m}{n} \text{ thì } \begin{cases} AB = mt \\ CD = nt \end{cases} \text{ (với } t > 0\text{)}.$$

3. Áp dụng hệ thức Py-ta-go.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết cosB = 0,8. Hãy tính tỉ số lượng giác của góc C.

Giải (H.27)


Hình 27

Vì $\cos B = 0{,}8 = \dfrac{4}{5} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow \begin{cases} AC = 4t \\ BC = 5t \end{cases}$

(với $t > 0$).

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A, thu được

$$BC^2 = CA^2 + AB^2$$

hay $25t^2 = 16t^2 + AB^2 \Leftrightarrow AB^2 = (3t)^2 \Leftrightarrow AB = 3t$ (vì $t > 0$).

Vậy $\sin C = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{3t}{5t} = \dfrac{3}{5}$, $\cos C = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{4t}{5t} = \dfrac{4}{5}$,

$$\text{tg}C = \frac{BA}{AC} = \frac{3t}{4t} = \frac{3}{4}, \text{cotg}C = \frac{CA}{AB} = \frac{4t}{3t} = \frac{4}{3}.$$

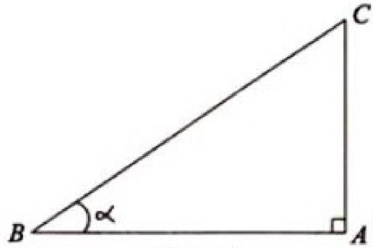
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 6cm, $\hat{B} = \alpha$ (H.28).

Biết $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{5}{12}$. Hãy tính :

a) Độ dài cạnh AC ;

b) Độ dài cạnh BC.

Giải


Hình 28

a) Trong tam giác ABC thì

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{5}{12} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \begin{cases} AC = 5t \\ AB = 12t \end{cases} (t > 0).$

Vì $AB = 6cm = 12t \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$. Vậy $AC = \dfrac{5}{2}$cm.

b) Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A, thu được

$$BC^2 = CA^2 + AB^2$$

hay $BC^2 = 6^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{13}{2}\right)^2 \Leftrightarrow BC = \dfrac{13}{2}$(cm) (vì $BC > 0$).

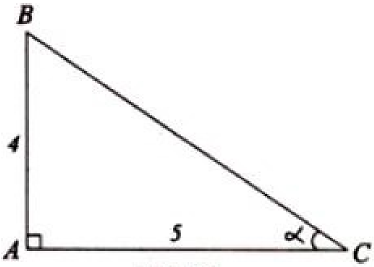
Ví dụ 3. Hãy tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ (làm tròn đến số thập phân thứ tư) nếu biết :

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$;   b) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{3}{4}$.

Giải

a) Vì $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} = \frac{\text{Cạnh đối}}{\text{Cạnh kề}}$ nên α là một góc nhọn của tam giác vuông ABC có hai cạnh góc vuông AB = 1, AC = 3.

Trong tam giác này góc C đối diện với cạnh bằng 1 nên $\widehat{C} = \alpha$ (H.29).



Hình 29

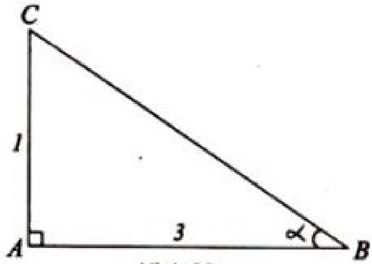
Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A, thu được

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } BC^2 = 1^2 + 3^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow BC = \sqrt{10} \text{ (vì } BC > 0).$$

Vậy $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}3162$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0{,}9487$.

b) Vì $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{3}{4} = \frac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh đối}}$ nên α là một góc nhọn của tam giác vuông ABC có hai cạnh góc vuông AB = 3, AC = 4. Trong tam giác này góc B kề với cạnh bằng 3 nên $\widehat{B} = \alpha$ (H.30).



Hình 30

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A, thu được

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } BC^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\Leftrightarrow BC = 5 \text{ (vì } BC > 0).$$

Vậy $\sin\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$; $\cos\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

III. BÀI TẬP

16. Tính $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ biết $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

17. Tính $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ biết $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.

18. Tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ biết $\mathrm{tg}\,\alpha = 0,8$.

19. Tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ biết $\mathrm{cotg}\,\alpha = 3$.

Dạng 4
SẮP THỨ TỰ CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC MÀ KHÔNG DÙNG BẢNG SỐ VÀ MÁY TÍNH

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Đưa các tỉ số lượng giác về cùng một loại.
2. Biểu diễn tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt trên trục số.
3. Chèn các tỉ số cần sắp xếp lên trục số ta được thứ tự của chúng.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Không dùng bảng số hoặc máy tính, hãy so sánh

a) $\sin 20^\circ$ và $\sin 70^\circ$; b) $\cos 25^\circ$ và $\cos 63^\circ 15'$;

c) $\mathrm{tg}\,73^\circ 20'$ và $\mathrm{tg}\,45^\circ$; d) $\mathrm{cotg}\,20^\circ$ và $\mathrm{cotg}\,37^\circ 40'$.

Giải

a) 

$$\sin 20^\circ < \frac{\sqrt{1}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin 70^\circ$$

Vì $20^\circ < 70^\circ$ nên $\sin 20^\circ < \sin 70^\circ$.

b) 

$$\cos 25^\circ > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{1}}{2} > \cos 63^\circ 15'$$

Vì $25^\circ < 63^\circ 15'$ nên $\cos 25^\circ > \cos 63^\circ 15'$.

c) 

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < \sqrt{3} < \mathrm{tg}\,73^\circ 20'$$

Vì $45^\circ < 73^\circ 20'$ nên $\mathrm{tg}\,45^\circ < \mathrm{tg}\,73^\circ 20'$.

d)

$$\text{cotg}20^\circ \quad > \quad \sqrt{3} > \text{cotg}37^\circ40' > 1 \quad > \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vì $20^\circ < 37^\circ40'$ nên $\text{cotg}20^\circ > \text{cotg}37^\circ40'$.

Ví dụ 2. Sắp xếp các tỉ số lượng giác theo thứ tự tăng dần:

a) $\sin78^\circ, \cos14^\circ, \sin47^\circ, \cos87^\circ$;

b) $\text{tg}73^\circ, \text{cotg}25^\circ, \text{tg}62^\circ, \text{cotg}38^\circ$.

Giải

a) Vì $\cos14^\circ = \sin76^\circ, \cos87^\circ = \sin3^\circ$

$$\sin3^\circ \quad < \quad \frac{\sqrt{1}}{2} \quad < \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin47^\circ < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad < \sin76^\circ < \sin78^\circ$$

Vì $3^\circ < 47^\circ < 76^\circ < 78^\circ \Rightarrow \sin3^\circ < \sin47^\circ < \sin76^\circ < \sin78^\circ$.

Vậy : $\cos87^\circ < \sin47^\circ < \cos14^\circ < \sin78^\circ$.

b) Vì $\text{cotg}25^\circ = \text{tg}65^\circ, \text{cotg}38^\circ = \text{tg}52^\circ$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad < \quad 1 \quad < \text{tg}52^\circ < \sqrt{3} < \text{tg}62^\circ < \text{tg}65^\circ < \text{tg}73^\circ$$

Vì $52^\circ < 62^\circ < 65^\circ < 73^\circ \Rightarrow \text{tg}52^\circ < \text{tg}62^\circ < \text{tg}65^\circ < \text{tg}73^\circ$.

Vậy $\text{cotg}38^\circ < \text{tg}62^\circ < \text{cotg}25^\circ < \text{tg}73^\circ$.

Ví dụ 3. So sánh:

a) $\text{tg}25^\circ$ và $\sin25^\circ$;

b) $\text{cotg}32^\circ$ và $\cos32^\circ$;

c) $\text{tg}45^\circ$ và $\cos45^\circ$;

d) $\text{cotg}60^\circ$ và $\sin30^\circ$.

Giải

a) Ta có $\dfrac{\text{tg}25^\circ}{\sin 25^\circ} = \dfrac{\sin 25^\circ}{\cos25^\circ.\sin 25^\circ} = \dfrac{1}{\cos25^\circ} > 1$ (do $0 < \cos25^\circ < 1$).

Vậy $\text{tg}25^\circ > \sin25^\circ$.

b) Ta có $\dfrac{\text{cotg}32^o}{\cos32^o} = \dfrac{\cos32^o}{\cos32^o.\sin 32^o} = \dfrac{1}{\sin 32^o} > 1$ (do $0 < \sin 32^o < 1$).

Vậy $\text{cotg}32^o > \cos32^o$.

c) Vì $1 > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $\text{tg}45^o > \cos45^o$.

d) Vì $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ nên $\sin30^o < \text{cotg}60^o$.

III. BÀI TẬP

20. Áp dụng quan hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau để viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45^o: $\sin60^o$, $\cos75^o$, $\sin52^o30'$, $\text{cotg}82^o$, $\text{tg}80^o$.

Dạng 5
CHỨNG MINH HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Tính tỉ số lượng giác theo định nghĩa.

2. Nhân hay chia theo vế các tỉ số lượng giác.

3. Áp dụng hệ thức Py-ta-go.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Với góc nhọn α tuỳ ý, chứng minh rằng

a) $\text{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; b) $\text{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

c) $\text{tg}\,\alpha.\text{cotg}\alpha = 1$; d) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Giải (H.31)

Xét tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = \alpha$ thì :

$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC}; \quad (1)$$

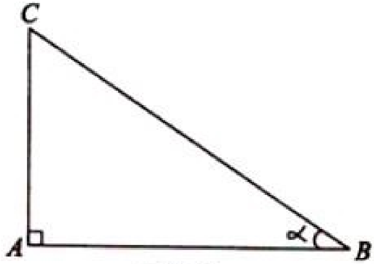
$$\cos\alpha = \frac{AB}{BC}. \quad (2)$$

a) Chia (1) cho (2) theo vế, ta được

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{AC}{BC}:\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{AB}$$

mà $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{AC}{AB}$ (3).

Vậy $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (đpcm).



Hình 31

b) Chia (2) cho (1) theo vế, ta được :

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{AB}{BC}:\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{AC}$$

Mà $\mathrm{cotg}\alpha=\frac{AB}{AC}$ (4), vậy $\mathrm{cotg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (đpcm).

c) Nhân (3) với (4) theo vế, thu được $\mathrm{tg}\,\alpha.\mathrm{cotg}\alpha=\frac{AC}{AB}.\frac{AB}{AC}=1$.

d) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\sin^2\alpha=\frac{AC^2}{BC^2}$ (5); $\cos^2\alpha=\frac{AB^2}{BC^2}$ (6).

Cộng (5) với (6) theo vế, thu được

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{AC^2+AB^2}{BC^2}=\frac{BC^2}{BC^2}=1 \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 2. Với α là góc nhọn tuỳ ý, chứng minh rằng

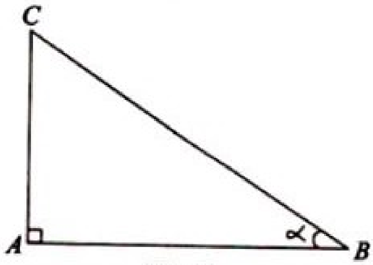
a) $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; b) $1+\mathrm{cotg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Giải (H.32)

Xét tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B}=\alpha$

thì $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{AC}{AB}\Rightarrow \mathrm{tg}^2\alpha=\frac{AC^2}{AB^2}$;

$\mathrm{cotg}\alpha=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \mathrm{cotg}^2\alpha=\frac{AB^2}{AC^2}$.



Hình 32

a) Ta có

$$VT=1+\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{AB^2+AC^2}{AB^2}=\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{1}{\left(\frac{AB}{BC}\right)^2}=\frac{1}{\cos^2\alpha}=VP \text{ (đpcm).}$$

b) Ta có

$$VT = 1 + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{1}{\left(\frac{AC}{BC}\right)^2} = \frac{1}{\sin^2\alpha} = VP \text{ (đpcm).}$$

III. BÀI TẬP

21. Sử dụng định nghĩa các tỉ số lượng giác của một góc nhọn, chứng minh rằng với góc nhọn α tuỳ ý ta có:

Kết quả 1. $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

Kết quả 2. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

22. Áp dụng kết quả của bài 21, hãy đơn giản các biểu thức sau :

a) $1 - \sin^2\alpha$;

b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

c) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$;

d) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;

e) $\text{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\tan^2\alpha$;

g) $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\text{tg}^2\alpha$;

h) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$;

i) $\text{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$.

23. Không dùng bảng số hoặc máy tính, áp dụng kết quả của bài 21, hãy tính giá trị của các biểu thức :

$A = \sin^2 15^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 75^\circ$.

$B = \cos^2 10^\circ - \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ - \cos^2 40^\circ - \cos^2 50^\circ - \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ$.

24. Cho $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{5}$. Áp dụng kết quả 1 của bài 21, hãy tính giá trị của:

a) $M = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$;

b) $N = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$;

c) $P = \frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{2\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos\alpha\sin^2\alpha}$.

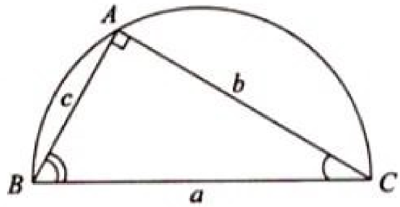
Chủ đề 3

HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Các hệ thức

Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền a và các cạnh góc vuông b, c (H.33).



Hình 33

1. Định lí : Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng :

– Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề ;

– Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề.

2. Như vậy, trong tam giác ABC vuông tại A (H.33), ta có hệ thức :

$b = a.\sin B = a.\cos C$; $\quad b = c.\mathrm{tg}B = c.\mathrm{cotg}C$;

$c = a.\sin C = a.\cos B$; $\quad c = b.\mathrm{tg}C = b.\mathrm{cotg}B$.

II. Giải tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, nếu cho trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và góc còn lại của nó. Bài toán đặt ra như thế gọi là bài toán "Giải tam giác vuông".

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
GIẢI TAM GIÁC VUÔNG BIẾT ĐỘ DÀI MỘT CẠNH VÀ SỐ ĐO MỘT GÓC NHỌN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định cạnh kề, cạnh đối. Viết tỉ số lượng giác để tìm độ dài các cạnh.

2. Tính góc nhọn còn lại nhờ quan hệ phụ nhau.

3. Thay giá trị rồi tính.

II. VÍ DỤ

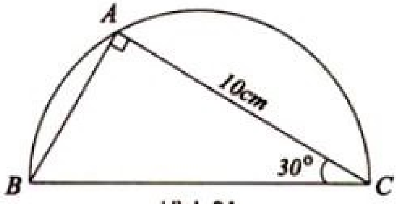
Giải tam giác ABC vuông tại A, biết :

a) $b = 10\text{cm}, \hat{C} = 30^o$; b) $c = 10\text{cm}, \hat{C} = 45^o$;

c) $a = 20\text{cm}, \hat{B} = 35^o$.

Giải

a) Vì b = 10cm, kề với góc 30^o nên cạnh AB đối diện với góc 30^o (H.34). Ta có:



Hình 34

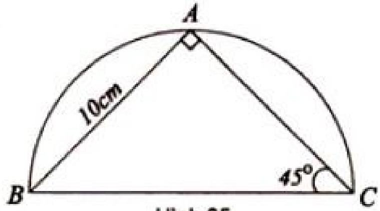
$$\tan 30^o = \frac{AB}{AC}, \text{ hay } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{10}$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,774 \text{ (cm)};$$

$$\cos 30^o = \frac{AC}{BC} \text{ hay } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11,547 \text{ (cm)}.$$

và $\hat{B} = 90^o - 30^o = 60^o$.

b) Vì AC = AB = 10cm đối diện với góc $\hat{C} = 45^o$ nên cạnh AC kề với góc 45^o (H.35).



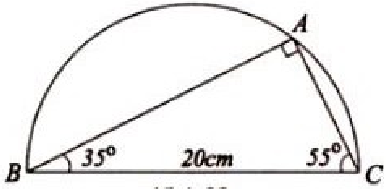
Hình 35

Do đó $\hat{B} = 90^o - 45^o = 45^o$;

$$tg45^o = \frac{AB}{AC}, \text{ hay } 1 = \frac{10}{AC} \Leftrightarrow AC = 10 \text{ (cm)};$$

$$\sin 45^o = \frac{AB}{BC} \text{ hay } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{20}{\sqrt{2}} \approx 14,142 \text{ (cm)}.$$

c) Vì $\hat{B} = 35^o$ nên $\hat{C} = 90^o - 35^o = 55^o$ và AB là cạnh kề, AC là cạnh đối với góc 35^o (H.36).



Hình 36

Do đó : $\sin 35^o = \dfrac{AC}{BC}$ hay $\dfrac{AC}{20} = \sin 35^o$

$$\Leftrightarrow AC = 20.\sin 35^o \approx 11,472 \text{ (cm)};$$

$$\frac{AB}{20} = \cos 35^o \Leftrightarrow AB = 20.\cos 35^o \approx 16,383 \text{ (cm)}.$$

III. BÀI TẬP

25. Để giải một tam giác vuông cần biết ít nhất mấy góc và cạnh ? Có lưu ý gì về số cạnh.

26. a) Tỉ số lượng giác nào có liên quan đến cạnh huyền của tam giác vuông ?

b) Nêu định lí và viết hệ thức diễn tả các tỉ số lượng giác đó.

Dạng 2
GIẢI TAM GIÁC VUÔNG BIẾT HAI CẠNH

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Áp dụng hệ thức Py-ta-go để tìm cạnh còn lại.

2. Xác định cạnh kề, cạnh đối, viết tỉ số lượng giác.

3. Tính góc nhọn còn lại nhờ quan hệ phụ nhau.

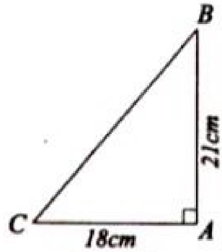
II. VÍ DỤ

Giải tam giác ABC vuông tại A, biết :

a) b = 18cm, c = 21cm ;

b) b = 28cm, c = 21cm ;

c) a = 10cm, b = 6cm.



Hình 37

Giải

a) Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A (H.37), thu được

$$BC^2 = CA^2 + AB^2, \text{ hay } BC^2 = 21^2 + 18^2 = \left(3\sqrt{85}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow BC = 3\sqrt{85} \text{ (cm) (vì } BC > 0).$$

$$tgB = \frac{AC}{AB} = \frac{18}{21} \approx 0,8571 \Rightarrow \hat{B} \approx 41^o \text{ và } \hat{C} = 49^o.$$

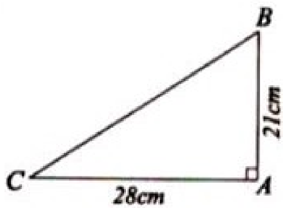
b) Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A (H.38), thu được

$$BC^2 = CA^2 + AB^2$$

hay $$BC^2 = 28^2 + 21^2 = 35^2$$

$$\Leftrightarrow BC = 35 \text{ (cm) (vì } BC > 0) ;$$

$$tgC = \frac{AB}{AC} = \frac{21}{28} = 0,75 \Rightarrow \hat{C} \approx 37^o \text{ và } \hat{B} = 53^o.$$



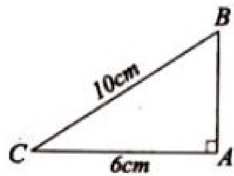
Hình 38

c) Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A (H.39), thu được

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } 10^2 = 6^2 + AB^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 8^2 \Leftrightarrow AB = 8 \text{ (cm) (vì } AB > 0) ;$$

$$tgB = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{8} = 0,75 \Rightarrow \hat{B} \approx 37^o \text{ và } \hat{C} = 53^o.$$



Hình 39

III. BÀI TẬP

27. a) Tỉ số lượng giác nào liên quan đến cả hai cạnh góc vuông của tam giác vuông ?

b) Nêu định lí và viết hệ thức diễn tả các tỉ số lượng giác đó.

28. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} = \alpha$ $(\alpha < 90^o)$, AB = c, AC = b.

a) Chứng minh rằng $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc.\sin\alpha$.

b) Trên tia AB lấy D, trên tia AC lấy E sao cho AD = m, AE = n.

Chứng minh rằng $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{bc}{mn}$.

Dạng 3
TÍNH CẠNH, TÍNH GÓC CỦA TAM GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Kẻ thêm đường cao xuống cạnh kề của góc đã biết.

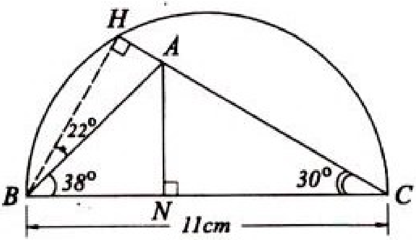
2. Chuyển bài toán về giải tam giác vuông biết một cạnh và một góc.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, trong đó BC = 11cm, $\widehat{ABC} = 38^o$, $\widehat{ACB} = 30^o$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC. Hãy tính :

a) Độ dài đoạn thẳng AN ;

b) Độ dài cạnh AC.



Hình 40

Giải (H.40)

Kẻ BH vuông góc AC thì tam giác BHC vuông tại H nên $\widehat{C} = 30^o$ phụ với góc HBC $\Rightarrow \widehat{HBC} = 60^o$ và $\widehat{HBA} = 60^o - 38^o = 22^o$.

Do đó : BH = $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.11 = 5,5$ (cm) (vì trong một tam giác vuông cạnh đối diện với góc 30^o bằng một nửa cạnh huyền).

a) Tam giác BHA vuông tại H, cạnh huyền BA và cạnh BH = 5,5cm kề với $\widehat{B} = 22^o$, nên $\cos 22^o = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{5,5}{\cos 22^o} \approx 5,932$ (cm).

Kẻ AN vuông góc với BC. Trong tam giác ABN vuông tại N có AN đối diện với góc 38^o nên

$$\sin 38^o = \frac{AN}{AB} \Rightarrow AN = AB.\sin 38^o = 5,932.\sin 38^o \approx 3,652.$$

b) ΔANC vuông tại N, $\widehat{C} = 30^o$ nên $AC = \dfrac{AN}{\sin 30^o} \approx \dfrac{3,652}{0,5} = 7,304$ (cm).

Ví dụ 2. Trong hình 41, AC = 8cm, AD = 9,6cm, $\widehat{ABC} = 90^o$, $\widehat{ACB} = 54^o$ và $\widehat{ACD} = 74^o$. Hãy tính:

a) Độ dài đoạn thẳng AB ;

b) Số đo góc $\widehat{ADC}$.

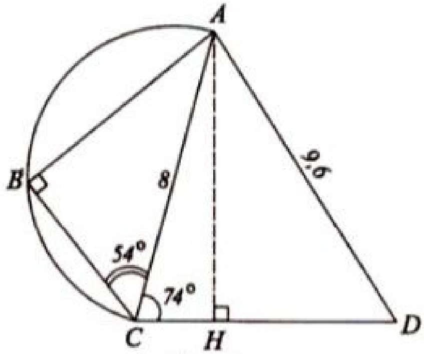
Giải (H.41)

a) Vì AB là cạnh đối diện với góc 54^o của tam giác ABC vuông tại B, cạnh huyền AC = 8cm, nên

$$\sin 54^o = \frac{AB}{AC}$$

$$\Leftrightarrow AB = AC.\sin 54^o$$

$$= 8.\sin 54^o \approx 6,472 \text{ (cm)}.$$



Hình 41

b) Kẻ AH vuông góc CD thì AH là cạnh đối diện với góc 74^o của tam giác ACH vuông tại H có cạnh huyền AC = 8cm, nên

$$\sin 74^o = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow AH = AC.\sin 74^o = 8.\sin 74^o \approx 7,690 \text{ (cm)}.$$

Lại có AH là cạnh đối với góc ADC của tam giác AHD vuông tại H có cạnh huyền AD = 9,6cm, nên

$$\sin D = \frac{AH}{AD} = \frac{7,690}{9,6} \approx 0,8010 \Rightarrow \widehat{D} \approx 53^o.$$

III. BÀI TẬP

29. Tính cạnh huyền và diện tích của một tam giác vuông cân nếu a là cạnh góc vuông.

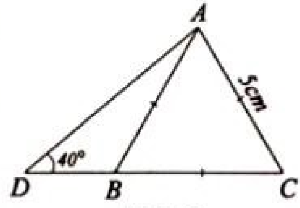
30. *Nửa tam giác đều* là cụm từ dùng để chỉ tam giác vuông có góc 60^o (hoặc 30^o). Tính hai cạnh góc vuông và diện tích của nửa tam giác đều có cạnh huyền là a.

31. Tính chiều cao và diện tích của một tam giác đều cạnh a.

32. Cho tam giác đều ABC cạnh 5cm và góc ADB bằng 40^o (H.42). Hãy tính :

a) Độ dài đọan AD ;

b) Độ dài đọan DB.



Hình 42

33. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Biết HB = 25cm, HC = 64cm. Tính $\hat{B}$, $\hat{C}$.

34. Cho tam giác ABC có BC = 6cm, $\hat{B} = 60^o$, $\hat{C} = 40^o$. Tính :

a) Chiều cao CH và cạnh AC ;

b) Diện tích tam giác ABC.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

CHỦ ĐỀ 1

1. a) (H.10). Áp dụng hệ thức về cạnh $b^2 = b'a$, thu được

$$10^2 = 8(y + 8) \Leftrightarrow y = \frac{9}{2}.$$

Áp dụng hệ thức về cạnh : $c^2 = c'a$, ta được

$$x^2 = \frac{9}{2}\left(8 + \frac{9}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}.$$

b) (H.11). Áp dụng hệ thức về cạnh : $c^2 = c'a$, ta được

$$30^2 = y(y + 32) \Leftrightarrow (y - 18)(y + 50) = 0 \Leftrightarrow y = 18 \text{ (vì } y + 50 > 0).$$

Áp dụng hệ thức về cạnh : $b^2 = b'a$, ta được

$$x^2 = 32(32 + 18) \Leftrightarrow x^2 = 40^2 \Leftrightarrow x = 40.$$

2. Áp dụng hệ thức Py-ta-go ta được $BC^2 = CA^2 + AB^2$ hay

$$13^2 = CA^2 + 12^2 \Leftrightarrow CA^2 = 5^2 \Leftrightarrow CA = 5 \text{ (cm) (vì } CA > 0)$$

Áp dụng hệ thức về đường cao ah = bc, ta có

$$13.AH = 12.5 \Rightarrow AH = \frac{60}{13} \text{ (cm)}.$$

Áp dụng hệ thức về cạnh ta được $c^2 = c'a$,

$$12^2 = BH.13 \Leftrightarrow BH = \frac{144}{13} \text{ (cm), từ đó } CH = 13 - \frac{144}{13} = \frac{25}{13} \text{ (cm)}.$$

Diện tích ΔABC là $S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}.12.5 = 30 \text{ (cm}^2\text{)}$.

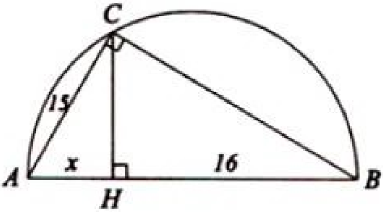
3. (H.43) Gọi $AH = x > 0$ thì $AB = x + 16$.

Áp dụng hệ thức về cạnh cho tam giác CAB vuông tại C ta được :

$$15^2 = x(x + 16) \Leftrightarrow (x + 8)^2 = 17^2$$

$$\Leftrightarrow x + 8 = 17 \text{ (vì } x > 0) \Leftrightarrow x = 9.$$

Áp dụng hệ thức về đường cao : $h^2 = b'c'$, ta được $CH^2 = 9.16 = 12^2 \Leftrightarrow CH = 12$.



Hình 43

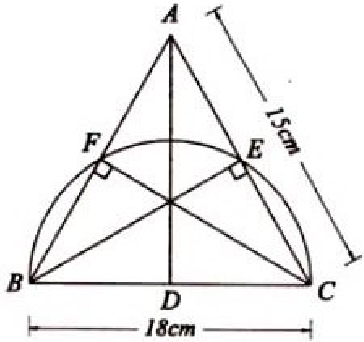
Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}.25.12 = 150$ (đvdt).

4. (H.44) Kẻ các đường cao AD, BE, CF thì $BD = DC = \frac{BC}{2} = 9\text{cm}$ vì tam giác ABC cân tại A.

Lại có $\Delta BEC = \Delta CFB$, suy ra $BE = CF$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AD.BC = \frac{1}{2}AD.18$$

$$= \frac{1}{2}BE.AC = \frac{1}{2}BE.15.$$



Hình 44

Suy ra $\frac{AD}{BE} = \frac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} AD = 5t \\ BE = 6t \end{cases}$ (với $t > 0$).

Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho ΔADC vuông tại D, thu được

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \text{ hay } 15^2 = 25t^2 + 9^2 \Leftrightarrow 25t^2 = 12^2$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{12}{5} \text{ (vì } t > 0).$$

Vậy $AD = 12$ (cm) và $BE = \frac{72}{5}$ (cm).

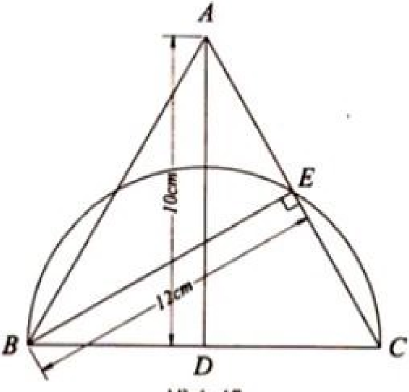
5. (H.45) Xét tam giác ABC cân tại A có chiều cao ứng với cạnh đáy AD = 10cm, chiều cao BE ứng với cạnh bên 12cm. Vì tam giác ABC cân tại A nên đường cao AD đồng thời là trung tuyến, do đó

$$BD = DC = x \text{ (cm) } (x > 0).$$

Tính diện tích tam giác ABC bằng hai cách :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AD.BC = \frac{1}{2}.10.2x$$

và $$S_{ABC} = \frac{1}{2}BE.AC = \frac{1}{2}.12.AC$$



Hình 45

suy ra $20x = 12AC$.

hay $\dfrac{x}{AC} = \dfrac{3}{5}$ suy ra $\begin{cases} x = 3t \\ AC = 5t \end{cases}$ (với $t > 0$).

Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho ΔADC vuông tại D, thu được

$$AC^2 = CD^2 + DA^2 \text{ hay } 25t^2 = 9^2 + 10^2$$

$$\Rightarrow t^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \Rightarrow t = \frac{5}{4} \text{ (vì } t > 0).$$

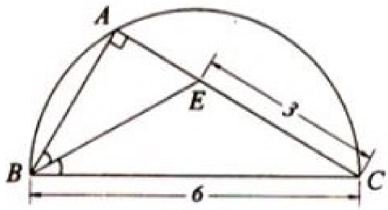
Từ đó $2x = 6t = 6.\dfrac{5}{4} = \dfrac{15}{2}$ (cm).

Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.10.15 = \dfrac{75}{2}$ (cm^2).

6. (H.46) Áp dụng tính chất đường phân giác

$$\frac{EA}{AB} = \frac{EC}{CB} \text{ hay } \frac{EA}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\begin{cases} EA = x \\ AB = 2x \end{cases}$ (với $x > 0$).



Hình 46

Áp dụng hệ thức Py-ta-go, ta được

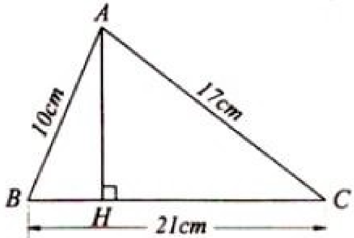
$$(2x)^2 + (x + 3)^2 = 6^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(5x - 9) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$$

(vì $x + 3 > 0$).

Vậy $AB = \dfrac{18}{5}$, $AC = \dfrac{24}{5}$.

7. (H.47) Xét tam giác ABC có AB = 10cm, BC = 21cm, CA = 17cm.



Hình 47

Kẻ đường cao $AH \perp BC$ thì

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.21.AH.$$

Gọi BH = x (cm) (x > 0) thì HC = 21 − x.

Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho hai tam giác vuông ABH và AHC, thu được

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 10^2 - x^2; \quad (1)$$

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = 17^2 - (21 - x)^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

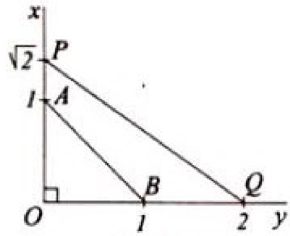
$$17^2 - (21 - x)^2 = 10^2 - x^2$$

$$\Rightarrow 42x = 252 \Rightarrow x = 6.$$

Thay x = 6 vào (1) ta được $AH^2 = 8^2 \Leftrightarrow AH = 8$ (cm) (vì AH > 0).

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}.21.8 = 84(cm^2)$.

8. (H.48) Gọi $PQ = \sqrt{6} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2}$ thì PQ là cạnh huyền của tam giác vuông có cạnh là 2, $\sqrt{2}$.



Hình 48

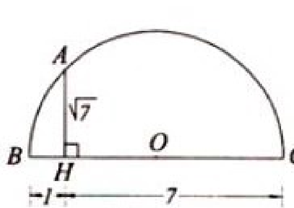
Bước 1. Dựng góc vuông xOy.

Bước 2. Lấy $A \in Ox$, $B \in Oy$ sao cho OA = OB = 1 thì $AB = \sqrt{2}$.

Bước 3. Lấy $P \in Ox$, $Q \in Oy$ sao cho $OP = AB = \sqrt{2}$, OQ = 2. Ta có $PQ = \sqrt{6}$ là đoạn thẳng cần dựng.

9. (H.49) Gọi $AH = \sqrt{1.7}$ thì AH là đường cao thuộc cạnh huyền của ΔABC vuông tại A. Dựng nửa đường tròn tâm O đường kính

$$BC = 1 + 7 = 8.$$



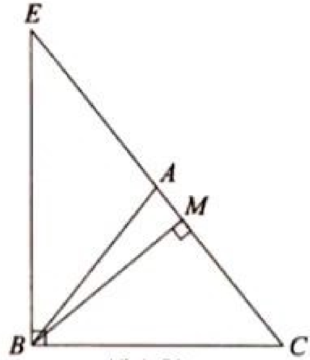
Hình 49

Lấy $H \in BC$ sao cho BH = 1. Kẻ $Hz \perp BC$ cắt nửa đường tròn tại A thì $AH = \sqrt{7}$ là đoạn thẳng cần dựng.

10. (H.50) Lấy E đối xứng với C qua A thì ΔBCE vuông tại B.

Áp dụng hệ thức về cạnh $b^2 = b'a$, ta được

$BC^2 = MC.CE \Rightarrow MC = \dfrac{BC^2}{CE} = \dfrac{BC^2}{2AC}$ (1)



Hình 50

Mặt khác:

$AM = AC - MC$

$= AC - \dfrac{BC^2}{2AC} = \dfrac{2AC^2 - BC^2}{2AC}$. (2)

Chia (2) cho (1) theo từng vế ta được

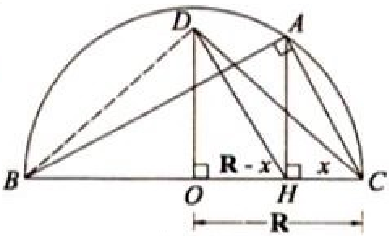
$\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{2AC^2 - BC^2}{BC^2} = 2\left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2 - 1$ (đpcm).

11. (H.51) Gọi O là trung điểm của BC.

Đặt $OB = OC = R > 0$. Do $DB = DC = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$ (gt), nên DO là trung trực của đoạn BC hay ΔDOC vuông tại O.

Gọi $HC = x$ thì

$OH = R - x$ và $BH = 2R - x$.



Hình 51

Áp dụng hệ thức về đường cao cho ΔABC vuông tại A, ta được

$AH^2 = HC.HB = x(2R - x)$

$= 2Rx - x^2$. (1)

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào ΔDOC và DOH vuông tại O, thu được

$DC^2 = OC^2 + DO^2 = R^2 + DO^2$ (2)

$DH^2 = DO^2 + OH^2 = DO^2 + (R - x)^2 \Rightarrow DO^2 = DH^2 - (R - x)^2$ (3)

Thế (3) vào (2), thu được

$DC^2 = R^2 + DH^2 - R^2 + 2Rx - x^2 = DH^2 + AH^2$ (do 1). (4)

Lại có DC = BD (theo gt) nên $BD^2 = DH^2 + AH^2$. Điều này chứng tỏ BD, DH, AH là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông (theo định lí Py-ta-go đảo).

12*. (H.52) Áp dụng hệ thức về cạnh cho ΔABC vuông tại A, ta được

$AC^2 = CH.CB$ (1)

$AB^2 = BH.CB$ (2)

Chia (1) cho (2) theo từng vế, thu được

$\dfrac{CH}{BH} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$. (3)

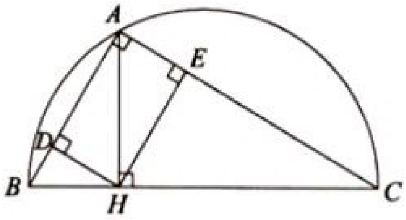
1) Áp dụng hệ thức về cạnh vào Δ AHC và AHB vuông tại H, ta được

$$CH^2 = CE.CA ; \qquad (4)$$

$$BH^2 = BD.BA. \qquad (5)$$

Chia (4) cho (5) theo từng vế, ta được

$$\frac{CE}{BD} = \frac{CH^2}{BH^2} \cdot \frac{AB}{CA}. \qquad (6)$$



Hình 52

Thế (3) vào (6) ta có $\frac{CE}{BD} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^3$ (đpcm).

2) Nhân (4) với (5) theo từng vế, ta được

$$(BH.CH)^2 = BD.CE.BA.CA. \qquad (7)$$

Lại có $AH^2 = BH.CH$, $AH.BC = BA.CA$. (9)

Thay (8) và (9) vào (7), thu được

$$AH^4 = BD.CE.AH.BC, \text{ hay } AH^3 = BC.BD.CE.$$

3) Từ (4) và (5) suy ra :

$$CH^2.CB^2 = CE.CA.BC^2 ;$$

$$BH^2.BC^2 = BD.BA.BC^2.$$

Hay

$$CA^4 = CE.CA.BC^2;$$

$$BA^4 = BD.BA.BC^2.$$

suy ra

$$\left.\begin{aligned} CE &= \frac{CA^3}{BC^2} \\ BD &= \frac{BA^3}{BC^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad CE^2 = \frac{CA^6}{BC^4} \qquad (10)$$

$$\text{và } BD^2 = \frac{BA^6}{BC^4} \qquad (11)$$

Nên $BD^2 + CE^2 = \frac{BA^6 + CA^6}{BC^4} = \frac{(BA^2 + CA^2)^3 - 3BA^2.CA^2(BA^2 + CA^2)}{BC^4}$

$$= \frac{BC^6 - 3BC^4.AH^2}{BC^4} = BC^2 - 3AH^2.$$

Vậy $3AH^2 + BD^2 + CE^2 = BC^2$ (đpcm).

4) Từ (10) và (11) suy ra

$$\left.\begin{aligned} CA^6 &= CE^2.BC^4 \\ BA^6 &= BD^2.BC^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow CA^2 = \sqrt[3]{CE^2.BC^4};\ BA^2 = \sqrt[3]{BD^2.BC^4}.$$

Do đó $BC^2 = CA^2 + BA^2 = \sqrt[3]{CE^2.BC^4} + \sqrt[3]{BD^2.BC^4} = \sqrt[3]{BC^6}$. (12)

Chia cả hai vế của (12) cho $\sqrt[3]{BC^4} > 0$ ta được

$$\sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2} = \sqrt[3]{BC^2} \text{ (dpcm).}$$

CHỦ ĐỀ 2

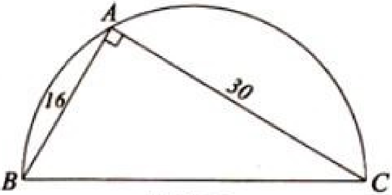
13. a) Trước hết đổi độ dài cạnh AC ra mm.

$AC = 3cm = 30mm$.

Vì 30 là cạnh đối của góc B (H.53) mặt khác góc C phụ với góc B nên

$$tgB = cotgC = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$$

và $$tgC = cotgB = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}.$$



Hình 53

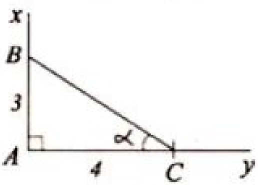
Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC, thu được

$BC^2 = CA^2 + AB^2$ hay $BC^2 = 30^2 + 16^2 = 34^2 \Leftrightarrow BC = 34$ (vì $BC > 0$).

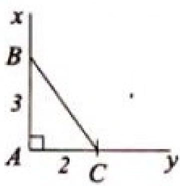
Vậy : $sinB = cosC = \dfrac{30}{34} = \dfrac{15}{17}$ và $sin^2B + sin^2C = sin^2B + cos^2B = 1$.

(Theo ví dụ 1).

14. Vì $tg\alpha = \dfrac{3}{4} = \dfrac{\text{Cạnh đối}}{\text{Cạnh kề}}$ nên 3 và 4 là độ dài 2 cạnh góc vuông của tam giác ABC. Trong tam giác này góc C đối diện với cạnh bằng 3, vậy $\widehat{C} = \alpha$ (H.54).



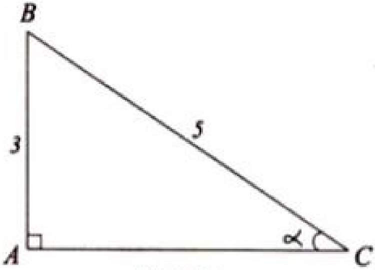
Hình 54



Hình 55

15. Vì $\cot g\alpha = \dfrac{3}{2} = \dfrac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh đối}}$ nên 3 và 2 là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác ABC. Góc B kề với cạnh bằng 3, vậy $\hat{B} = \alpha$ (H.55).

16. Vì $\sin\alpha = \dfrac{3}{5} = \dfrac{\text{Cạnh đối}}{\text{Cạnh huyền}}$ nên α là góc nhọn của tam giác ABC có cạnh góc vuông AB = 3, cạnh huyền BC = 5.



Hình 56

$\hat{C}$ đối diện với cạnh AB = 3, nên $\hat{C} = \alpha$ (H.56).

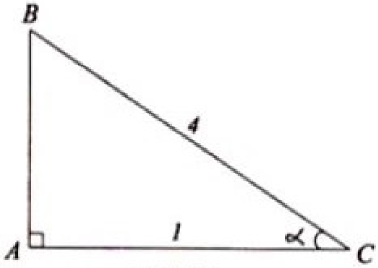
Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A, thu được

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } 5^2 = 3^2 + CA^2$$

$$\Leftrightarrow CA^2 = 4^2 \Leftrightarrow CA = 4 \text{ (vì } CA > 0).$$

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $tg\alpha = \dfrac{3}{4}$.

17. Vì $\cos\alpha = \dfrac{1}{4} = \dfrac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh huyền}}$ nên α là góc nhọn của tam giác vuông ABC có cạnh góc vuông AC = 1, cạnh huyền BC = 4. Trong tam giác này góc C kề với cạnh bằng 1 nên góc C = α (H.57).



Hình 57

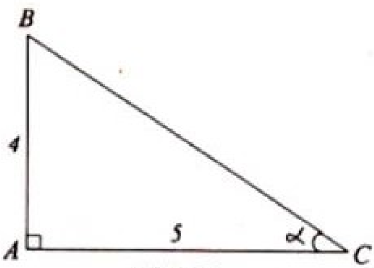
Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho tam giác ABC vuông tại A thu được

$BC^2 = CA^2 + AB^2$, hay $4^2 = 1^2 + AB^2$

$$\Leftrightarrow AB^2 = \left(\sqrt{15}\right)^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{15} \text{ (vì } AB > 0).$$

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $tg\alpha = \sqrt{15}$.

18. Vì $tg\alpha = \dfrac{4}{5} = 0,8 = \dfrac{\text{Cạnh đối}}{\text{Cạnh kề}}$ nên α là góc nhọn của tam giác vuông ABC có hai cạnh góc vuông là AB = 4, AC = 5. Trong tam giác này góc C đối diện với cạnh 4 nên $\hat{C} = \alpha$ (H.58).



Hình 58

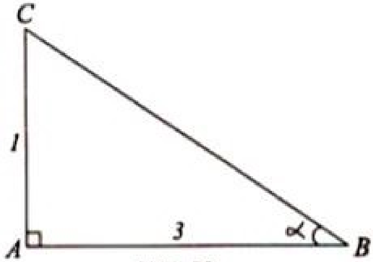
Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho tam giác ABC vuông tại A, ta được

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 \text{ hay } BC^2 = 4^2 + 5^2 = \left(\sqrt{41}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow BC = \sqrt{41} \text{ (vì } BC > 0).$$

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$.

19. Vì $\cot g\alpha = \dfrac{3}{1} = 0,8 = \dfrac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh đối}}$ nên α là góc nhọn của tam giác vuông ABC có hai cạnh góc vuông là AB = 3, AC = 1. Trong tam giác này góc B kề với cạnh 3 nên $\widehat{B} = \alpha$ (H.59).



Hình 59

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A, ta được

$BC^2 = CA^2 + AB^2$ hay $BC^2 = 1^2 + 3^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow BC = \sqrt{10}$ (vì $BC > 0$).

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

20. Vì góc 60^o phụ với góc 30^o nên $\sin 60^o = \cos 30^o$;

75^o phụ với góc 15^o nên $\cos 75^o = \sin 15^o$;

$52^o30'$ phụ với $37^o30'$ nên $\sin 52^o30' = \cos 37^o30'$;

82^o phụ với 8^o nên $\cot g 82^o = tg 8^o$;

10^o phụ với 80^o nên $tg 80^o = \cot g 10^o$.

21. Xem Ví dụ 1.

22. Áp dụng kết quả 1 : $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; kết quả 2 : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

a) Thay $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ thu được :

$$1 - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1^2 = 1.$

c) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$

d) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 1 = 2.$

e) $tg^2\alpha - \sin^2\alpha tg^2\alpha = tg^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = tg^2\alpha\cos^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

g) $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha \text{tg}^2\alpha = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

h) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha = \sin\alpha(1-\cos^2\alpha) = \sin\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha) = \sin^3\alpha.$

i) $\text{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1) = \text{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

23. Vì 15^o và 75^o, 25^o và 65^o, 35^o và 55^o là các cặp góc phụ nhau nên

$$\sin^2 15^o + \sin^2 75^o = \sin^2 15^o + \cos^2 15^o = 1\ ;$$

$$\sin^2 25^o + \sin^2 65^o = \sin^2 15^o + \cos^2 15^o = 1\ ;$$

$$\sin^2 35^o + \sin^2 55^o = \sin^2 35^o + \cos^2 35^o = 1 \text{ và } \sin^2 45^o = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Vậy $A = 1 + 1 + 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$.

Vì 10^o và 80^o, 20^o và 70^o, 40^o và 50^o là các cặp góc phụ nhau nên

$$\cos^2 10^o + \cos^2 80^o = \cos^2 10^o + \sin^2 10^o = 1\ ;$$

$$\cos^2 20^o + \cos^2 70^o = \cos^2 20^o + \sin^2 20^o = 1\ ;$$

$$\cos^2 40^o + \cos^2 50^o = \cos^2 40^o + \sin^2 40^o = 1 \text{ và } \cos^2 30^o = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

$\Rightarrow B = 1 - 1 - 1 + \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{4}$.

24. Theo kết quả 1 của bài 21, ta có $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Với $\text{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha = 3t \\ \cos\alpha = 5t\end{cases} (t > 0)$.

Thay $\sin\alpha = 3t$ và $\cos\alpha = 5t$ vào các biểu thức, ta có:

a) $M = \dfrac{3t + 5t}{3t - 5t} = \dfrac{8t}{-2t} = -4$. b) $N = \dfrac{3t.5t}{9t^2 - 25t^2} = \dfrac{15t^2}{-16t^2} = -\dfrac{15}{16}$;

c) $P = \dfrac{(3t)^3 + (5t)^3}{2.3t(5t)^2 + 5t(3t)^2} = \dfrac{152t^3}{195t^3} = \dfrac{152}{195}$.

CHỦ ĐỀ 3

25. Để giải một tam giác vuông cần biết ít nhất một yếu tố về cạnh, nhiều nhất một yếu tố về góc (trong đó số cạnh không được quá hai).

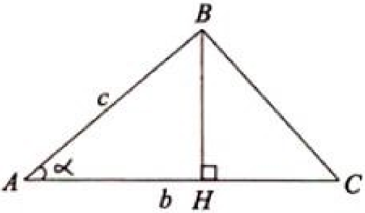
26. a) sin và côsin của góc nhọn α là các tỉ số lượng giác liên quan đến cạnh huyền của một tam giác vuông.

b) Xem SGK trang 86.

27. a) tang và côtang của góc α là các tỉ số lượng giác có liên quan đến cả hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông.

b) Xem SGK toán 9 trang 86.

28. Kẻ BH vuông góc AC thì BH là đường cao của tam giác ABC (H.60).



Hình 60

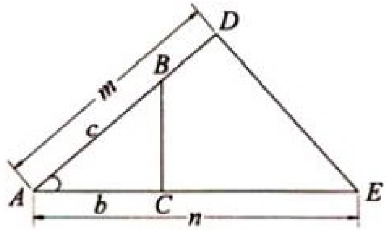
a) BH là đối diện với $\widehat{A} = \alpha$ của tam giác ABH vuông tại H có cạnh huyền AB = c.

Nên $\sin\alpha = \dfrac{BH}{BA}$ hay $BH = c.\sin\alpha$.

Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BH.AC = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ (đpcm).

b) Áp dụng kết quả câu a cho hình 61, ta được :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{1}{2}bc\sin\alpha}{\frac{1}{2}mn\sin\alpha} = \frac{bc}{mn} \text{ (đpcm).}$$



Hình 61

29. Xét tam giác ABC vuông cân tại A có

AB = AC = a (H.62).

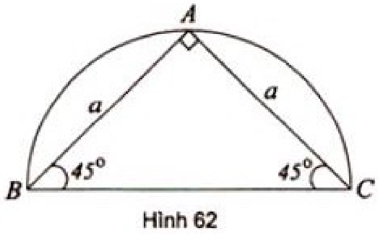
Ta có $S = \dfrac{1}{2}a^2 \sin A = \dfrac{1}{2}a^2$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên

$\widehat{B} = \widehat{C} = 45^o$ (H.62).

Do đó $\sin 45^o = \dfrac{CA}{BC}$

$\Leftrightarrow BC = \dfrac{a}{\sin 45^o} = a\sqrt{2}$.



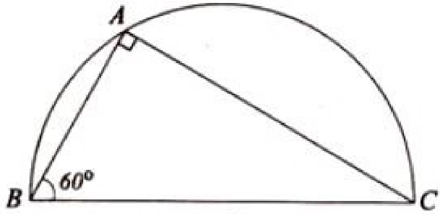
Hình 62

30. Xét tam giác ABC vuông tại A có góc B = 60^o (H.63).

Vì AB là cạnh kề của góc 60^o nên

$$\cos 60^o = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{a}$$

hay $\frac{1}{2} = \frac{AB}{a} \Leftrightarrow AB = \frac{a}{2}$;



Hình 63

AC là cạnh đối diện với góc 60^o nên

$$\sin 60^o = \frac{AC}{CB}$$

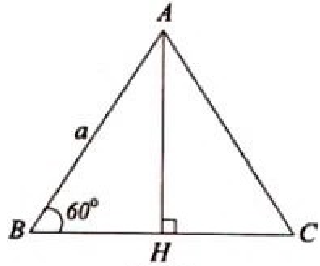
hay $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{a} \Leftrightarrow AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích của tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

31. Xét tam giác ABC đều cạnh a (H.64).

Kẻ AH vuông góc BC thì AH là cạnh đối với góc 60^o nên

$$\frac{AH}{AB} = \sin 60^o \text{ hay } \frac{AH}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Hình 64

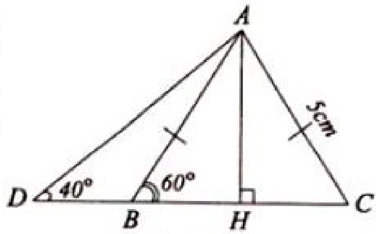
Diện tích tam giác đều ABC là

$$S = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

32. Trên hình 65 kẻ AH vuông góc BC thì AH vừa là đường cao vừa là trung tuyến của tam giác đều ABC, nên BH = 2,5cm.

a) Vì AH là cạnh đối diện với góc 60^o của tam giác ABH vuông tại H có cạnh huyền AB = 5, nên

$$\sin 60^o = \frac{AH}{AB} \text{ hay } AH = \frac{5.\sqrt{3}}{2}.$$



Hình 65

Mặt khác AH là cạnh đối diện với góc 40^o của tam giác ADH tại H nên

$$\sin 40^o = \frac{AH}{AD} \text{ hay } AD = \frac{5\sqrt{3}}{2\sin 40^0} \approx 6,73 \text{ (cm)}.$$

b) Vì AH là cạnh đối diện với góc 40^o của tam giác ADH vuông tại H nên :

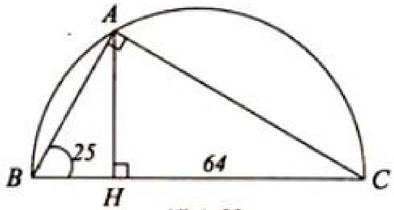
$$\text{tg}40^o = \frac{AH}{HD}, \text{ hay } HD = \frac{5\sqrt{3}}{2\text{tg}40^o} \approx 5,160.$$

Vậy $DB = DH - BH \approx 5,160 - 2,5 \approx 2,66$ (cm).

33. Trên hình 66 : Áp dụng hệ thức về đường cao $h^2 = b'c'$, thu được :

$$AH^2 = 25.64 = 40^2$$

$$\Leftrightarrow AH = 40 \text{ (vì } AH > 0).$$



Hình 66

Vì AH là cạnh đối diện với $\hat{B}$ của tam giác ABH vuông tại H nên

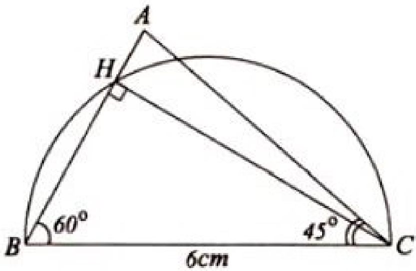
$$\text{tg}B = \frac{AH}{BH} = \frac{40}{25} = 1,6 \Rightarrow \hat{B} \approx 57^o59'.$$

Do $\hat{C}$ phụ với $\hat{B}$ nên $\hat{C} = 90^o - \hat{B} \approx 32^o1'$.

34. a) Trên hình 67, đường cao CH là cạnh đối diện với góc 60^o của tam giác BHC vuông tại H cạnh huyền BC = 6cm nên

$$\sin60^o = \frac{CH}{BC}$$

hay $CH = 6\sin60^o \approx 5,196$ (cm).



Hình 67

Vì $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$

nên $\hat{A} = 180^o - 100^o = 80^o$, CH là cạnh đối diện với góc 80^o, do đó

$$\sin80^o = \frac{CH}{CA} \text{ hay } CA = \frac{5,196}{\sin80^o} \approx 5,276 \text{ (cm)}.$$

b) Áp dụng kết quả câu a) bài 28 thì

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}CA.CB.\sin40^o = \frac{1}{2}.6.5,276\sin40^o \approx 10,174 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Chương 2

ĐƯỜNG TRÒN

Chủ đề 1

SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN

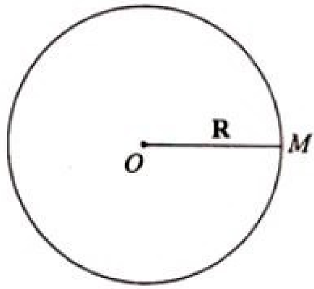
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Ba khái niệm cơ bản

1. Đường tròn tâm O, bán kính R (với R > 0) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng R. Kí hiệu (O, R) hay gọn hơn (O).

2. Đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trên đường tròn gọi là một dây của đường tròn (H.68).

3. Dây đi qua tâm là đường kính của đường tròn (đường kính dài gấp đôi bán kính).



Hình 68

II. Ba vị trí tương đối của điểm M và đường tròn (O, R)

1. M nằm trên (O, R) $\Leftrightarrow$ OM = R.

2. M nằm trong (O, R) $\Leftrightarrow$ OM < R.

3. M nằm ngoài (O, R) $\Leftrightarrow$ OM > R.

III. Ba điều kiện để xác định đường tròn

1. Một đường tròn được xác định khi biết tâm và bán kính của nó (tiên đề về cái compa).

2. Một đường tròn được xác định khi biết một đoạn thẳng là đường kính của đường tròn đó.

3. Qua ba điểm không thẳng hàng ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

IV. Tính chất đối xứng của đường tròn

Đường tròn là hình vừa có tâm đối xứng vừa có trục đối xứng : Tâm đối xứng chính là tâm của đường tròn : Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM CÙNG THUỘC MỘT ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Chứng minh các điểm đã cho cách đều một điểm.

II. VÍ DỤ

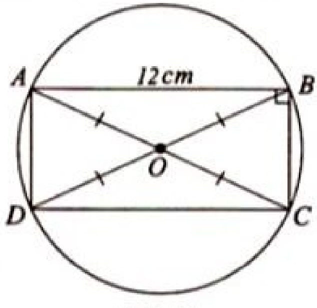
Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 12cm, BC = 5cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

***Giải** (H.69)*

Gọi $O = AC \cap BD$, ta có

$$OA = OB = OC = OD$$

(theo tính chất về đường chéo của hình chữ nhật).



Hình 69

Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O, OA).

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại B, ta thu được

$$AC^2 = CB^2 + BA^2 \text{ hay } AC^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow AC = 13 \text{ (cm)}.$$

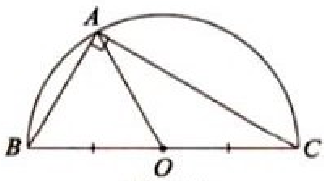
Vậy bán kính của đường tròn là :

$$OA = \frac{1}{2}AC = \frac{13}{2} = 6,5 \text{ (cm)}.$$

Ví dụ 2. Chứng minh các định lí sau :

a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.

b) Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.



Hình 70

Giải

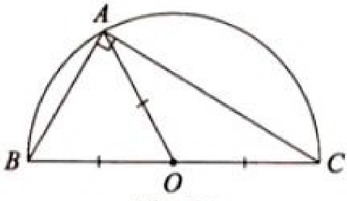
a) Xét tam giác ABC vuông tại A (H.70).

Gọi O là trung điểm của BC thì AO là trung tuyến thuộc cạnh huyền, nên OA = OB = OC. Điều này chứng tỏ O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vậy tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.

b) Xét tam giác ABC nội tiếp (O) đường kính BC, OA = OB = OC (vì là bán kính) (H.71).

Lúc đó AO là trung tuyến ứng với cạnh BC và $OA = \frac{1}{2}BC$.

Vậy tam giác ABC vuông tại A.



Hình 71

Nhận xét quan trọng :

Từ đây trở đi được áp dụng kết quả : Nếu các tam giác vuông có chung cạnh huyền thì các đỉnh góc vuông của tam giác vuông đó cùng thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm của cạnh huyền chung đó.

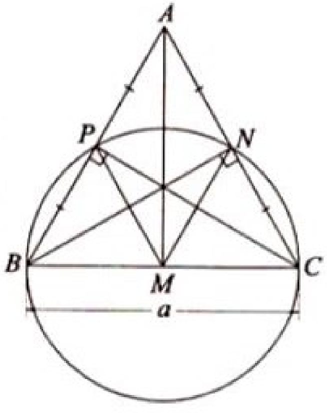
Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng bốn điểm B, P, N, C cùng thuộc một đường tròn. Hãy vẽ đường tròn đó.

Giải (H.72)

Vì ABC là tam giác đều nên AB = BC = CA = a.

Do AM, BN, CP là các trung tuyến nên M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, suy ra MN, MP là các đường trung bình của tam giác đều ABC.

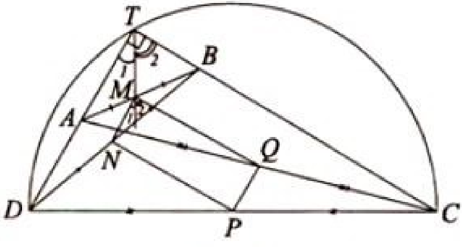
Lúc đó $MN = MP = MB = MC = \frac{a}{2}$ (tính chất đường trung bình). Vậy bốn điểm B, P, N, C cùng thuộc đường tròn $(M, \frac{a}{2})$.



Hình 72

Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD có $\hat{C} + \hat{D} = 90^o$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Giải (H.73)



Hình 73

Gọi $I = DA \cap CB$. Vì $\hat{C} + \hat{D} = 90^o$ (theo gt), nên $\widehat{DIC} = 90^o$.

Do M, N, P, Q là trung điểm của AB, BD, DC, CA nên MN, NP, PQ, QM lần lượt là các đường trung bình của tam giác : ADB, BCD, ADC, BCA, suy ra MN // AD, PQ // AD, MQ // BC, NP // BC do đó : MN // PQ, NP // MQ, suy ra tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Lại có $\begin{cases} \widehat{M_1} = \widehat{I_1} \\ \widehat{M_2} = \widehat{I_2} \end{cases}$ (vì đồng vị) $\Rightarrow \widehat{MNQ} = \widehat{I_1} + \widehat{I_2} = \hat{I} = 90^o$ nên MNPQ là hình chữ nhật. Theo Ví dụ 1, M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

III. BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC ($\hat{A} = 90^o$), đường cao AH. Từ M là điểm bất kì trên cạnh BC kẻ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$. Chứng minh năm điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

2. Cho tam giác ABC ($\hat{A} = 90^o$) gọi D là điểm đối xứng với A qua cạnh BC. Chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

3. Cho hình chữ nhật ABCD vẽ tam giác AEC vuông tại E. Chứng minh năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

4. Cho hình vuông ABCD.

a) Chứng minh rằng bốn đỉnh của hình vuông cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tính bán kính của đường tròn đó biết cạnh của hình vuông bằng 2dm.

5. Cho tam giác ABC, các đường cao BD, CE. Chứng minh rằng bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn.

6. Cho tứ giác ABCD có $\hat{B} = \hat{D} = 90^o$.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

b) Nếu AC = BD thì tứ giác ABCD là hình gì?

7. Cho tứ giác ABCD có $AC \perp BD$. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Dạng 2
XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Tam giác thường. Vẽ hai đường trung trực, giao điểm của hai đường trung trực là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

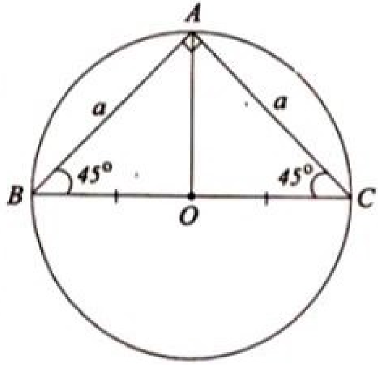
2. Tam giác vuông. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền.

3. Tam giác cân. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác thuộc đường cao hạ từ đỉnh đến đáy.

4. Tam giác đều. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác trùng với trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác vuông cân có các cạnh góc vuông bằng a.



Hình 74

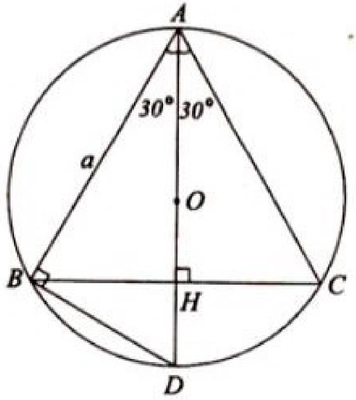
Giải (H.74)

Xét tam giác ABC vuông tại A, có hai cạnh góc vuông là AB = AC = a. Gọi O là trung điểm của cạnh huyền BC thì OA = OB = OC do đó O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; vì a là cạnh đối diện với góc 45° nên

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{a}{\sin 45^\circ} = a\sqrt{2}.$$

Vậy (O) có bán kính là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 2. Xác định tâm và bán kính của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC cạnh bằng a.



Hình 75

Giải (H.75)

Kẻ đường cao AH cắt (O) tại D. Vì tam giác ABC đều nên AH là trung trực của BC, do đó O nằm trên AH. Dây AD đi qua tâm O nên

AD là đường kính của (O). Mặt khác AH là phân giác nên $\widehat{BAD} = 30^o$. Tam giác ABD nội tiếp (O) đường kính AD nên tam giác ABD vuông tại B.

Cạnh AB = a kề với góc 30^o do đó

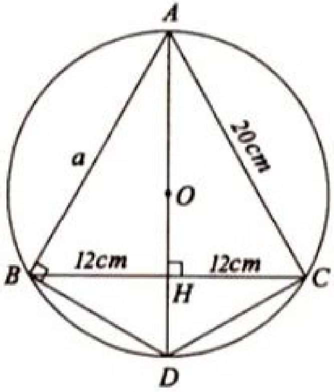
$$\cos 30^o = \frac{AB}{AD} \text{ hay } AD = \frac{a}{\cos 30^o} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy (O) có bán kính là $\frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt (O) ở D. Biết BC = 24cm, AC = 20cm. Tính chiều cao AH và bán kính đường tròn (O).

Giải (H.76)

Vì tam giác ABC cân tại A, nên AH là trung trực của BC, do đó AH đi qua O hay dây AD đi qua tâm O nên AD là đường kính của (O). Lúc đó tam giác ACD nội tiếp (O) đường kính AD nên tam giác ACD vuông tại C. Mặt khác đường cao AH là trung tuyến nên BH = HC = 12cm. Tam giác ACH vuông tại H có cạnh huyền AC = 20cm.



Hình 76

Áp dụng hệ thức Py-ta-go, ta được

$$AC^2 = CH^2 + AH^2$$

hay $$20^2 = 12^2 + AH^2 \Leftrightarrow AH^2 = 16^2$$

$$\Leftrightarrow AH = 16 \text{ (cm) (vì } AH > 0).$$

Áp dụng hệ thức về cạnh cho tam giác ACD vuông tại C, ta được

$$AC^2 = AH.AD \text{ hay } 400 = 16.AD \Leftrightarrow AD = \frac{400}{16} = 25 \text{ (cm)}.$$

Vậy bán kính đường tròn (O) bằng 12,5cm.

Ví dụ 4. Một tấm bìa hình tròn không còn dấu vết của tâm. Hãy tìm lại tâm của hình tròn đó.

Giải

Cách 1 : Trên đường tròn lấy 3 điểm phân biệt A, B, C. Dựng hai đường trung trực của AB, AC. Chúng cắt nhau tại O, đó là tâm của hình tròn.

Cách 2 : Dùng tính chất: bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

Thao tác 1 : Gấp tấm bìa lần thứ nhất sao cho 2 phần của hình tròn trùng nhau. Nếp gấp là một đường kính.

Thao tác 2 : Gấp tấm bìa lần thứ 2 ta được đường kính thứ 2. Giao điểm của hai đường kính này là tâm của hình tròn.

Áp dụng : Bạn An có một số miếng sắt hình tròn muốn đục một lỗ ở phần giữa để làm bánh xe ôtô đồ chơi. Sử dụng cách 1 có thể dễ dàng tìm được điểm cần đục lỗ.

III. BÀI TẬP

8. Thế nào là đường tròn ngoại tiếp một tam giác ? Nêu cách xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

9. Tâm của đường tròn ngoại tiếp một tam giác có ba góc nhọn, có một góc vuông, có một góc tù nằm ở đâu ?

10. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 3.

11. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 3. Hãy tính chiều cao và bán kính của đường tròn ngoại tiếp của nó.

12. Cho tam giác ABC cân tại A, BC = 12cm, chiều cao AH = 4cm. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Dạng 3
DỰNG ĐƯỜNG TRÒN THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định tâm.

2. Xác định bán kính.

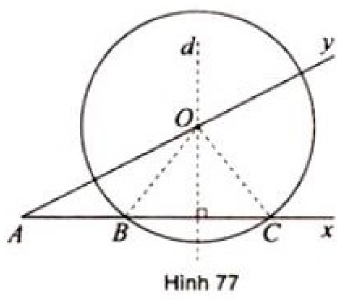
II. VÍ DỤ

Cho góc nhọn xAy và hai điểm B, C thuộc tia Ax. Dựng đường tròn (O) đi qua B và C sao cho tâm O nằm trên tia Ay.

***Giải** (H.77)*

Giả sử đã dựng được (O) thoả mãn đầu bài :

OB = OC bằng bán kính, nên O nằm trên trung trực d của BC.



Hình 77

O nằm trên Ay nên O là giao điểm của d và Ay.

Cách dựng. Dựng đường trung trực d của BC cắt Ay tại O. Dựng đường tròn tâm O bán kính OB thì đó là đường tròn phải dựng (H.77).

III. BÀI TẬP

13. Cho tam giác ABC vuông tại A.

a) Nêu cách dựng đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với BC tại B.

b) Nêu cách dựng đường tròn (O′) đi qua A và tiếp xúc với BC tại C.

Chủ đề 2

ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CUNG CỦA MỘT CUNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Tính chất đặc trưng của đường kính trong các dây của đường tròn

Đường kính là dây lớn nhất.

II. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

1. Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

2. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

III. Khoảng cách từ một điểm O đến đường thẳng a

Khoảng cách từ một điểm O đến đường thẳng a là độ dài đường vuông góc OH kẻ từ O đến a.

IV. Dấu hiệu nhận biết đường thẳng song song cách đều

1. Những đường thẳng song song chắn trên một đường thẳng cho trước những đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

2. Những đường thẳng song song cách đều chắn trên một đường thẳng bất kì những đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.

V. Trong một đường tròn

1. Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

2. Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

VI. Trong hai dây của một đường tròn

1. Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

2. Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU
HAI DÂY BẰNG NHAU

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Trong một đường tròn, hai dây bằng nhau thì cách đều nhau và ngược lại.

2. Chứng minh hai tam giác bằng nhau.

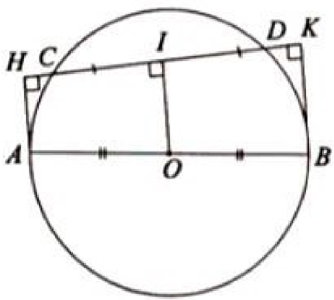
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho (O) đường kính AB, dây CD không cắt đường kính AB. Gọi H, K thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng :

a) CD và HK có trung điểm trùng nhau ;

b) CH = DK ;

c) DH = CK.



Hình 78

Giải

Trên hình 78 :

a) Kẻ OI $\perp$ CD thì AH // OI // BK (1)

(vì cùng vuông góc với CD).

Mà AO = OB (vì là bán kính của (O)). (2)

Từ (1) và (2) suy ra AH, OI, BK là ba đường thẳng song song cách đều.

Suy ra

$$HI = IK. \quad (3)$$

Lại có OI vuông góc với dây CD nên CI = ID. (4)

Từ (3) và (4) ta thấy CD và HK có cùng trung điểm là I.

b) Trừ (3) cho (4) theo vế thu được

$$HC = DK \text{ (đpcm)}. \quad (5)$$

c) Cộng vào hai vế của (5) đoạn thẳng CD thu được CK = DH.

Ví dụ 2. Cho (O) đường kính AB. Kẻ hai dây song song AC và BD. Chứng minh rằng :

a) AC = BD ; b) CD là đường kính của (O).

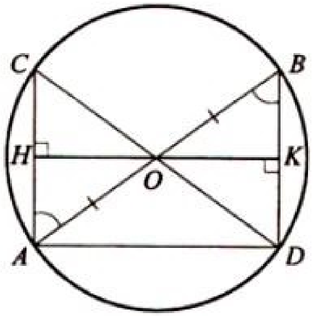
Giải

a) Trên hình 79. Kẻ $OH \perp AC$ cắt BD tại K, do AC // BD nên $OK \perp BD$. Lúc đó OH là khoảng cách từ tâm O đến dây BD.

Vì AO = OB và $\widehat{A} = \widehat{B}$ (so le trong).

Nên $\Delta OHA = \Delta OKB$ (trường hợp bằng nhau đặc biệt của tam giác vuông).

Suy ra OH = OK hay dây AC và BD cách đều tâm O. Vậy AC = BD.



Hình 79

b) Tứ giác ACBD có AC // BD và AC = BD (theo câu a) nên ACBD là hình bình hành. Suy ra CD đi qua tâm O là trung điểm của AB. Vậy CD là đường kính của đường tròn (O).

Ví dụ 3. Cho (O) có các dây AB và CD bằng nhau. Các tia AB và CD cắt nhau tại điểm E nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng :

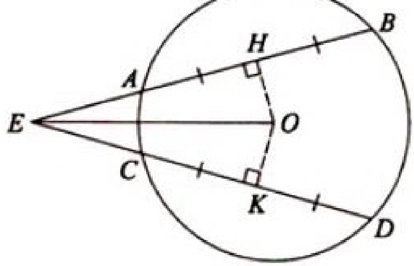
a) EH = EK.

b) EA = EC.

Giải

a) Trên hình 80. Vì AB = CD nên hai dây AB và CD cách đều tâm tức là :

OH = OK. (1)



Hình 80

Mặt khác

EO = EO. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta EHO = \Delta EKO$ (trường hợp cạnh huyền, cạnh góc vuông).

Suy ra EH = EK. (3)

b) Vì OH vuông góc với dây AB nên OH đi qua trung điểm của dây AB tức là

$$AH = HB = \frac{AB}{2}. \qquad (4)$$

Vì OK vuông góc với dây CD nên OK đi qua trung điểm của dây CD, do đó

$$CK = KD = \frac{CD}{2}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5) và AB = CD suy ra :

$$AH = CK. \quad (6)$$

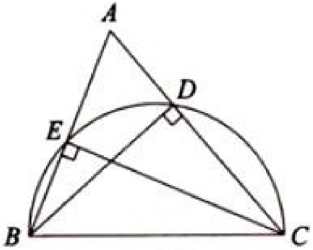
Trừ (3) cho (6) theo vế, ta được EA = EC.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, các đường cao BD, CE. Chứng minh rằng :

a) Bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn.

b) DE < BC.

Giải



Hình 81

Vì hai tam giác vuông BEC và BDC có chung cạnh huyền BC nên hai đỉnh góc vuông E và D nằm trên đường tròn đường kính BC. Vậy bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn (H.81).

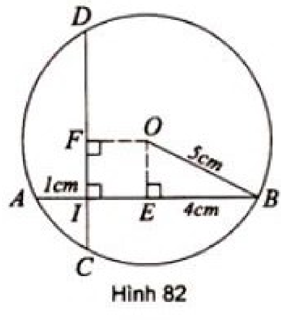
b) Trong đường tròn đường kính BC, DE là một dây không đi qua tâm. Vậy DE < BC.

Ví dụ 5. Cho (O, 5cm), dây AB = 8cm.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

b) Lấy điểm I thuộc dây AB sao cho AI = 1cm. Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB. Chứng minh AB = CD.

Giải



Hình 82

a) Trên hình 82 kẻ OE vuông góc với dây AB thì OE là khoảng cách từ tâm O đến dây AB và OE đi qua trung điểm của dây AB tức là AE = EB = 4cm.

Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho tam giác OEB vuông tại E có cạnh huyền OB = 5cm, thu được

$$OB^2 = BE^2 + EO^2 \text{ hay } 5^2 = 4^2 + OE^2$$

$$\Leftrightarrow OE^2 = 3^2 \Leftrightarrow OE = 3\text{cm}$$

b) Kẻ OF $\perp$ CD thì OF là khoảng cách từ tâm O đến dây CD. Ta thấy tứ giác IFOE là hình chữ nhật nên OF = IE mà IE = AE − AI = 4 − 1 = 3 (cm).

Suy ra OF = OE = 3cm hay AB, CD cách đều tâm O. Vậy AB = CD.

III. BÀI TẬP

14. Chứng minh định lí : Trong các dây của một đường tròn dây lớn nhất là đường kính.

15. Việt bảo Nam : Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm một dây thì vuông góc với dây ấy. Nam bảo Việt bạn nói sai rồi. Theo em ai nói đúng, ai nói sai ? vì sao ?

16. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, dây CD, các đường vuông góc với CD tại C và D tương ứng cắt AB ở M và N. Chứng minh rằng AM = BN.

17. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên AB lấy hai điểm M, N sao cho AM = BN. Qua M và N kẻ hai đường thẳng song song với nhau cắt nửa đường tròn lần lượt ở C và D. Chứng minh rằng MC và ND vuông góc với CD.

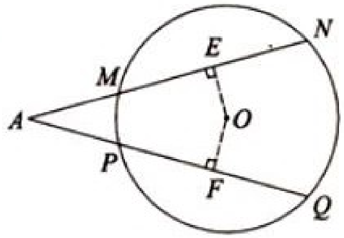
18. Cho (O) đường kính AB. Dây CD cắt đường kính AB tại I. Gọi H và K thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng : CH = DK.

19. Cho (O) có tâm O nằm trên đường phân giác của góc xAy, cắt tia Ax ở B và C, cắt tia Ay ở D và E. Chứng minh rằng hai dây BC và DE cách đều tâm O và bằng nhau.

20. Cho hình 83, trong đó MN = PQ. Chứng minh rằng :

a) AE = AF.

b) AN = AQ.



Hình 83

21. Cho (O) hai dây AB, CD bằng nhau và cắt nhau tại điểm I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng

a) IO là tia phân giác của một trong hai góc tạo bởi hai dây AB và CD.

b) Điểm I chia AB, CD thành các đoạn thẳng bằng nhau đôi một.

22. Cho (O) các bán kính OA và OB. Trên cung nhỏ AB lấy các điểm M và N sao cho AM = BN. Gọi C = AM $\cap$ BN.

Chứng minh rằng :

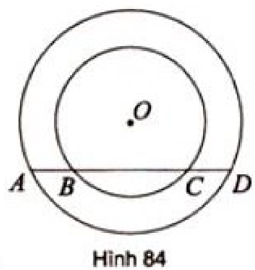
a) OC là tia phân giác của góc AOB.

b) OC vuông góc với AB.

23. Cho hình 84, hai đường tròn cùng có tâm là O. Một đường thẳng cắt hai đường tròn đó theo thứ tự A, B, C, D. Chứng minh rằng :

a) AB = CD.

b) AC = BD.



Hình 84

Dạng 2
TÍNH ĐỘ DÀI MỘT ĐOẠN THẲNG – ĐỘ DÀI MỘT DÂY CUNG

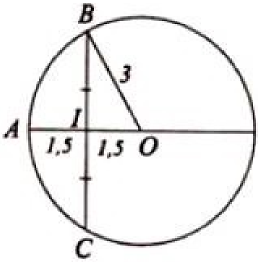
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định khoảng cách từ tâm đến dây.

2. Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho một tam giác vuông có cạnh huyền là bán kính của đường tròn.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho (O) có bán kính OA = 3cm. Dây BC của đường tròn vuông góc với OA tại trung điểm của OA. Tính độ dài của dây BC.



Hình 85

Giải

Trên hình 85 gọi $I = OA \cap BC$ thì OA vuông góc với dây BC tại trung điểm I của OA nên BC = 2IB = 2IC và AI = IO = 1,5 (cm).

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác BIO vuông tại I có cạnh huyền OB = 3cm, thu được

$$OB^2 = BI^2 + IO^2 \text{ hay } 3^2 = BI^2 + 1,5^2 \Leftrightarrow BI^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow BI = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (cm) (vì } BI > 0\text{)}.$$

Vậy $BC = 3\sqrt{3}$ cm.

Ví dụ 2. Cho (O, R) và điểm M nằm bên trong đường tròn.

a) Hãy nêu cách dựng dây AB nhận M làm trung điểm.

b) Tính dây AB ở câu a, biết R = 5cm, OM = 1,4cm.

Giải

a) Dựng dây AB vuông góc với OM tại M thì

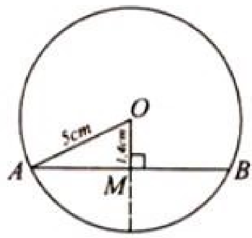
$$AM = MB = \frac{AB}{2} \text{ (H.86)}.$$

b) Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác AOM vuông tại M có cạnh huyền OA = 5cm thu được.

$$OA^2 = AM^2 + MO^2 \text{ hay } 5^2 = AM^2 + 1,4^2$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = 4,8 \text{ (cm) (vì } AM > 0).$$

Vậy AB = 9,6cm.



Hình 86

III. BÀI TẬP

24. Cho (O, 25cm), dây AB = 40cm. Vẽ dây cung CD song song với AB và có khoảng cách đến AB bằng 22cm. Tính độ dài dây cung CD.

25. Cho (O) trong đó hai dây cung AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Biết IC = 2cm, ID = 14cm.

Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây cung.

26. Cho (O, 25cm), hai dây cung AB, CD song song với nhau và có độ dài theo thứ tự bằng 40cm, 48cm. Tính khoảng cách giữa hai dây cung ấy.

Dạng 3
SO SÁNH HAI DÂY CUNG – HAI ĐOẠN THẲNG

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định khoảng cách từ tâm đến dây.

2. Trong hai dây cung của một đường tròn, dây nào lớn hơn thì gần tâm hơn và ngược lại.

3. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên : Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

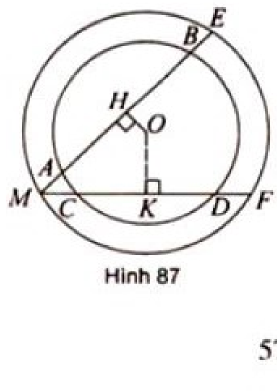
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình 87 trong đó hai đường tròn cùng có tâm là O. Cho biết AB > CD. Hãy so sánh các độ dài

a) OH và OK.

b) ME và MF.

c) MH và MK.



Hình 87

Giải (H.87)

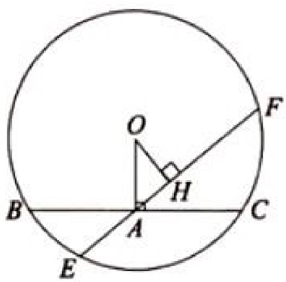
a) Trong đường tròn nhỏ do OH vuông góc với dây AB, OK vuông góc với dây CD nên OH là khoảng cách từ tâm O đến dây AB và OK là khoảng cách từ tâm đến dây CD. Vì AB > CD nên OH < OK.

b) Trong đường tròn lớn vì OH vuông góc với dây ME, OK vuông góc với dây MF nên OH là khoảng cách từ tâm O đến dây ME và OK là khoảng cách từ tâm O đến dây MF.

Do OH < OK (theo câu a) nên ME > MF.

c) Từ câu b, do ME > MF $\Rightarrow \dfrac{ME}{2} > \dfrac{MF}{2}$ hay MH > MK.

Ví dụ 2. Cho (O) điểm A nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây BC vuông góc với OA. Vẽ dây EF bất kì đi qua A và không vuông góc với OA. So sánh độ dài hai dây BC và EF.



Hình 88

Giải (H.88)

Vì OA $\perp$ BC nên OA là khoảng cách từ tâm O đến dây BC cố định.

Kẻ OH vuông góc với dây EF thì OH là khoảng cách từ tâm đến dây EF.

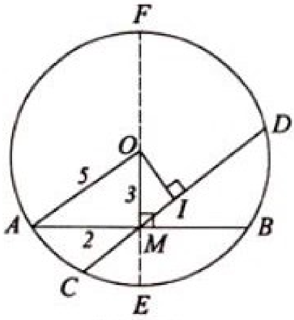
Lúc đó OH là đường vuông góc kẻ từ O đến dây EF và OA là đường xiên kẻ từ O đến dây EF nên OH $\leq$ OA. Dấu bằng xảy ra khi H $\equiv$ A hay EF $\equiv$ BC. Suy ra EF $\geq$ BC.

Nhận xét : Trong các dây đi qua một điểm A ở trong một đường tròn, dây vuông góc với bán kính qua A là dây ngắn nhất.

Ví dụ 3. Cho (O, 5cm), điểm M cách O là 3cm.

a) Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M.

b) Tính độ dài dây dài nhất đi qua M.



Hình 89

Giải (H.89)

a) Vẽ dây AB vuông góc với OM thì

$$AM = MB = \frac{AB}{2}$$

và OM là khoảng cách từ O đến dây AB.

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác OAM vuông tại M có cạnh huyền OA = 5 thu được

$$OA^2 = AM^2 + MO^2 \text{ hay } 5^2 = AM^2 + 3^2$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = 4^2 \Leftrightarrow AM = 4 \text{ (cm) (vì } AM > 0).$$

Suy ra dây AB = 8cm.

Kẻ dây CD bất kì đi qua M và OI vuông góc với dây CD thì OI là khoảng cách từ tâm O đến dây CD. Lúc đó OI là đường vuông góc kẻ từ O đến dây CD và OM là đường xiên kẻ từ O đến dây CD.

Suy ra $OI \leq OM \Rightarrow CD \geq AB = 8$cm. Vậy AB = 8cm là dây ngắn nhất đi qua M.

b) Kéo dài OM cắt (O) tại E, F thì EF = 10cm là dây dài nhất đi qua M (vì trong một đường tròn dây lớn nhất là đường kính).

III. BÀI TẬP

27*. Cho (O) và hai dây cung AB và CD cắt nhau tại điểm M nằm bên trong đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Biết AB > CD. Chứng minh rằng MH > MK.

28*. Trong (O) cho một điểm A khác điểm O. Tìm trên đường tròn này một điểm M sao cho góc AMO lớn nhất.

Chủ đề 3

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Xét (O) và đường thẳng a trên mặt phẳng.

1. a cắt (O) $\Leftrightarrow$ a và (O) có 2 điểm chung $\Leftrightarrow$ a là cát tuyến của (O).

2. a tiếp xúc với (O) $\Leftrightarrow$ a và (O) chỉ có 1 điểm chung

$\Leftrightarrow$ a là tiếp tuyến của (O).

3. a không giao nhau với (O) $\Leftrightarrow$ a và (O) không có điểm chung.

II. Ba mệnh đề xác định vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn

Xét (O, R) và đường thẳng a. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến a thì độ dài d = OH là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a.

1. a cắt (O, R) $\Leftrightarrow$ d < R.

2. a tiếp xúc với (O, R) $\Leftrightarrow$ d = R.

3. a không giao nhau với (O, R) $\Leftrightarrow$ d > R.

III. Tính chất của các điểm cách đều một đường thẳng cho trước

Các điểm cách đường thẳng a một khoảng bằng h nằm trên hai đường thẳng song song với a cách a một khoảng bằng h.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định khoảng cách d từ tâm O đến đường thẳng.

2. So sánh d với R.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Điền vào các chỗ trống (...) trong bảng sau (R là bán kính của đường tròn, d là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng).

R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
5cm	3cm	...
6cm	...	Tiếp xúc nhau
4cm	7cm	...

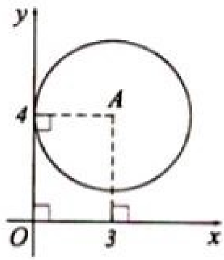
Hướng dẫn :

– Vì 3 < 5 nên d < R. Vậy đường thẳng cắt đường tròn.

– Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau nên d = R = 6cm.

– Vì 4 < 7 nên R < d. Vậy đường thẳng và đường tròn không giao nhau.

Ví dụ 2. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm A (3 ; 4) có hoành độ bằng 3 và tung độ bằng 4 nên khoảng cách từ A đến Oy bằng 3 và khoảng cách từ A đến Ox bằng 4. Vậy (A, 3) tiếp xúc với trục tung Oy và không giao nhau với trục hoành Ox (H.90).



Hình 90

Ví dụ 3. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a là 3cm. Vẽ (O, 5cm).

a) Đường thẳng a có vị trí như thế nào đối với (O) ? Vì sao ?

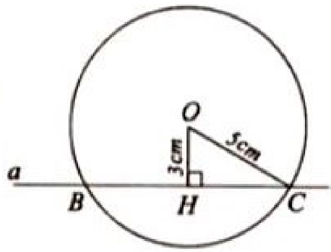
b) Gọi B, C là các giao điểm của đường thẳng a và (O). Tính độ dài BC.

Giải

a) Kẻ OH ⊥ a thì OH = 3cm là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a. Do 3 < 5 nên đường thẳng a cắt (O).

b) Vì OH ⊥ a nên OH vuông góc với dây BC của (O) do đó

$$BH = HC = \frac{BC}{2}.$$



Hình 91

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác OHC (H.91) vuông tại H có cạnh huyền OC = 5cm thu được

$$OC^2 = CH^2 + HO^2 \text{ hay } 5^2 = CH^2 + 3^2$$

$$\Leftrightarrow CH^2 = 4 \Leftrightarrow CH = 4 \text{ (cm) (vì } CH > 0)$$

Vậy BC = 8cm.

III. BÀI TẬP

29. Vì sao một đường thẳng và một đường tròn không thể có nhiều hơn hai điểm chung ?

30. Vì sao không thể có một tiếp tuyến đi qua một điểm bên trong đường tròn.

31. Trên mặt phẳng toạ độ cho điểm I = (–3 ; 2). Vẽ đường tròn tâm I bán kính bằng 2 thì đường tròn có vị trí tương đối như thế nào đối với các trục toạ độ.

32. Cho điểm O cách đường thẳng a là 6cm. Vẽ đường tròn (O, 10cm).

a) Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng a.

b) Gọi hai giao điểm nói trên là B và C. Tính độ dài BC.

Dạng 2
TÌM VỊ TRÍ TÂM CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN CÓ BÁN KÍNH CHO TRƯỚC TIẾP XÚC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định khoảng cách từ tâm đến đường thẳng.

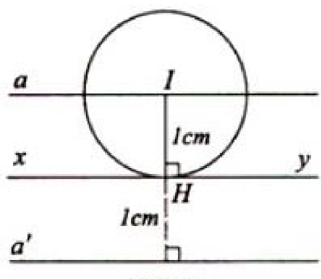
2. Áp dụng tính chất các điểm cách đều một đường thẳng.

II. VÍ DỤ

Cho đường thẳng xy. Tâm của các đường tròn có bán kính bằng 1cm và tiếp xúc với đường thẳng xy nằm trên đường nào ?

Gọi (I) là đường tròn có bán kính bằng 1cm tiếp xúc với đường thẳng xy.

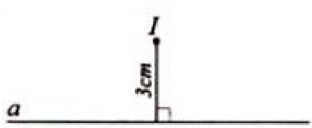
Kẻ IH $\perp$ xy thì IH = 1cm. Như vậy các điểm I cách đều đường thẳng xy một khoảng cách bằng 1cm nên I nằm trên hai đường thẳng a và a' song song và cách xy một khoảng 1cm (H.92).



Hình 92

III. BÀI TẬP

33. Cho đường thẳng a. Tâm I của tất cả các đường tròn bán kính 3cm tiếp xúc với đường thẳng a nằm trên đường nào (H.93) ?



Hình 93

34. Cho hai đường thẳng x'Ox và y'Oy cắt nhau tại O. Tâm I của tất cả các đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng trên nằm trên đường nào ?

Chủ đề 4

CÁC TÍNH CHẤT CỦA TIẾP TUYẾN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Định nghĩa

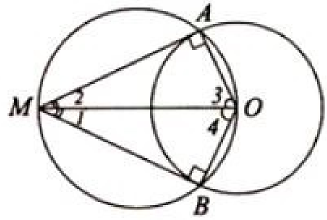
Đường thẳng a tiếp xúc với (O, R) khi và chỉ khi khoảng cách d từ O đến đường thẳng a bằng R (d = R).

II. Hai tính chất của tiếp tuyến

1. Tính chất đặc trưng của tiếp tuyến

a) Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

b) Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.



Hình 94

2. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

MA và MB là hai tiếp tuyến của (O). Khi đó (xem H.94)

$$\begin{cases} MA = MB \\ \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \\ \widehat{O_3} = \widehat{O_4} \end{cases}$$

III. Hai dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

1. Dấu hiệu 1:. Theo định nghĩa.

2. Dấu hiệu 2: Tính chất đặc trưng của tiếp tuyến.

IV. Dựng tiếp tuyến

Qua điểm M nằm bên ngoài (O) hãy dựng tiếp tuyến của đường tròn l.

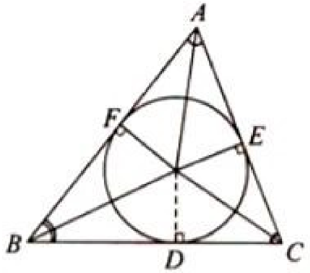
Bước 1. Dựng đường tròn phụ đường kính MO cắt (O) tại A, B (H.94).

Bước 2. Nối MA, MB thu được 2 tiếp tuyến cần dựng.

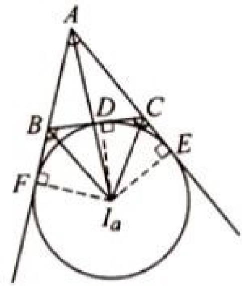
V. Đường tròn nội tiếp tam giác

1. Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn.

2. Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm các đường phân giác các góc trong của tam giác (H.95).



Hình 95



Hình 96

VI. Đường tròn bàng tiếp tam giác

1. Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.

2. Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C (H.96).

3. Mỗi tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÍNH ĐỘ DÀI CỦA MỘT ĐOẠN TIẾP TUYẾN

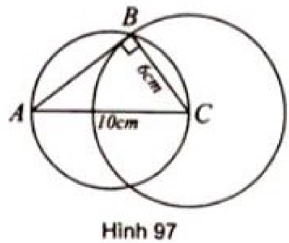
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định tam giác vuông có đỉnh góc vuông là tiếp điểm nhờ tính chất đặc trưng của tiếp tuyến.

2. Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho (O, 6cm) và một điểm A cách O là 10cm. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Tính độ dài AB.



Hình 97

Giải

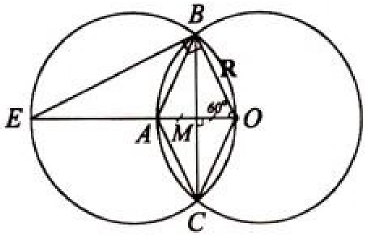
Vì AB tiếp xúc với (O) tại B (H.97) nên $OB \perp BA$ hay tam giác AOB vuông tại B. Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho tam giác AOB vuông tại B có cạnh huyền OA = 10cm, thu được

$$OA^2 = OB^2 + BO^2 \text{ hay } 10^2 = AB^2 + 6^2 \Leftrightarrow AB^2 = 8^2 \Leftrightarrow AB = 8 \text{ (cm) (vì } AB > 0).$$

Ví dụ 2. Cho (O) có bán kính OA = R, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.

a) Tứ giác OCAB là hình gì ? Vì sao ?

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE theo R.



Hình 98

Giải

a) Trên hình 98 vì OA vuông góc với dây BC nên BM = MC ; AM = MO (gt) suy ra ABOC là hình thoi (vì có hai đường chéo AO, BC vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

b) Vì ABOC là hình thoi nên AB = BO = OA = R, hay tam giác ABO đều $\Rightarrow \widehat{O} = 60^{o}$.

Vì EB tiếp xúc với (O) tại B nên $OB \perp BE$ hay tam giác OBE vuông tại B. Lúc đó cạnh BE đối diện với góc 60^{o} nên

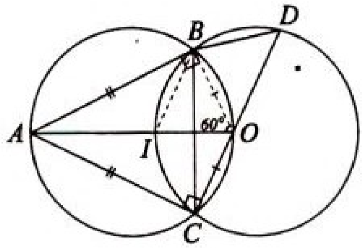
$$tg60^{o} = \frac{BE}{BO} \Leftrightarrow BE = BO.tg60^{o} = R\sqrt{3}.$$

Ví dụ 3. Từ điểm A ở ngoài (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng $OA \perp BC$.

b) Vẽ đường kính CD. Chứng minh rằng BD // AO.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết OB = 2cm, OA = 4cm.



Hình 99

Giải

a) Trên hình 99 ta có AB = AC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). OB = OC (vì là bán kính của (O)), suy ra OA là trung trực của đoạn BC nên $OA \perp BC$. (1)

b) Vì tam giác BCD có cạnh CD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp nên tam giác BCD vuông tại B hay $BC \perp BD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra BD // AO.

c) Do AB tiếp xúc với (O) tại B, nên $AB \perp BO$, hay tam giác ABO vuông tại B có cạnh huyền AO = 2BO = 4cm.

Suy ra $\widehat{A} = 30^o$, do đó $\widehat{BAC} = 60^o$ hay tam giác ABC là tam giác đều đồng thời $\widehat{BOA} = 60^o$.

Trong tam giác ABO vuông tại B có cạnh AB đối diện với góc 60^o nên

$$\sin 60^o = \frac{AB}{AO} \Leftrightarrow AB = AO.\sin 60^o = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

III. BÀI TẬP

35. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn đó (M, N là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng $OA \perp MN$.

b) Vẽ đường kính NOC. Chứng minh rằng MC // AO.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác AMN biết OM = 3cm, OA = 5cm.

36. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến MD, ME với đường tròn (D, E là các tiếp điểm). Qua điểm I thuộc cung nhỏ DE, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt MD, ME theo thứ tự ở P và Q. Biết MD = 5cm. Tính chu vi tam giác MPQ.

37. Từ điểm A nằm bên ngoài (O, 6cm) có OA = 10cm, kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

Gọi H là giao điểm của AO và BC.

a) Tính độ dài OH.

b) Tính độ dài AB.

38. Cho đường tròn (O ; 2cm) các tiếp tuyến MA, MB kẻ từ M đến đường tròn vuông góc với nhau tại M (A, B là các tiếp điểm).

a) Tứ giác MBOA là hình gì ? Vì sao ?

b) Gọi C là điểm bất kì thuộc cung nhỏ AB. Qua C kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt MA, MB thứ tự tại D và E. Tính chu vi tam giác MDE.

c) Tính số đo góc DOE.

39. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D, E.

a) Tứ giác ADIE là hình gì ? Vì sao ?

b) Tính bán kính của (I) biết AB = 3cm, AC = 4cm.

Dạng 2
CHỨNG MINH MỘT ĐƯỜNG THẲNG LÀ TIẾP TUYẾN CỦA MỘT ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Dấu hiệu 1

– Xác định khoảng cách d từ tâm đến đường thẳng.

– Chứng minh d = R.

2. Dấu hiệu 2

– Xác định giao điểm của đường thẳng với đường tròn.

– Chứng minh đường thẳng vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có AB = 3, AC = 4, BC = 5. Vẽ (B ; BA). Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn.

Giải (H.100)

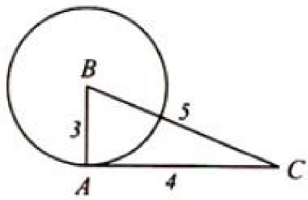
Vì AC đi qua điểm A thuộc đường tròn (B, BA).

Ta còn phải chứng minh : $BA \perp AC$.

Do $5^2 = 4^2 + 3^2$ hay $BC^2 = CA^2 + AB^2$.

Suy ra tam giác ABC vuông tại A (theo định lí đảo của Py-ta-go).

Vậy $BA \perp AC$ hay AC là tiếp tuyến của (B).



Hình 100

Ví dụ 2. Cho (O) dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn ở điểm C.

a) Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn.

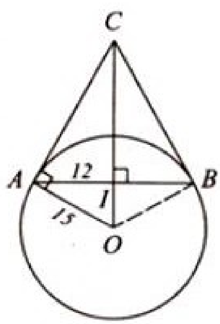
b) Cho bán kính của đường tròn bằng 15cm, AB = 24cm. Tính độ dài OC.

Giải (H.101)

a) Vì CB đi qua điểm B thuộc (O). Ta còn phải chứng minh $OB \perp BC$ hay $\widehat{OBC} = 90^o$.

Do OC vuông góc với dây AB nên B đối xứng với A qua OC ; O đối xứng với O qua OC, C đối xứng với C qua OC nên góc OBC đối xứng với góc OAC bằng 90^o qua OC suy ra $\widehat{OBC} = 90^o$.

Vậy CB là tiếp tuyến của (O).



Hình 101

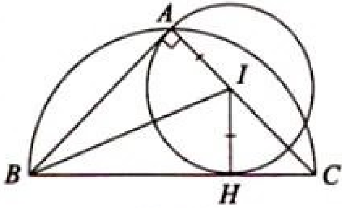
b) Trên hình 101 do OC vuông góc với dây AB tại I nên $AI = \dfrac{AB}{2} = 12$ (cm).

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác AOI vuông tại I có cạnh huyền OA = 15cm, thu được

$$OA^2 = AI^2 + IO^2 \text{ hay } 15^2 = 12^2 + OI^2$$

$$\Leftrightarrow OI^2 = 9.OC \Leftrightarrow OC = 25 \text{ (cm)}.$$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Kẻ phân giác trong của $\hat{B}$ cắt AC tại I. Chứng minh rằng BC tiếp xúc với đường tròn (I, IA).



Hình 102

Giải

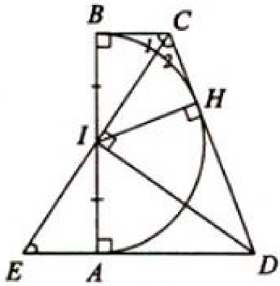
Trên hình 102 kẻ $IH \perp BC$ thì IH là khoảng cách từ tâm I của (I, IA) đến cạnh BC.

Ta thấy IH = IA (tính chất tia phân giác của một góc).

Vậy BC tiếp xúc với (I, IA).

Ví dụ 4. Cho hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{B} = 90^{\circ}$) có I là trung điểm của AB và góc $\widehat{CID} = 90^{\circ}$. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.

Giải (H.103)



Hình 103

Vì $\widehat{CID} = 90^{\circ}$ nên $DI \perp CE$ hay DI là đường cao của tam giác CDE (E là giao điểm của CI với tia DA). (1)

Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét cho BC // EA thu được $\dfrac{CI}{IE} = \dfrac{BI}{IA} = 1$ hay CI = IE. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác CDE cân tại D, lúc đó : $\hat{E} = \widehat{C_2}$ (tính chất tam giác cân). (3)

Lại có $\widehat{C_1} = \hat{E}$ (so le trong) (4). Từ (3) và (4) suy ra CI là tia phân giác của góc BCD.

Kẻ $IH \perp CD$ thì IH là khoảng cách từ tâm I của đường tròn đường kính AB đến CD. Ta thấy IH = IB (tính chất tia phân giác). Vậy DC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.

III. BÀI TẬP

40. Cho hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = 90^o$), AB = 4cm. BC = 13cm, CD = 9cm.

a) Tính độ dài AD.

b) Chứng minh rằng đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.

41*. Cho tam giác ABC cân tại A (AB = AC), đường cao BH. Trên nửa mặt phẳng chứa C bờ AB vẽ Bx ⊥ BA cắt (B, BH) tại D. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của (B).

42. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ hai đường tròn (B, BA) và (C, CA) cắt nhau tại D (khác A). Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của (B).

43. Cho (O, R). Vẽ đường tròn tâm I có đường kính lớn hơn R đi qua O cắt (O) tại A, B. Đường thẳng OI cắt (I) tại M (I nằm giữa O và M). Chứng minh rằng MA, MB là hai tiếp tuyến của (O).

44. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ (A, AH), kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) (D, E là các tiếp điểm khác H).

Chứng minh rằng :

a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.

b) DE tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

45*. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn. Kẻ tiếp tuyến tại M là một điểm bất kì thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến này cắt Ax, By thứ tự tại C, D. Chứng minh rằng đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB.

46*. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH. Gọi E là điểm đối xứng với B qua H. Đường tròn đường kính EC cắt AC ở K. Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn.

Dạng 3
CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định những đoạn tiếp tuyến bằng nhau.

2. Đại số hoá hình học.

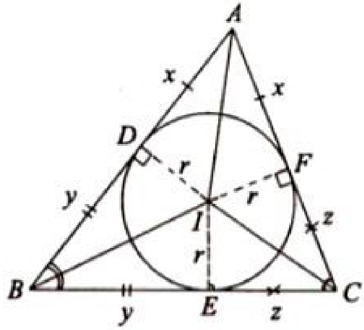
3. Dùng phép tính cộng diện tích và phương pháp diện tích.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA thứ tự tại D, E, F. Chứng minh rằng :

a) 2AD = AB + AC – BC.

b) Tìm các hệ thức tương tự như hệ thức ở câu a).



Hình 104

Giải

a) Trên hình 104 có những đoạn tiếp tuyến bằng nhau : AD = AF, BD = BE, CE = CF.

Đặt : AD = AF = x, BD = BE = y, CE = CF = z thì

$$x + y = AB\ (1),\ y + z = BC\ (2),\ z + x = CA\ (3)$$

Cộng (1), (2), (3) theo vế, thu được

$$x + y + z = \frac{AB + BC + CA}{2}.\ (4)$$

Trừ (4) cho (2) theo vế, thu được

$$x = \frac{AB + BC + CA}{2} - BC.$$

Vậy 2AD = AB + AC – BC.

b) Nhờ tính đối xứng của AB, BC, CA, theo câu a) ta có

2BE = BA + BC – CA, 2CF = CA + CB – AB.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có chu vi 2p ngoại tiếp đường tròn (I, r) thì diện tích S của tam giác có công thức S = p.r.

Giải

Như hình104. Vì IA, IB, IC chia tam giác ABC thành ba tam giác IAB, IBC, ICA không có điểm trong chung.

Nên $S = S_{IAB} + S_{IBC} + S_{ICA}$

$$= \frac{1}{2}r.AB + \frac{1}{2}r.BC + \frac{1}{2}r.CA = r.\frac{AB + BC + CA}{2} = pr \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 3*. Cho tam giác ABC có chu vi 2p ngoại tiếp (I, r) gọi a, b, c, h_a, h_b, h_c thứ tự là độ dài và chiều cao tương ứng của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$.

b) $h_a+h_b+h_c=2pr\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

Giải

a) Tính diện tích tam giác ABC bằng hai cách :

Cách 1. $2S=ah_a=bh_b=ch_c=\dfrac{a}{\dfrac{1}{h_a}}=\dfrac{b}{\dfrac{1}{h_b}}=\dfrac{c}{\dfrac{1}{h_c}}=\dfrac{a+b+c}{\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}}$.

Cách 2. $2S = 2p.r$ (theo Ví dụ 2).

Do tam giác ABC chỉ có một diện tích nên

$$\frac{2p}{\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}}=2pr \text{ hay } \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r} \text{ (đpcm).}$$

b) Tương tự như cách làm ở câu a) ta có :

$$2S=ah_a=bh_b=ch_c=\frac{h_a}{\dfrac{1}{a}}=\frac{h_b}{\dfrac{1}{b}}=\frac{h_c}{\dfrac{1}{c}}=\frac{h_a+h_b+h_c}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}=2pr.$$

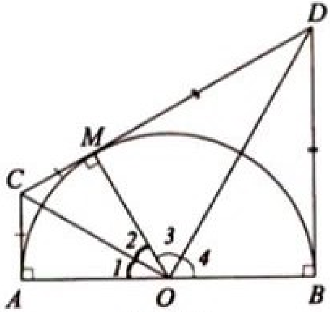
Vậy $h_a+h_b+h_c=2pr\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

Ví dụ 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn. Qua điểm M bất kì thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax, By thứ tự tại C và D. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{COD}=90^{\circ}$.

b) CD = AC + BD.

c) Tích AC.BD không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.



Hình 105

Giải (H.105)

Theo tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau, ta có :

a) $\begin{cases}\widehat{O_1}=\widehat{O_2}\\ \widehat{O_4}=\widehat{O_3}\end{cases} \Rightarrow \dfrac{\widehat{O_1}+\widehat{O_4}}{1}=\dfrac{\widehat{O_2}+\widehat{O_3}}{1}=\dfrac{\widehat{O_1}+\widehat{O_2}+\widehat{O_3}+\widehat{O_4}}{2}=\dfrac{180^o}{2}=90^o$

hay $\widehat{COD}=90^o$.

b) $\begin{cases}CM=CA\\ DM=DB\end{cases} \Rightarrow CD=CA+BD.$

c) Gọi bán kính của nửa đường tròn là R thì OM = R.

Áp dụng hệ thức về đường cao $h^2 = b'c'$ cho tam giác COD vuông tại O thu được : $OM^2 = MC.MD = AC.BD = R^2$ (không đổi).

III. BÀI TẬP

47. Chứng minh diện tích của tam giác đều ngoại tiếp đường tròn bán kính r bằng $3r^2$.

48. Cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp (I, r) và nội tiếp (O, R). Chứng minh rằng :

a) 2r = AB + AC – BC.

b) AB + AC = 2 (R + r).

49. Cho tam giác ABC, đường tròn tâm I_a bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với các tia AB và AC thứ tự tại E và F. Cho BC = a, CA = b, AB = C. Chứng minh rằng

a) $AE = AF = \dfrac{a+b+c}{2}$.

b) $BE = \dfrac{a+b-c}{2}$.

c) $CF = \dfrac{c+a-b}{2}$.

50*. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC vuông tại A tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng $S_{ABC} = BD.DC$.

51*. Cho (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB tại D. Chứng minh rằng ΔABC vuông tại C khi và chỉ khi CA.CB = 2DA.DB.

Chủ đề 5

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Ba vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (O')

1. (O) cắt (O') $\Leftrightarrow$ (O) và (O') có 2 điểm chung.

2. (O) tiếp xúc với (O') $\Leftrightarrow$ (O) và (O') chỉ có 1 điểm chung.

3. (O) không giao nhau với (O') $\Leftrightarrow$ (O) và (O') không có điểm chung.

II. Ba hệ thức xác định vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') có tâm không trùng nhau. Đường thẳng OO' gọi là đường nối tâm, đoạn OO' = d gọi là đoạn nối tâm.

1. (O, R) cắt (O', R') $\Leftrightarrow |R - R'| < d < R + R'$.

2. (O, R) tiếp xúc (O', R') $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Tiếp xúc ngoài} : d = R + R' \\ \text{Tiếp xúc trong} : d = |R - R'|. \end{cases}$

3. (O, R) không giao nhau với (O', R') $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ở ngoài nhau} : d > R + R' \\ \text{Đựng nhau} : \quad d < |R - R'|. \end{cases}$

III. Tính chất của đường nối tâm

1. Đường nối tâm là trục đối xứng của hình gồm cả 2 đường tròn.

2. Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

IV. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

1. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả 2 đường tròn đó.

2. Tiếp tuyến chung ngoài là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.

3. Tiếp tuyến chung trong là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1

XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định độ dài đoạn nối tâm.

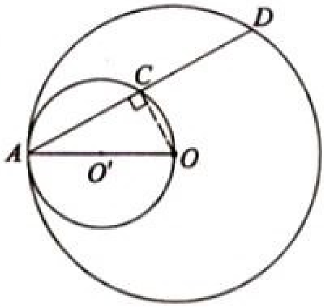
2. So sánh d với R + R' hoặc $|R - R'|$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn đường kính OA.

a) Hãy xác định vị trí của hai đường tròn (O) và đường tròn đường kính OA.

b) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C. Chứng minh rằng AC = CD.



Hình 106

Giải

Trên hình 106:

a) Gọi O' là tâm đường tròn đường kính OA thì đoạn nối tâm OO' = OA – OA', tức là d = R – R'. Vậy đường tròn (O') tiếp xúc trong với (O).

b) Vì tam giác ACO có cạnh AO là đường kính của (O') ngoại tiếp nên nó vuông tại C hay OC vuông góc với dây AD. Vậy AC = CD.

Ví dụ 2. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn trong các trường hợp sau đây :

a) R = 6cm ; R' = 4cm.

b) R = 5cm ; R' = 3cm.

Giải

a) Vì R – R' = 6cm – 4cm = 2cm = d nên hai đường tròn tiếp xúc trong.

b) Vì R – R' = 5cm + 3cm = 8cm > d do đó R – R' < d < R + R'.

Vậy hai đường tròn cắt nhau.

III. BÀI TẬP

52. Hai đường tròn có thể có bao nhiêu điểm chung ? Vì sao ?

53. Vì sao hai đường tròn phân biệt không thể có quá hai điểm chung.

54. Cho hai đường tròn : (O, R) và (O', R') và đường nối tâm OO' = d. Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn ấy theo bảng sau đây :

R	R'	d	Vị trí tương đối
5cm	3cm	7cm	
11cm	4cm	3cm	
9cm	6cm	15cm	
7cm	2cm	10cm	
7cm	3cm	4cm	
6cm	2cm	7cm	

55. Hãy điền giá trị thích hợp vào ô trống trong bảng sau :

R	R'	d	Vị trí tương đối
8cm	2cm		Tiếp xúc trong
7cm	3cm		Cắt nhau
	5cm	11cm	Tiếp xúc ngoài
12cm		6cm	Đựng nhau

Dạng 2
CÁC BÀI TOÁN VỚI HAI ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NHAU

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Sử dụng tính chất tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

2. Kẻ tiếp tuyến chung để sử dụng tính chất đặc trưng và tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

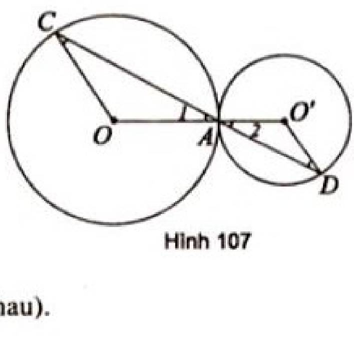
3. Đường nối tâm là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho (O) tiếp xúc ngoài với (O') tại A. Qua A kẻ một cát tuyến bất kì cắt (O) tại C và (O') tại D. Chứng minh rằng OC // O'D.

Giải

Trên hình 107, do (O) tiếp xúc ngoài với (O') nên tiếp điểm A nằm trên OO' hay $\widehat{A_1}$ đối đỉnh với $\widehat{A_2}$ (1).



Hình 107

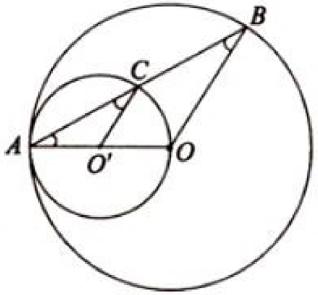
Lại có $\widehat{A_1} = \widehat{C}$ (2) (vì có OC = OA) ;

$\widehat{A_2} = \widehat{D}$ (3) (vì O'A = O'D).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{C} = \widehat{D}$.

Vậy OC // O'D (có cặp góc so le trong bằng nhau).

Ví dụ 2. Cho (O) tiếp xúc trong với (O') tại A ((O') nằm bên trong (O)). Qua A kẻ một cát tuyến bất kì cắt (O) tại B và (O') tại C. Chứng minh rằng OB // O'C.



Hình 108

Giải

Trên hình 108 do đường tròn (O) tiếp xúc trong với đường tròn (O') tại A nên A nằm trên OO' do đó $\widehat{A}$ là góc chung của hai tam giác O'AC và OAB. Vì

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{C}=\widehat{A}\ (\text{do } O'A=O'C)\\ \widehat{B}=\widehat{A}\ (\text{do } OA=OB)\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{C}.$$

Vậy OB // O'C (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Ví dụ 3. Cho (O_1, 9cm) tiếp xúc với (O_2, 4cm) tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O_1)$; $C \in (O_2)$).

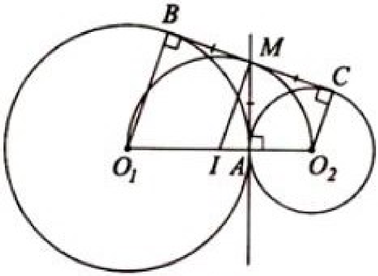
Chứng minh rằng :

a) O_1O_2 tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

b) BC tiếp xúc với đường tròn đường kính O_1O_2.

c) Tính độ dài BC.

Giải (H.109)



Hình 109

a) Gọi I là trung điểm của O_1O_2 thì I là tâm của đường tròn đường kính O_1O_2 nên $O_1I = IO_2$.

Vì (O_1) tiếp xúc ngoài với (O_2) nên O_1, A, O_2 thẳng hàng.

Kẻ tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn tại A cắt BC tại M thì $MA \perp O_1O_2$. (1)

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau tại M ta có MA = MB = MC điều này chứng tỏ A nằm trên đường tròn đường kính BC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra O_1O_2 tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

b) Vì I, M lần lượt là trung điểm của O_1O_2, BC nên IM là đường trung bình của hình thang vuông O_1BCO_2 suy ra $IM // O_1B // O_2C$, do đó $IM \perp BC$ (3)

Lại có $IM = \frac{O_1B + O_2C}{2} = \frac{O_1O_2}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra BC tiếp xúc với đường tròn đường kính O_1O_2.

c) Theo câu b) tam giác MO_1O_2 có O_1O_2 là đường kính của đường tròn ngoại tiếp nên tam giác MO_1O_2 vuông tại M.

Áp dụng hệ thức về đường cao $h^2 = b'c'$ vào tam giác vuông MO_1O_2 thu được $MA^2 = O_1A.AO_2$ hay $MA^2 = 4.9 = 6^2 \Leftrightarrow MA = 6$ (cm) (vì $MA > 0$).

Vậy BC = 2MA = 12cm.

III. BÀI TẬP

56. Cho (O_1, R_1) tiếp xúc với (O_2, R_2) tại A ($R_1 > R_2$). Hãy cho biết số tiếp tuyến chung của hai đường tròn đồng thời nêu rõ các bước vẽ các tiếp tuyến chung này.

57. Cho hai đường tròn (O_1) tiếp xúc với $(O_2$, 1cm) tại A. Vẽ một cát tuyến qua A cắt hai đường tròn tại B và C. Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại B và C song song với nhau.

Chỉ dẫn : Xét hai trường hợp tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong vẽ tiếp tuyến chung tại A.

58. Cho $(O_1$, 3cm) tiếp xúc ngoài với $(O_2$, 1cm) tại A.

Vẽ hai bán kính O_1B, O_2C song song với nhau thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ O_1O_2.

a) Tính số đo góc BAC.

b) Gọi I là giao điểm của BC và O_1O_2. Tính độ dài O_1I.

59. Cho (O_1) tiếp xúc ngoài với (O_2) tại A. Đường nối tâm O_1O_2 cắt (O_1) tại B và (O_2) tại C. Gọi DE là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn, $D \in (O_1)$, $E \in (O_2)$ và M là giao điểm của BD và CE.

a) Tính số đo góc DAE.

b) Tứ giác ADME là hình gì ? Vì sao ?

c) Chứng minh rằng MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

60*. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN, $M \in (O_1)$, $N \in (O_2)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua O_1O_2, Q là điểm đối xứng với N qua O_1O_2. Chứng minh rằng :

a) MNQP là hình thang cân.

b) PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

c) MN + PQ = MP + NQ.

61*. Cho (O_1, R_1) tiếp xúc ngoài với (O_2, R_2) tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O_1)$, $C \in (O_2)$.

a) Tính $\widehat{BAC}$.

b) Tính độ dài BC.

c) Gọi D là giao điểm của BA với (O_2). Chứng minh rằng C, O_2, D thẳng hàng.

d) Tính độ dài BA, CA.

62. Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) tiếp xúc ngoài tại A $(R_1 > R_2)$. Đường nối tâm O_1O_2 cắt (O_1) tại B, cắt (O_2) tại C. Dây DE của (O_1) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC.

a) Chứng minh tứ giác BDCE là hình thoi.

b) Gọi I là giao điểm của EC và (O_2). Chứng minh rằng D, A, I thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng KI tiếp tuyến của (O_2).

Dạng 3
CÁC BÀI TOÁN VỚI HAI ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Vẽ dây chung, vẽ đường nối tâm.

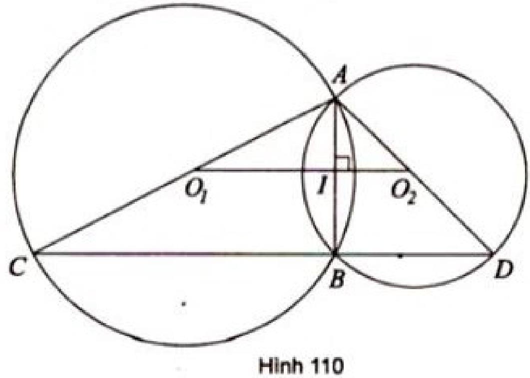
2. Dùng tính chất đường nối tâm là trung trực của dây chung.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho (O_1) cắt (O_2) tại A và B. Kẻ các đường kính AC của (O_1) và AD của (O_2). Chứng minh rằng :

a) Ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b) $CD = 2.O_1O_2$.



Hình 110

Giải

a) Trên hình 110, vẽ dây chung cắt đoạn nối tâm O_1O_2 tại I thì O_1O_2 là trung trực của đoạn AB nên AI = IB. Lại có $AO_1 = O_1C$ (vì bán kính của (O_1)) nên O_1I là đường trung bình của tam giác ACB suy ra CB // O_1I do đó CB // O_1O_2(1). Lại có $AO_2 = O_2D$ vì là bán kính của (O_2) nên O_1O_2 là đường trung bình của tam giác ACD suy ra CD // O_1O_2 (2).

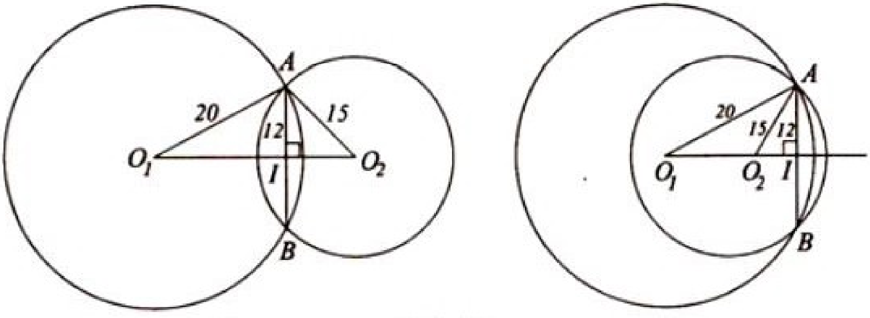
Từ (1) và (2) suy ra CB nằm trên CD hay C, B, D là ba điểm thẳng hàng (vì từ C ở ngoài O_1O_2 chỉ kẻ được một đường thẳng song song với O_1O_2).

b) Theo tính chất của đường trung bình thì CD = 2 O_1O_2.

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn (O_1, 20cm) và (O_2, 15cm) cắt nhau tại A và B. Tính đoạn nối tâm O_1O_2 biết rằng AB = 24cm (Xét hai trường hợp : O_1 và O_2 nằm khác phía đối với AB và O_1O_2 nằm cùng phía đối với AB).

Giải (H.111)

Vẽ dây chung AB cắt đường nối tâm O_1O_2 tại I thì O_1O_2 là trung trực của AB nên $AI \perp O_1O_2$ và $AI = \dfrac{AB}{2} = 12\text{cm}$.



a) Hình 111 b)

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào hai tam giác vuông tại I là O_1IA và O_2IA, ta được

$$O_1A^2 = AI^2 + IO_1^2 \text{ hay } 20^2 = 12^2 + IO_1^2 \Leftrightarrow IO_1^2 = 16^2 \Leftrightarrow IO_1 = 16\text{cm}.$$

$$O_2A^2 = AI^2 + IO_2^2 \text{ hay } 15^2 = 12^2 + IO_2^2 \Leftrightarrow IO_2^2 = 9^2 \Leftrightarrow IO_2 = 9\text{cm}.$$

Nếu O_1 và O_2 nằm khác phía với AB (H.111a) thì

$$O_1O_2 = 15 + 9 = 25 \text{ (cm)}.$$

Nếu O_1 và O_2 nằm cùng phía với AB (H.111b) thì

$$O_1O_2 = 16 - 9 = 7 \text{ (cm)}.$$

Ví dụ 3. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Gọi I là trung điểm của O_1O_2. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA, cắt (O_1) tại C và (O_2) tại D (khác A).Chứng minh rằng CA = AD.

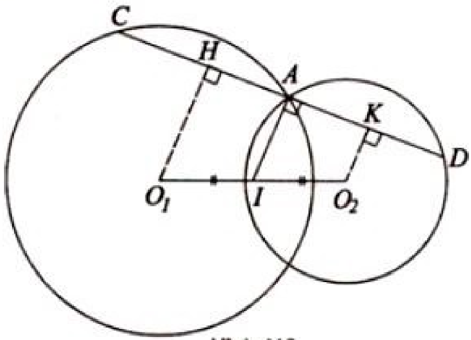
Giải (H.112)

Kẻ $O_1H \perp CD$, $O_2K \perp CD$ thì

O_1H // IA // O_2K. (1)

O_1H vuông góc với dây CA của (O_1) nên $CH = HA = \dfrac{CA}{2}$;

O_2K vuông góc với dây AD của (O_2) nên $AK = KD = \dfrac{AD}{2}$.



Hình 112

Lại có $O_1I = IO_2$ (theo giả thiết). (2)

Từ (1) và (2) suy ra O_1H, IA, O_2K là ba đường thẳng song song cách đều nên

$$AH = AK \text{ hay } CA = AD.$$

III. BÀI TẬP

63. Cho đường tròn (O_1, R_1) cắt đường tròn (O_2, R_2) tại A và B $(R_1 > R_2)$. Hãy cho biết số tiếp tuyến chung của hai đường tròn đồng thời nêu rõ các bước vẽ các tiếp tuyến chung này.

64. Cho hai đường tròn đồng tâm O. Một đường tròn (O') cắt một đường tròn tâm O tại A và B và cắt đường tròn tâm O còn lại tại C, D. Chứng minh rằng AB // CD.

65*. Cho đường tròn (O_1, R_1) cắt đường tròn (O_2, R_2) tại A và B (O_1 và O_2 nằm khác phía đối với AB). Một cát tuyến PAQ xoay quanh A, $P \in (O_1)$, $Q \in (O_2)$ sao cho A nằm giữa P và Q. Hãy xác định vị trí của cát tuyến PAQ trong mỗi trường hợp sau :

1) A là trung điểm của PQ.

2) PQ có độ dài lớn nhất.

3) Chu vi tam giác BPQ đạt giá trị lớn nhất.

4) S_{BPQ} đạt giá trị lớn nhất.

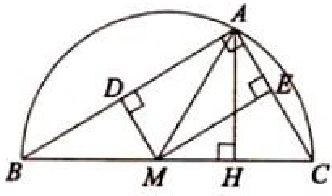
66*. Cho H, K là các giao điểm của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Đường thẳng O_1H cắt (O_1) tại A và (O_2) tại B. O_2H cắt (O_1) tại C và (O_2) tại D. Chứng minh rằng ba đường thẳng BC, BD, HK đồng quy tại một điểm.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

CHỦ ĐỀ 1

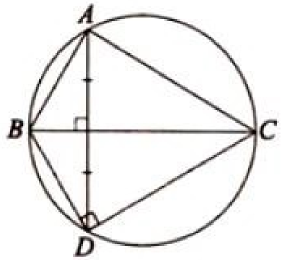
1. (H.113) Vì ba tam giác vuông ADM, AEM, AHM có chung cạnh huyền AM nên 3 đỉnh góc vuông D, E, H nằm trên đường tròn đường kính AM có tâm là trung điểm của AM. Vậy năm điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

(Nhận xét quan trọng Ví dụ 2).



Hình 113

2. (H.114) Vì D đối xứng với A qua BC, B đối xứng với B qua BC, C đối xứng với C qua BC nên $\widehat{BAC}$ đối xứng với $\widehat{BDC}$ qua BC. Suy ra $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 90^o$. Hai tam giác vuông BAC và BDC có chung cạnh huyền BC nên hai đỉnh góc vuông A, D nằm trên đường tròn đường kính BC, có tâm là trung điểm của cạnh huyền BC. Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.



Hình 114

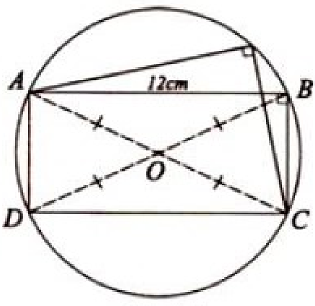
3. (H.115) Vì ba tam giác vuông ABC, ADC và AEC có chung cạnh huyền AC nên ba đỉnh góc vuông B, D, E nằm trên đường tròn đường kính AC. Vậy năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

4. a) Gọi O = AC ∩ BD thì OA = OB = OC = OD (tính chất đường chéo của hình vuông).

Vậy 4 đỉnh A, B, C, D của hình vuông ABCD cùng nằm trên đường tròn tâm O.

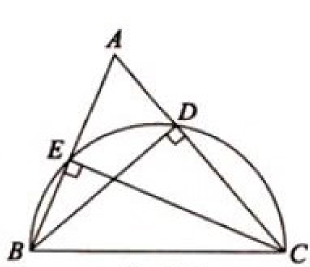
b) Vì tam giác ABC vuông cân tại B nên cạnh BC = 2dm đối diện với góc 45^o do đó

$\sin 45^o = \dfrac{BC}{AC}$ hay $AC = \dfrac{2}{\sin 45^o} = 2\sqrt{2}$ (dm).



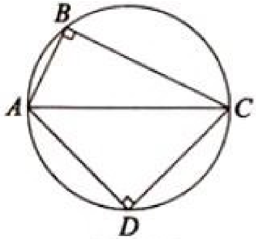
Hình 115

5. (H.116) Vì hai tam giác vuông BDC và BEC có chung cạnh huyền BC nên hai đỉnh góc vuông D, E nằm trên đường tròn đường kính BC. Vậy bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn.



Hình 116

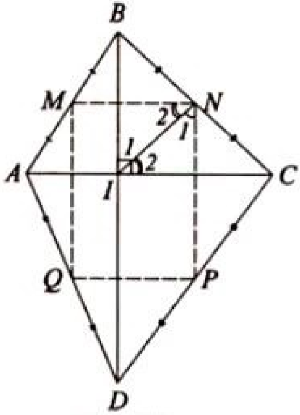
6. (H.117) a) Vì hai tam giác vuông ABC và ADC có chung cạnh huyền AC nên hai đỉnh góc vuông B, D nằm trên đường tròn đường kính BC. Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.



Hình 117

b) Nếu AC = BD thì BD là một đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD nên $\widehat{A} = 90^o$. Vậy tứ giác ABCD là hình chữ nhật (vì tứ giác có ba góc vuông).

7. (H.118) Gọi $I = AC \cap BD$ do $AC \perp BD$ nên $\hat{I} = \widehat{I_1} + \widehat{I_2} = 90^o$. Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA nên MN, NP, PQ, QM là đường trung bình của tam giác BAC, CBD, DAC, ABD suy ra MN // AC // PQ, MQ // BD // NP nên tứ giác MNPQ là hình bình hành.



Hình 118

Lại có $\begin{cases} \widehat{I_1} = \widehat{N_1} \\ \widehat{I_2} = \widehat{N_2} \end{cases}$ (so le trong)

$\Rightarrow \hat{N} = \hat{I} = 90^o$.

Do đó MNPQ là hình chữ nhật.

Hai tam giác vuông MNP, MQP có chung cạnh huyền MP nên hai đỉnh góc vuông N, Q nằm trên đường tròn đường kính MP. Vậy bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

8. Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Dựng hai đường trung trực của hai cạnh, giao điểm của hai đường trung trực là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

9. Tâm của đường tròn ngoại tiếp một tam giác :

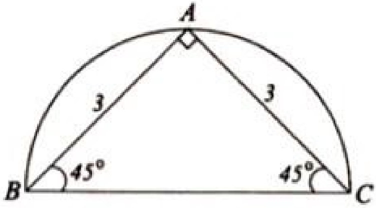
a) Có ba góc nhọn nằm bên trong tam giác đó.

b) Có một góc vuông nằm ở trung điểm cạnh huyền.

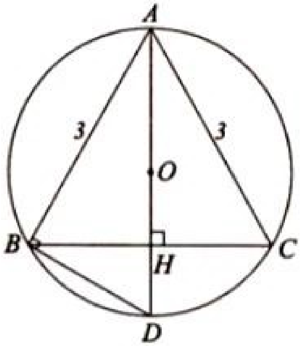
c) Có một góc tù nằm bên ngoài tam giác đó.

10. (H.119) Xét tam giác vuông cân ABC có hai cạnh góc vuông là AB = AC = 3 nên $\hat{B} = \hat{C} = 45^o$ nên $\sin 45^o = \dfrac{3}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{3}{\sin 45^o} = \dfrac{6}{\sqrt{2}}$.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.



Hình 119



Hình 120

11. (H.120) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Kẻ đường cao AH cắt (O) tại D. Vì tam giác ABC đều nên AH vừa là trung trực vừa là phân giác nên $\widehat{BAH} = 30^o$ và AH đi qua tâm O hay AD là đường kính của (O) suy ra tam giác ABD vuông tại B. Do cạnh có độ dài bằng 3 kề với góc 30^o, nên $\cos 30^o = \dfrac{AB}{AD} \Leftrightarrow AD = \dfrac{3}{\cos 30^o} = 2\sqrt{3}$.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $\sqrt{3}$.

Lại có AH đối diện với góc 60^o nên

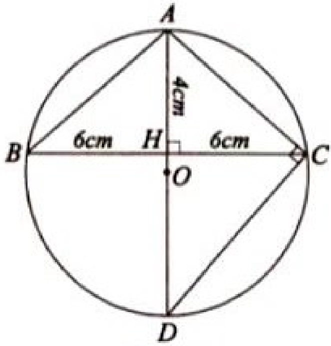
$$\sin 60^o = \frac{AH}{AB} \text{ hay } AH = AB.\sin 60^o = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

12. (H.121) Gọi O là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC cân tại A. Và $D = AH \cap (O)$. Vì tam giác cân tại A nên AH là trung trực của BC do đó BH = HC = 6cm và AH đi qua O của (O). Lúc đó tam giác ACD nội tiếp (O) đường kính AD nên tam giác ACD vuông tại C.

Áp dụng hệ thức về đường cao $h^2 = b'c'$ cho tam giác vuông ACD, thu được:

$6^2 = 4.HD \Leftrightarrow HD = 9$ (cm) do đó AD = 13cm.

Vậy đường tròn (O) có bán kính là 6,5cm.



Hình 121

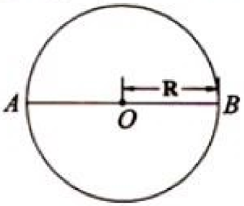
13. a) Dựng đường trung trực AB và đường vuông góc với BC tại B, chúng cắt nhau tại O. Dựng đường tròn (O; OB).

b) Dựng đường trung trực AC và đường vuông góc với BC tại C, chúng cắt nhau tại O'. Dựng đường tròn (O'; O'C).

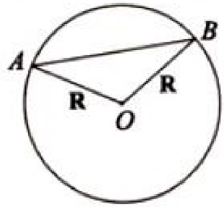
CHỦ ĐỀ 2

14. Gọi AB là một dây bất kì của (O, R). Ta phải chứng minh AB ≤ 2R.

Trường hợp dây AB là đường kính (H.122) ta có AB = 2R.



Hình 122



Hình 123

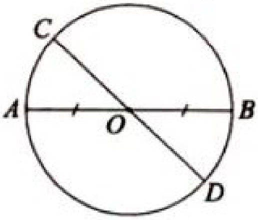
Trường hợp dây AB không là đường kính (H.123).

Áp dụng tính chất về cạnh vào tam giác AOB ta được

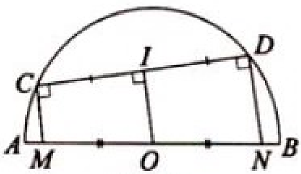
$$AB < AO + OB = R + R = 2R.$$

Vậy ta luôn có AB ≤ 2R.

15. Nam nói đúng. Việt nói sai vì như hình 124, đường kính CD đi qua trung điểm O của dây AB đi qua tâm nhưng CD không vuông góc với AB.



Hình 124



Hình 125

16. Trên hình 125 kẻ OI ⊥ CD thì

OI // CM // DN (vì cùng vuông góc với CD). (1)

Do OI vuông góc với dây CD nên CI = ID. (2)

Từ (1) và (2) suy ra CM, IO, DN là ba đường thẳng song song cách đều do đó

MO = NO. (3)

Lại có AO = OB (vì là bán kính của nửa đường tròn tâm O). (4)

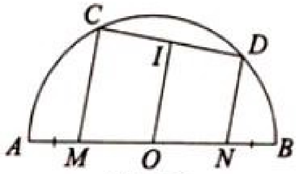
Trừ (4) cho (3) theo vế ta được AM = NB.

17. Trên hình 126 vì AO = OB, AM = NB suy ra MO = ON. (1)

Kẻ OI // MC // ND. (2)

Từ (1) và (2) suy ra OI, MC, ND là ba đường thẳng song song cách đều nên CI = ID. Vì OI đi qua trung điểm của dây CD không đi qua tâm nên OI $\perp$ CD.

Vậy CM, DN vuông góc với CD.



Hình 126

18. Trên hình 127 kẻ OM $\perp$ CD thì :

OM // AH // BK (vì cùng vuông góc với CD). (1)

Do AO = OB (vì là bán kính của (O)). (2)

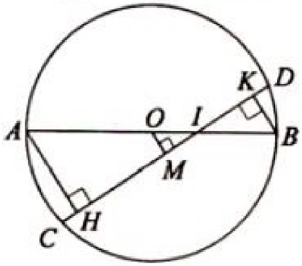
Từ (1) và (2) suy ra AH, OM,BK là ba đường song song cách đều nên

HM = MK. (3)

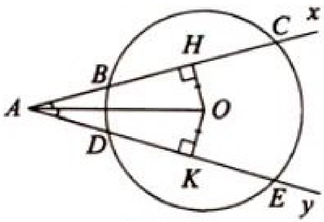
Mặt khác OM vuông góc với dây CD nên

CM = MD. (4)

Trừ (4) cho (3) theo vế thu được CH = KD.



Hình 127



Hình 128

19. Trên hình 128 Kẻ OH $\perp$ Ax, OK $\perp$ Ay thì OH và OK là khoảng cách từ O đến 2 cạnh của góc xAy. Mặt khác BC nằm trên Ax, ED nằm trên Ay nên OH và OK là khoảng cách từ O đến hai dây CB, ED.

Do tâm O nằm trên tia phân giác của góc xAy nên O cách đều Ax, Ay hay OH = OK suy ra BC và DE cách đều tâm O và bằng nhau.

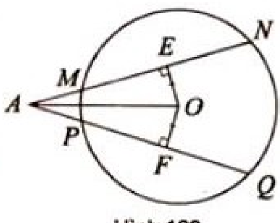
20. Trên hình 129 kẻ OE vuông góc với dây MN, OF vuông góc với dây PQ nên

$$ME = EN = \frac{MN}{2} \ (1) \ ; PF = FQ = \frac{PQ}{2} \ (2).$$

Và OE là khoảng cách từ O đến dây MN, OF là khoảng cách từ O đến dây PQ.

Vì MN = PQ (theo giả thiết) suy ra

OE = OF (3) ; EN = FQ. (4)



Hình 129

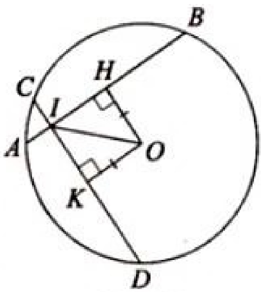
a) Xét hai tam giác vuông AOE và AOF có OA chung (5).

Từ (3) và (5) suy ra $\Delta AOE = \Delta AOF$. Vậy AE = AF. (6)

b) Cộng (4) với (6) theo vế thu được AN = AQ.

21. Trên hình 130 kẻ $OH \perp AB$, $OK \perp CD$ thì OH, OK là khoảng cách từ O đến 2 dây AB, CD và

$$AH = HB = \frac{AB}{2} \ (1);\ CK = KD = \frac{CD}{2} \ (2).$$



Hình 130

a) Do AB = CD nên OH = OK hay O cách đều hai cạnh IB, ID của góc BID. Vậy IO là tia phân giác của góc BID.

b) Xét hai tam giác vuông IHO và IKO, có IO chung, OH = OK nên $\Delta IHO = \Delta IKO$ (Trường hợp cạnh huyền, cạnh góc vuông).

Suy ra IH = IK. (3)

Vì AB = CD (4) nên từ (1) và (2) suy ra HB = KD. (5)

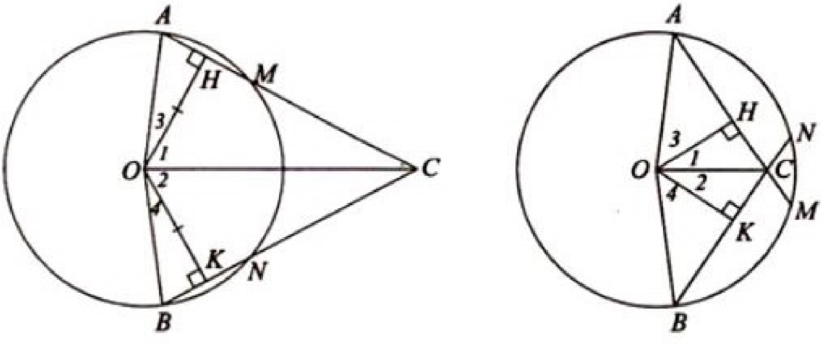
Cộng (3) với (5) theo vế thu được IB = ID. (6)

Trừ (4) cho (6) theo vế ta được CI = AI.

22. a) Kẻ $OH \perp AM$, $OK \perp BN$ thì OH và OK lần lượt là khoảng cách từ tâm O đến dây AM, BN.

Do AM = BN nên OH = OK (1) mà OC = OC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta OHC = \Delta OKC$ (trường hợp cạnh huyền, cạnh góc vuông) nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$. (3)



a) Hình 131 b)

Lại có OA = OB (4) (vì bán kính của (O)).

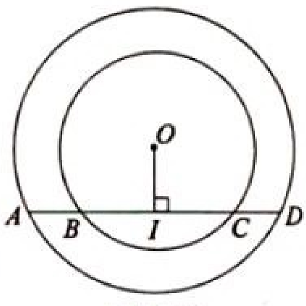
Từ (1) và (4) suy ra $\Delta OHA = \Delta OKB$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông).

Do đó $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$. (5)

Cộng (3) với (5) theo vế, thu được $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$.

Vậy OC là tia phân giác của góc AOB.

b) Tam giác AOB cân tại O có OC là tia phân giác của góc AOB nên $OC \perp AB$.



Hình 132

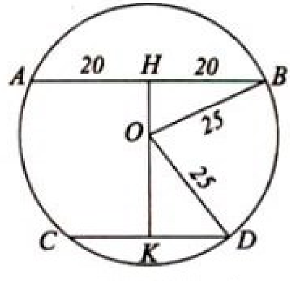
23. Trên hình 132 kẻ OI vuông góc với dây AD thì OI cũng vuông góc với dây BC của đường tròn nhỏ nên AI = ID (1) và BI = IC (2).

a) Trừ (1) cho (2) theo vế thu được AB = CD. (3)

b) Cộng vào hai vế của (3) với BC, thu được AC = BD.

24. Trên hình 133 kẻ $OH \perp AB$ cắt dây CD tại K thì $HK \perp CD$ (do AB // CD).

Nên AH = HB = 20cm, $CK = KD = \dfrac{CD}{2}$ và OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB, CD, HK = 22cm.



Hình 133

Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho tam giác OHB vuông tại H có cạnh huyền OB = 25cm, ta được

$$OB^2 = BH^2 + HO^2 \text{ hay } 25^2 = 20^2 + OH^2$$

$\Leftrightarrow OH^2 = 15^2 \Leftrightarrow OH = 15\text{cm}$ (vì $OH > 0$).

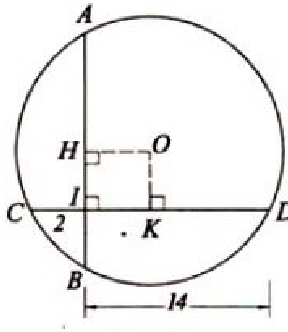
Suy ra $OK = HK - OH = 22 - 15 = 7$ (cm).

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác OKD vuông tại K có cạnh huyền OD = 25cm thu được

$$OD^2 = DK^2 + OK^2 \text{ hay } 25^2 = DK^2 + 7^2$$

$$\Leftrightarrow DK^2 = 24^2 \Leftrightarrow DK = 24 \text{ (cm)}.$$

Vậy CD = 48cm.



Hình 134

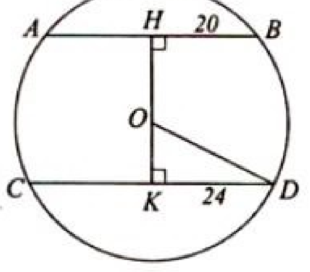
25. Trên hình 134 : Kẻ $OH \perp AB$, $OK \perp CD$ thì OH là khoảng cách từ tâm O đến dây AB, OK là khoảng cách từ tâm O đến dây CD và

$$CK = KD = \frac{CD}{2} = 8 \text{(cm)}.$$

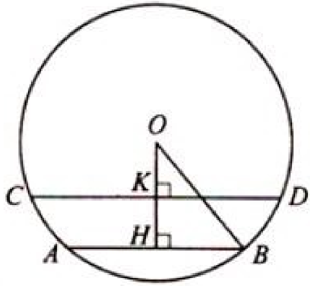
Tứ giác IHOK là hình chữ nhật mà OH = OK (do AB = CD) nên IHOK là hình vuông và IK = CK − CI = 8 − 2 = 6 (cm).

Vậy OH = OK = 6 (cm).

26. Trên hình 135 kẻ $OH \perp AB$ cắt dây CD tại K thì $HK \perp CD$ (do AB // CD).



a)



b)

Hình 135

Nên AH = HB = 20cm, CK = KD = 24cm và OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB, CD, HK là khoảng cách giữa 2 dây AB và CD.

Ta có $OH^2 = OB^2 - HB^2 = 25^2 - 20^2 = 15^2 \Leftrightarrow OH = 15$ (cm) (vì $OH > 0$)

$OK^2 = OD^2 - KD^2 = 25^2 - 24^2 = 7^2 \Leftrightarrow OK = 7$ (cm) (vì $OK > 0$).

Có hai trường hợp :

– Nếu O nằm trong dải song song tạo bởi AB, CD (H.135a) thì

$HK = HO + OK = 15 + 7 = 22$ (cm).

– Nếu O nằm ngoài dải song song tạo bởi AB, CD (H.135b) thì

$HK = OH - OK = 15 - 7 = 8$ (cm).

27*. Trên hình 136, vì OH đi qua trung điểm H của dây AB không đi qua tâm nên $OH \perp AB$ do đó OH là khoảng cách từ O đến dây AB.

OK đi qua trung điểm K của dây CD không đi qua tâm nên $OK \perp CD$ do đó OK là khoảng cách từ O đến dây CD.

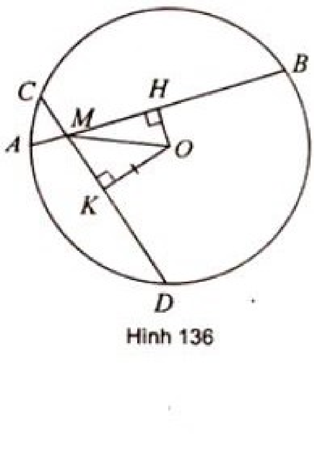
Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào hai tam giác vuông MOH và MOK cùng chung cạnh huyền MO, ta được :

$$MO^2 = OH^2 + HM^2 = OK^2 + KM^2. \quad (1)$$

Do $AB > CD \Rightarrow OH < OK \Rightarrow OH^2 < OK^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

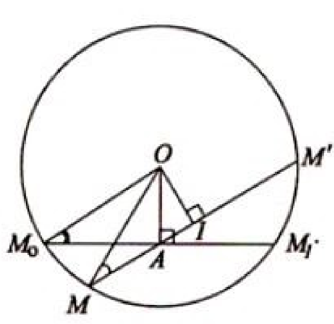
$$MH^2 > MK^2 \text{ hay } MH > MK.$$



Hình 136

28*. (H.137) Lấy một điểm M thuộc (O), MA cắt (O) ở M'. Kẻ OI vuông góc với dây MM' không đi qua tâm. Xét tam giác OMI vuông tại I có cạnh huyền OM bằng bán kính (O) không đổi do đó góc AMO lớn nhất khi cạnh OI đối diện lớn nhất.

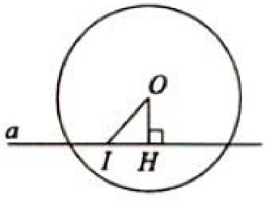
Theo nhận xét ở Ví dụ 2 thì OI sẽ lớn nhất khi dây cung qua A là bé nhất. Vậy điểm M phải tìm là hai điểm M_o, M_1 (dây M_0M_1 đi qua A vuông góc với OA).



Hình 137

CHỦ ĐỀ 3

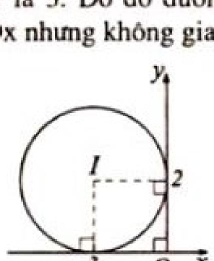
29. Giả sử đường thẳng a cắt (O) quá hai điểm nghĩa là có ít nhất 3 điểm B, C, D vừa thuộc đường thẳng a vừa thuộc (O) hay qua ba điểm thẳng hàng B, C, D ta xác định được (O). Điều này là không thể (chú ý trang 98 SGK toán 9 tập I). Nên giả sử trên là sai. Vậy một đường thẳng và một đường tròn không thể có nhiều hơn hai điểm chung.



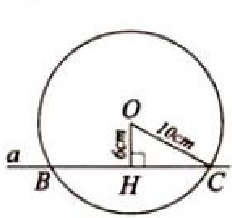
Hình 138

30. Không thể có một tiếp tuyến đi qua một điểm ở bên trong đường tròn. Vì một đường thẳng đi qua một điểm ở bên trong một đường tròn thì nó là cát tuyến của đường tròn đó. Thật vậy, xét đường thẳng a đi qua điểm I nằm bên trong (O, R). Kẻ OH $\perp$ a thì d = OH < OI (1) mà OI < R (2) vì I nằm bên trong (O). Từ (1) và (2) suy ra d < R. Điều này chứng tỏ a là cát tuyến của (O).

31. Trên hình 139, vì điểm I(−3, 2) có hoành độ bằng : −3, tung độ bằng 2 nên khoảng cách từ I đến trục hoành Ox bằng 2 và khoảng cách từ I đến trục tung Oy là 3. Do đó đường tròn tâm I bán kính bằng 2 tiếp xúc với trục hoành Ox nhưng không giao nhau với trục tung Oy.



Hình 139



Hình140

32. a) Trên hình 140 kẻ OH$\perp$a thì OH = 6cm là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a. Do 6 < 10 nên (O) có hai giao điểm với đường thẳng a.

b) Vì OH vuông góc với a nên OH vuông góc với dây BC do đó

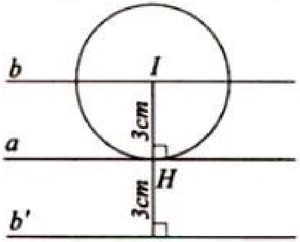
$$BH = HC = \frac{BC}{2}.$$

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác OHC vuông tại H có cạnh huyền OC = 10cm, thu được $OC^2 = CH^2 + HO^2$ hay $10^2 = CH^2 + 6^2$

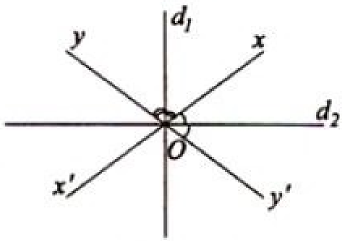
$$\Leftrightarrow CH^2 = 8^2 \Leftrightarrow CH = 8 \text{ (cm) (vì } CH > 0).$$

Vậy BC = 16cm.

33. (H.141) Kẻ IH $\perp$ a thì IH = 3cm. Vì (I) tiếp xúc với đường thẳng a, nên các điểm I cách đều đường thẳng a một khoảng bằng 3cm, do đó I nằm trên hai đường thẳng b và b' song song và cách a một khoảng 3cm.



Hình 141



Hình 142

34. Hướng dẫn (H.142)

Tâm I của tất cả các đường tròn tiếp xúc với 2 đường thẳng x'O x và y'Oy nằm trên hai đường phân giác d_1, d_2 của 2 góc xOy và xOy' và phần kéo dài của chúng.

CHỦ ĐỀ 4

35. (H.143) a) Vì AM = AN, OM = ON (1) nên OA là trung trực của MN nên OA $\perp$ MN và $MI = IN = \frac{MN}{2}$ (2) (I là giao điểm của OA với MN).

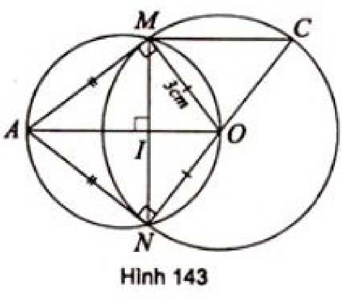
b) Từ (1) và (2) ở câu a) suy ra IO là đường trung bình của tam giác MNC.

Do đó IO // MC. Suy ra MC // AO.

c) Vì AM là tiếp tuyến của (O) nên AM $\perp$ MO hay tam giác AMO vuông tại M có cạnh huyền AO = 5cm, thu được :

$OM^2 = OI.OA$ hay $3^2 = OI.5 \Leftrightarrow OI = 1,8$(cm)

Nên AI = 5 − 1,8 = 3,2 (cm).



Hình 143

Áp dụng hệ thức về cạnh $c^2 = c'a$ ta có

$$AM^2 = 3,2.5 = 4^2 \Leftrightarrow AM = 4 \text{ (cm) (vì } AM > 0).$$

Áp dụng hệ thức về đường cao : $h^2 = b'c'$ ta được

$$MI^2 = 3,2.1,8 = 2,4^2 \Leftrightarrow MI = 2,4 \text{ (cm) (vì } MI > 0).$$

Vậy AM = AN = 4cm, MN = 4,8cm.

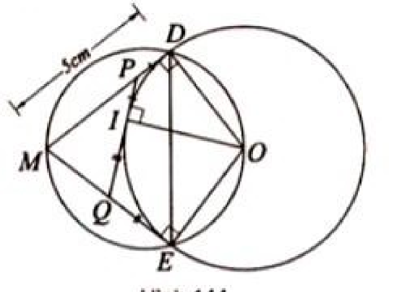
36. (H.144) Theo tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau :

$$\left.\begin{matrix} PI = PD \\ QI = QE \end{matrix}\right\} \Rightarrow PI + QI = PD + QE$$

hay $\quad PQ = PD + QE$.

Nên chu vi tam giác MPQ bằng :

$$MP + MQ + PQ = MP + PD + MQ + QE$$
$$= MD + ME = 5 + 5 = 10 \text{ (cm)}.$$



Hình 144

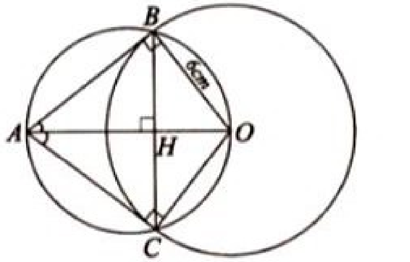
37. (H.145) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì AB = AC nên tam giác ABC cân tại A. Lại có AO là tia phân giác của góc A nên $AO \perp BC$ tại H.

a) Áp dụng hệ thức về cạnh $b^2 = b'a$ ta được $OB^2 = OH.OA$ hay $6^2 = OH.10$

$\Leftrightarrow OH = 3,6$cm nên $AH = 6,4$cm.

b) Áp dụng hệ thức về cạnh $c^2 = c'a$ ta được

$$AB^2 = 6,4.10 \Leftrightarrow AB^2 = 8^2 \Leftrightarrow AB = 8 \text{ (cm)}.$$



Hình 145

38. (H.146) a) Tứ giác MAOB có ba góc vuông nên là hình chữ nhật, lại có hai cạnh kề OA = OB nên là hình vuông.

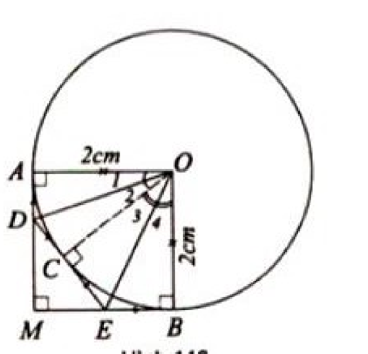
b) Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì DA = DC ; EC = EB nên chu vi tam giác MDE bằng :

$$MD + ME + DC + CE = MD + DA + ME + EB$$
$$= MA + MB = 4\text{cm}.$$

c) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì

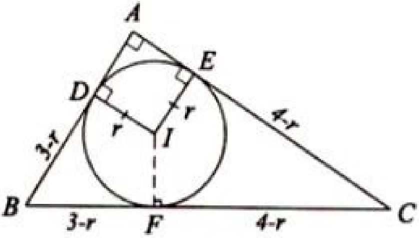
$$\left.\begin{matrix} \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \\ \widehat{O_3} = \widehat{O_4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{O_1} + \widehat{O_4} = \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 45^\circ.$$

Vậy $\quad \widehat{DOE} = \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 45^\circ$.



Hình 146

39. (H.147) a) Tứ giác ADIE có ba góc vuông nên là hình chữ nhật, lại có hai cạnh kề ID = IE = r là bán kính (I) do đó ADIE là hình vuông.



Hình147

b) Gọi F là tiếp điểm của (I) với BC.

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A thì

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$$

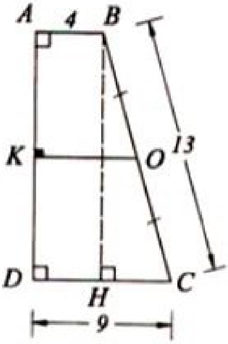
$\Leftrightarrow BC = 5$ (cm).

Vì ADIE là hình vuông nên AD = AE = r, suy ra

$$BD = BF = 3 - r,\ CE = CF = 4 - r.$$

Suy ra $3 - r + 4 - r = 5 \Leftrightarrow 3 = 2r \Leftrightarrow r = 1$ (cm).

40. (H.148) a) Kẻ $BH \perp DC$ thì tứ giác ABHD có ba góc vuông nên là hình chữ nhật do đó DH = AB = 4 (cm), suy ra HC = 9 − 4 = 5cm.



Hình 148

Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho tam giác BHC vuông tại H, ta được

$BC^2 = CH^2 + BH^2$ hay $13^2 = 5^2 + BH^2 \Leftrightarrow BH^2 = 12^2$

$\Leftrightarrow BH = 12$ (cm) (vì $BH > 0$).

Vậy AD = BH = 12 (cm).

b) Gọi O là trung điểm của BC ; đường tròn đường kính BC có bán kính $R = \dfrac{BC}{2} = 6,5$cm.

Kẻ $OK \perp AD$ thì khoảng cách d từ O đến AD bằng OK và OK // CD // AB (vì cùng vuông góc với AD). Lại có OB = OC suy ra AK = KD hay OK là đường trung bình của hình thang ABCD nên

$$d = OK = \frac{AB + CD}{2} = \frac{4 + 9}{2} = 6,5 \text{ (cm)}.$$

Do d = R nên (O) đường kính BC tiếp xúc với AD.

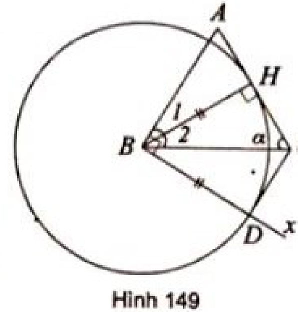
41*. (H.149)

Vì tam giác ABC cân tại A nên

$$\hat{B} = \hat{C} = \alpha.$$

Do $\widehat{ABx} = 90^o$ nên $\widehat{B_2} + \alpha = 90^o$. (1)

Mặt khác $\widehat{B_1} + \alpha = 90^o$. (2)



Hình 149

Do tam giác BHC vuông tại H.

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.

Lại có BH = BD, BC = BC, nên $\Delta BHC = \Delta BDC$ (c.g.c).

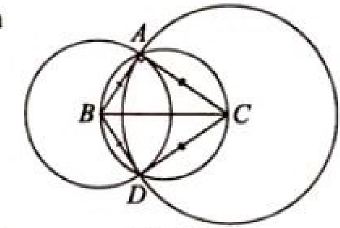
Suy ra $\widehat{D} = \widehat{H} = 90^o$. CD vuông góc với bán kính BD tại D nên CD là tiếp tuyến của (B).

42. (H.150) Do CA = CD, BA = BD, BC = BC nên

$$\Delta BAC = \Delta BDC \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{A} = 90^o.$$

CD vuông góc với bán kính BD tại D nên CD là tiếp tuyến của (B).



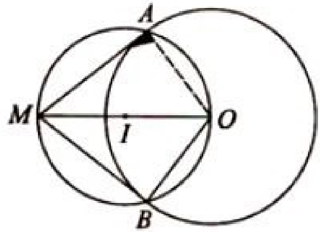
Hình 150

43. (H.151) Vì tam giác MAO và MBO đều nội tiếp (I) có đường kính là cạnh MO nên tam giác MAO vuông tại A ; MBO vuông tại B hay :

MA vuông góc với bán kính OA tại A.

MB vuông góc với bán kính OB tại B.

Vậy MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O).



Hình 151

44. (H.152)

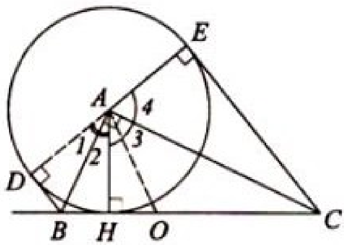
a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau có

$$\left.\begin{matrix}\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ \widehat{A_4} = \widehat{A_3}\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_4} = \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \widehat{BAC} = 90^o.$$

Suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_4} = \widehat{DAE} = 180^o$.

Vậy D, A, E thẳng hàng.

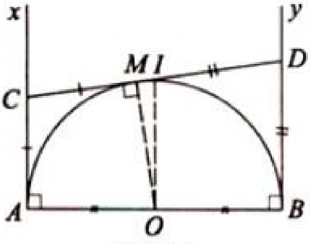


Hình 152

b) Gọi O là trung điểm của BC thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông tại A, đường kính BC.

Lại có DA = AE nên OA là đường trung bình của hình thang BDEC suy ra OA // BD do đó OA ⊥ DE. DE vuông góc với bán kính OA tại A. Vậy DE tiếp xúc với đường tròn (O) đường kính BC.

45*. (H.153)



Hình153

Kẻ OI ⊥ AB (I ∈ CD) thì CA // IO // DB (1) mà AO = OB (2) (vì bán kính).

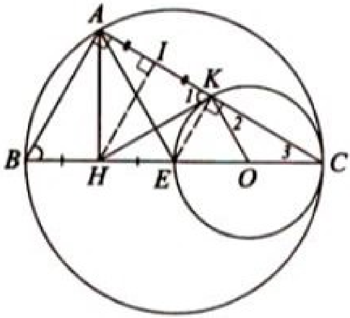
Từ (1) và (2) suy ra CA, IO, DB là ba đường thẳng song song cách đều nên CI = ID. Lúc đó I là tâm đường tròn đường kính CD và IO là khoảng cách d từ tâm I đến AB.

Do OI là đường trung bình của hình thang ACDB nên $d = OI = \dfrac{AC + BD}{2}$.

Lại có CA = CM, DB = DM (theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau nên $\dfrac{AC+BD}{2} = \dfrac{CM+DM}{2} = \dfrac{DC}{2} = R$ là bán kính của đường tròn (I). Do d = R

Vậy AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD.

46*. (H.154). Vì tam giác EKC có cạnh EC là đường kính đường tròn ngoại tiếp nên tam giác giác EKC vuông tại K.



Hình 154

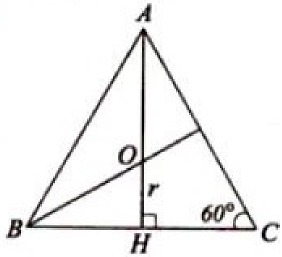
Kẻ HI ⊥ AK thì BA // HI // EK (1)

Mà BH = HE (2) (theo gt).

Từ (1) và (2) suy ra BA, HI, EK là ba đường thẳng song song cách đều nên AI = IK suy ra tam giác AHK cân tại H do đó $\widehat{K_1} = \widehat{B}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{HAK}$).

Lại có $\widehat{C_3} = \widehat{K_2}$ (do OC = OK với O là tâm đường tròn đường kính EC) nên $\widehat{K_1} + \widehat{K_2} = 90^o$. Do $\widehat{AKC} = 180^o$ nên $\widehat{HKO} = 90^o$ hay HK vuông góc với bán kính OK tại K. Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC.

47. (H.155) Xét tam giác đều ABC ngoại tiếp (O, r). Kẻ đường cao AH. Vì tam giác ABC đều nên trực tâm, trọng tâm của tam giác trùng với giao điểm của ba đường phân giác hay trùng với O là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC suy ra AH = 3r (theo tính chất của đường trung tuyến) nên AH là cạnh đối diện với $\widehat{C} = 60^o$ của tam giác AHC.

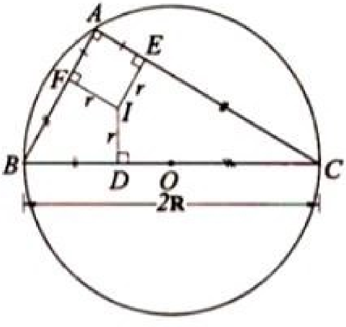


Hình 155

Do đó $\sin 60^{0} = \frac{AH}{AC}$, hay $AC = \frac{AH}{\sin 60^{0}} = \frac{3r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2r\sqrt{3}$.

Vậy $S = \frac{1}{2}.3r.2r\sqrt{3} = 3r^{2}\sqrt{3}$ (dvdt).

48. (H.156) Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (I, r) với các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì AE = AF, BD = BF và CD = CE.



Hình 156

a) Tứ giác AFIE có ba góc vuông nên là hình chữ nhật do có hai cạnh kề IE = IF = r nên AFIE là hình vuông do đó AE = AF = r.

Lúc đó

$$BF = AB - r. \quad (1)$$

$$CE = AC - r. \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) theo vế, thu được

$$BF + CE = AB + AC - 2r = BD + CD = BC.$$

Suy ra $2r = AB + AC - BC$.

b) Do tam giác ABC vuông tại A nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của cạnh huyền BC hay BC = 2R.

Vậy AB + AC = 2(R + r).

49. (H.157) Gọi D là tiếp điểm của (Ia) với cạnh BC.

a) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì

$$BD = BE, CD = CF, AE = AF.$$

Do : $\quad AE = AB + BE = c + BD. \quad (1)$

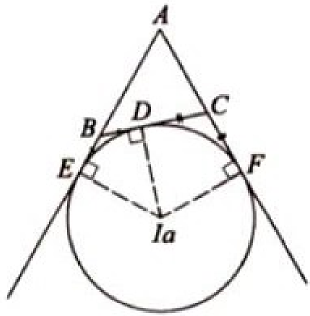
$\quad AF = AC + CF = b + CD. \quad (2)$

Cộng (1) với (2) theo vế, ta được

$$2AE = 2AF = b + c + BD + CD$$

$$= a + b + c.$$

Vậy $AE = AF = \frac{a+b+c}{2}$.



Hình 157

b) Theo câu a)

$$BD + c = BE + c = AE = \frac{a+b+c}{2}$$

$$CD + b = CF + b = AF = \frac{a+b+c}{2}.$$

Suy ra $BE = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}$ và $CF = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{c+a-b}{2}.$

50*. Xem hình 156, bài 48. Theo bài 48, ta có : DC = CE.

Vậy :

$$BD.DC = BD.CE = BF.CE = (AB - r)(AC - r)$$
$$= AB.AC + r(r - AB - AC)$$

Mà $r(r - AB - AC) = \frac{AB + AC - BC}{2}\left(\frac{-AB - AC - BC}{2}\right)$

$$= -\frac{(AB+AC)^2 - BC^2}{4} = -\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2 + 2AB.AC}{4}$$

$$= -\frac{AB.AC}{2}$$ (do $AB^2 + AC^2 = BC^2$ theo định lí Py-ta-go).

Vậy $BD.DC = BD.CE = AB.AC - \frac{AB.AC}{2} = \frac{AB.AC}{2} = S.$

51*. (H.158) Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì CE = CF = x, BE = BD = z và

AD = AF = y.

Theo giả thiết : CA.CB = 2DA.DB

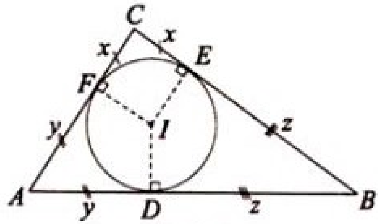
$\Leftrightarrow (x + y)(x + z) = 2yz$

$\Leftrightarrow x^2 + xy + xz = yz$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + 2xz = 2yz$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + 2zx + y^2 + z^2 = 2yz + y^2 + z^2$

$\Leftrightarrow (x + y)^2 + (z + x)^2 = (y + z)^2$



Hình 158

hay $CA^2 + AB^2 = CB^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại C (theo Py-ta-go đảo).

CHỦ ĐỀ 5

52. Hai đường tròn có thể có 0, 1, 2, 3,... vô số điểm chung.

53. Hai đường tròn phân biệt không thể có quá 2 điểm chung (chỉ có thể là 0, 1 hoặc 2). Vì nếu hai đường tròn có đến 3 điểm chung thì ba điểm này không thẳng hàng và chúng phải trùng nhau do qua 3 điểm không thẳng hàng ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

54. Dòng 1 : Cắt nhau

Dòng 2 : Không giao nhau (đựng nhau)

Dòng 3 : Tiếp xúc ngoài

Dòng 4 : Không giao nhau (ở ngoài nhau)

Dòng 5 : Tiếp xúc trong

Dòng 6 : Cắt nhau

55. Dòng 1 : $d = 6cm$

Dòng 2 : $4 < d < 10$

Dòng 3 : $R = 6cm$

Dòng 4 : 4cm

56. Chia ra hai trường hợp :

a) Tiếp xúc trong : 1 tiếp tuyến chung (kẻ $Ax \perp O_1A$).

b) Tiếp xúc ngoài : 1 tiếp tuyến chung trong, 2 tiếp tuyến chung ngoài.

– Tiếp tuyến chung trong : Kẻ $Ax \perp O_1A$.

– Hai tiếp tuyến chung ngoài.

B1. Vẽ $(O_1, R_1 - R_2)$.

B2. Vẽ đường tròn tâm O' đường kính O_1O_2 cắt $(O_1, R_1 - R_2)$ tại H.

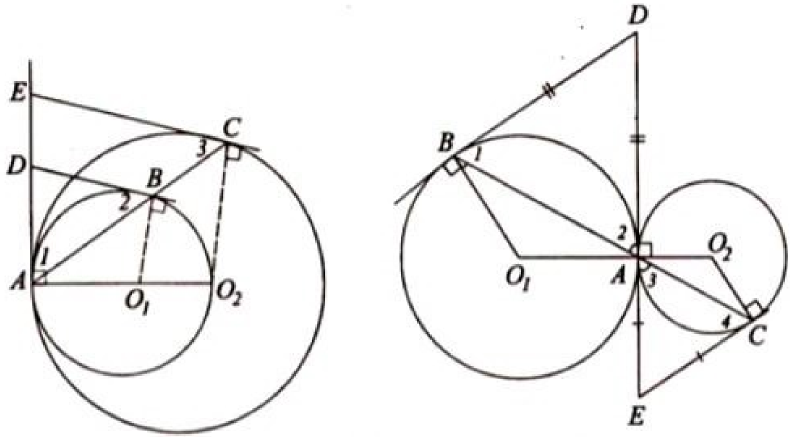
B3. Tiếp điểm B của tiếp tuyến chung với (O_1) là giao điểm của O_1H với (O_1, R_1).

B4. Tiếp điểm C của tiếp tuyến chung với (O_2) là giao điểm của (O_2) với (B, HO_2).

B5. Lấy B' đối xứng với B qua O_1O_2, C' đối xứng với C qua O_1O_2, C' đối xứng với C qua O_1O_2 thì B'C' là tiếp tuyến chung ngoài thứ 2.

57. (H.159) Trường hợp tiếp xúc trong trên hình 159a. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau : DA = DB, EA = EC

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2 \\ \widehat{A}_1 = \widehat{C}_3\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{C}_3 \Rightarrow BD \,//\, CE.$$



a) **Hình 159** b)

Trường hợp tiếp xúc ngoài trên hình 159b.

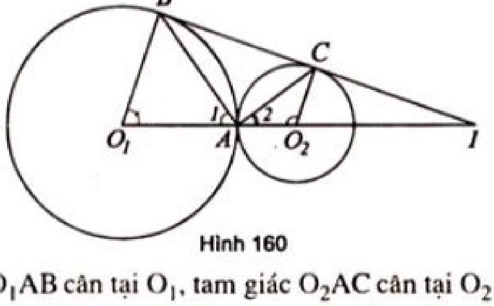
Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau : DA = DB, EA = EC.

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_2$ (1) $\widehat{A}_3 = \widehat{C}_4$ (2) mà $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_3$ (3) (vì đối đỉnh).

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\widehat{B}_1 = \widehat{C}_4 \Rightarrow BD \,//\, CE.$$

58. (H.160) a) Vì $O_1B \,//\, O_2C$ nên $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^o$.



Hình 160

Mà tam giác O_1AB cân tại O_1, tam giác O_2AC cân tại O_2 nên

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \frac{180^o - \widehat{O}_1}{2} + \frac{180^o - \widehat{O}_2}{2} = \frac{360^o - (\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2)}{2} = \frac{180^o}{2} = 90^o.$$

Vậy $\widehat{BAC} = 90^o$.

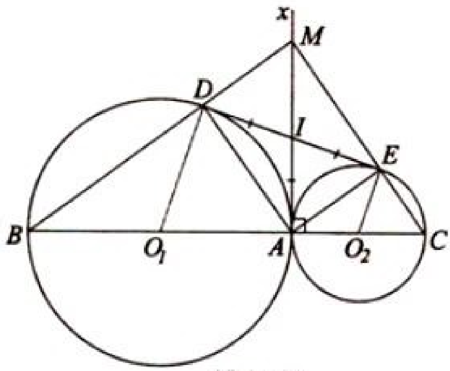
b) Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét cho $O_1B \,//\, O_2C$ thu được

$$\frac{3}{1}=\frac{O_1B}{O_2C}=\frac{IO_1}{IO_2}\Rightarrow\frac{IO_1}{3}=\frac{IO_2}{1}=\frac{IO_1-IO_2}{3-1}=\frac{O_1O_2}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$\Rightarrow IO_1=6\text{ (cm)}.$$

59. (H.161)

a) Kẻ tiếp tuyến chung Ax của (O_1) và (O_2) cắt DE tại I. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì ID = IA = IE nên tam giác DAE vuông tại A hay $\widehat{DAE}=90^o$.



Hình 161

b) Tam giác DAB có AB là đường kính của đường tròn ngoại tiếp (O_1) nên tam giác DAB vuông tại D suy ra $\widehat{ADB}=90^o$ tam giác AEC có cạnh AC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp (O_2) nên tam giác AEC vuông tại E suy ra $\widehat{AEM}=90^o$.

Vậy tứ giác ADME là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

c) Vì ADME là hình chữ nhật nên đường chéo AM đi qua trung điểm I của DE hay AM trùng với Ax là tiếp tuyến chung của hai đường tròn. Vậy AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

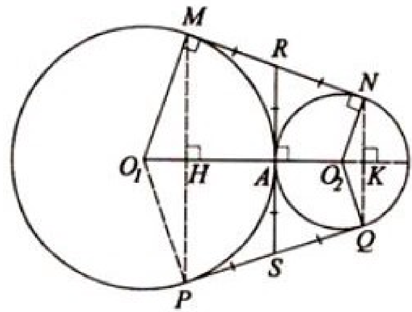
60. (H.162) a) Vì P đối xứng với M qua O_1O_2 (1), Q đối xứng với N qua O_1O_2 (2). Nên

$$\left.\begin{array}{l}MP\perp O_1O_2\\ NQ\perp O_1O_2\end{array}\right\}\Rightarrow MP\,//\,NQ.\quad(3)$$

Suy ra MNQP là hình thang (4) lại có H đối xứng với H qua O_1O_2. (5)

Từ (1), (2), (5) suy ra $\widehat{HMN}$ đối xứng $\widehat{HPQ}$ qua O_1O_2 nên $\widehat{HMN}=\widehat{HPQ}$. (6)

Từ (4) và (6) suy ra MNQP là hình thang cân.



Hình 162

b) Lại có O_1 đối xứng với O_1 qua O_1O_2. (7)

O_2 đối xứng với O_2 qua O_1O_2. (8)

Từ (1), (2), (7) suy ra $\widehat{O_1PQ}$ đối xứng với $\widehat{O_1MN}$ qua O_1O_2 nên $\widehat{O_1PQ} = \widehat{O_1MN} = 90^o$, hay PQ vuông góc với bán kính O_1P tại P. Do đó PQ là tiếp tuyến của (O_1).

Từ (1), (2), (8) suy ra $\widehat{O_2QP}$ đối xứng với $\widehat{O_2NM}$ qua O_1O_2 nên $\widehat{O_2QP} = \widehat{O_2NM} = 90^o$, hay QP vuông góc với bán kính O_2Q tại Q. Do đó QP là tiếp tuyến (O_2).

Vậy PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

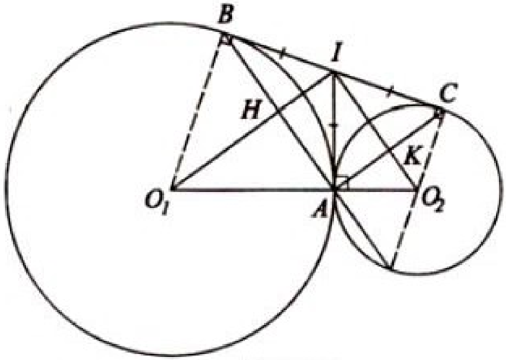
c) Kẻ tiếp tuyến chung tại A, cắt MN, PQ thứ tự tại R và S.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có MR = RA = RN, PS = SA = SQ nên $$MN + PQ = 2.RS. \quad (9)$$

Lại có RS là đường trung bình của hình thang MNQP, do đó
$$MP + NQ = 2.RS. \quad (10)$$

Từ (9) và (10), suy ra MN + PQ = MP + NQ.

61. (H.163) a) Kẻ tiếp tuyến chung tại A, cắt BC tại I.



Hình 163

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì :

IA = IB = IC nên $\widehat{BAC} = 90^o$.

b) Vì IA = IB = IC

và $O_1A = O_1B$,

$O_2A = O_2C$.

Nên IO_1 và IO_2 lần lượt là trung trực của AB và AC. Do đó $IO_1 \perp AB$, $IO_2 \perp AC$, suy ra tứ giác AHIK là hình chữ nhật vì có ba góc vuông nên $\widehat{HIK} = 90^o$ hay tam giác O_1IO_2 vuông tại I.

Áp dụng hệ thức về đường cao $h^2 = b'c'$, ta được $IA^2 = O_1A.AO_2$, hay
$$IA^2 = R_1.R_2 \Leftrightarrow IA = \sqrt{R_1R_2}.$$

Vậy $BC = 2IA = 2\sqrt{R_1R_2}$.

c) Vì $\widehat{CAD}$ kề bù với $\widehat{BAC} = 90^o$ nên $\widehat{CAD} = 90^o$. Tam giác CAD vuông tại A nội tiếp (O_2) nên CD là đường kính. Vậy C, O_2, D thẳng hàng.

d) Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác BCD vuông tại C, thu được

$$BD^2 = DC^2 + CB^2 \text{ hay } BD^2 = 4R_2^2 + 4R_1R_2$$

$$\Leftrightarrow BD = 2\sqrt{R_2^2 + R_1R_2}.$$

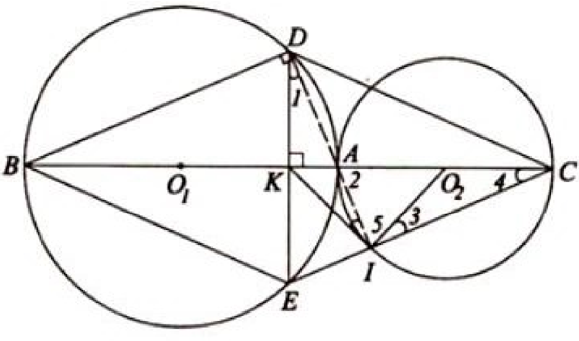
Áp dụng hệ thức về cạnh : $c^2 = c'a$, ta được $BC^2 = BA.BD$, hay

$$4R_1R_2 = BA.2\sqrt{R_2^2 + R_1R_2} \Leftrightarrow BA = \frac{2R_1R_2}{\sqrt{R_2^2 + R_1R_2}} = \frac{2R_1\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1 + R_2}}.$$

Áp dụng hệ thức về đường cao ah = bc, ta có : BD. CA = BC.CD, hay

$$2\sqrt{R_2^2 + R_1R_2}.CA = 2\sqrt{R_1R_2}.2R_2 \Leftrightarrow CA = \frac{2R_2\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1 + R_2}}.$$

62. (H.164) a) Vì BC vuông góc với đường thẳng DE nên DK = KE, BK = KC (theo giả thiết) do đó tứ giác BDCE là hình bình hành, lại có $BC \perp DE$ nên là hình thoi.



Hình 164

b) Vì tam giác BDA nội tiếp đường tròn (O_1) có BA là đường kính nên ΔBDA vuông tại D.

Gọi I' là giao điểm của DA với CE thì $\widehat{AI'C} = 90^o$ (1) (vì so le trong với $\widehat{BDA}$). Lại có tam giác AIC nội tiếp đường tròn (O_2) có AC là đường kính nên tam giác AIC vuông tại I, hay $\widehat{AIC} = 90^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra I ≡ I', vậy D, A, I thẳng hàng.

c) Vì tam giác DIE vuông tại I có IK là trung tuyến ứng với cạnh huyền DE nên KD = KI = KE $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{I}_2$ (1). Lại có $\hat{D}_1 = \hat{C}_4$ (2) do cùng phụ với $\widehat{DEC}$ và $\hat{C}_4 = \hat{C}_3$ (3), vì $O_2C = O_2I$ là bán kính của đường tròn (O_2).

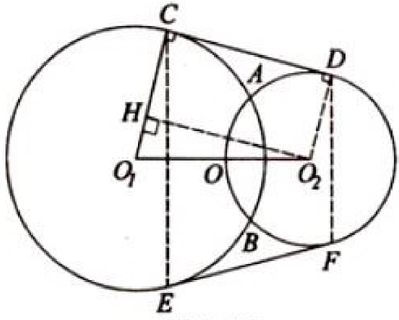
Từ (1) (2), (3) suy ra $\hat{I}_2 = \hat{I}_3 \Rightarrow \hat{I}_2 + \hat{I}_5 = \hat{I}_5 + \hat{I}_3 = 90^o$ hay $\widehat{KIO_2} = 90^o$ do đó KI vuông góc với bán kính O_2I của đường tròn (O_2) vậy KI là tiếp tuyến của đường tròn (O_2).

63. (H.165) Có hai tiếp tuyến chung ngoài.

B_1 : Vẽ đường tròn phụ thứ nhất $(O_1, R_1 - R_2)$

B_2 : Vẽ đường tròn phụ thứ hai tâm O' đường kính O_1O_2 cắt đường tròn phụ thứ nhất tại H.

B3 : Tiếp điểm C của tiếp tuyến chung thứ nhất với đường tròn (O_1) là giao điểm của O_1H với đường tròn (O_1, R_1).



Hình 165

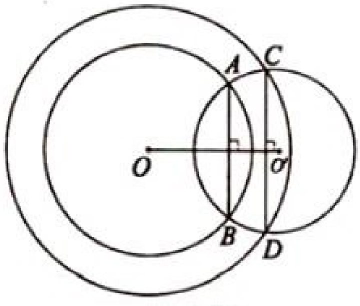
B_4 : Tiếp điểm D của tiếp tuyến chung thứ nhất với đường tròn (O_2) là giao điểm của đường tròn (C, HO_2) với đường tròn (O_2).

B_5 : Lấy E đối xứng với C qua O_1O_2. F đối xứng với D qua O_1O_2 thì EF là tiếp tuyến chung thứ hai.

64. (H.166) Đường tròn (O') cắt đường tròn (O, OA) tại A và B nên $OO' \perp AB$. (1)

Đường tròn (O') cắt đường tròn (O, OC) tại C và D nên $OO' \perp CD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB // CD.

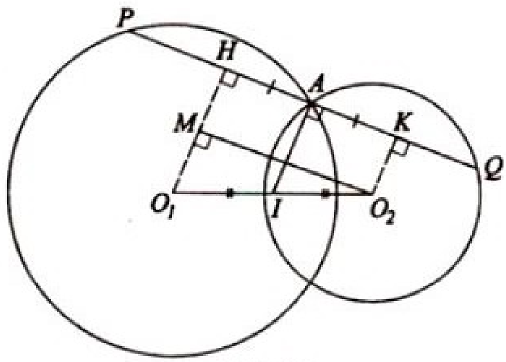


Hình 166

65. (H.167) a) Giả sử đã xác định được vị trí của cát tuyến PAQ sao cho PA = AQ.

Kẻ O_1H vuông góc với dây PA thì $PH = HA = \frac{1}{2}PA$.

Kẻ O_2K vuông góc với dây AQ thì $AK = KQ = \frac{1}{2}AQ$.



Hình 167

Nên AH = AK.

Kẻ Ax // O_1H // O_2K cắt O_1O_2 tại I thì $O_1I = IO_2$ và $Ax \perp PQ$.

Từ đó suy ra cách xác định vị trí của cát tuyến PAQ đó là cát tuyến PAQ vuông góc với IA tại A với I là trung điểm của đoạn nối tâm O_1O_2.

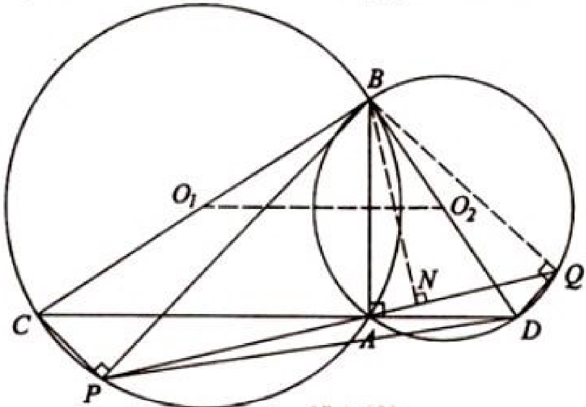
b) Trên hình 167 ta thấy PA = HK.

Kẻ $O_2M \perp O_1H$ thì tứ giác $MHKO_2$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật do đó $HK = MO_2$. Lúc đó O_2M là đường vuông góc kẻ từ O_2 đến đường thẳng O_1H, O_2O_1 là đường xiên kẻ từ O_2 đến đường thẳng O_1H.

Nên $O_2M \le O_1O_2$ hay $PQ = 2HK = 2O_2M \le 2O_1O_2$ (không đổi). Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv O$ hay $PQ \,//\, O_1O_2$.

Vậy ở vị trí cát tuyến $PAQ \,//\, O_1O_2$ thì PQ có độ dài lớn nhất.

c) (H.168) Qua A kẻ cắt tuyến CAD vuông góc với BA.



Hình 168

Thì tam giác ABC và ABD vuông tại A lần lượt nội tiếp các đường tròn (O_1), (O_2) nên O_1 là trung điểm của BC và O_2 là trung điểm của BD.

Lúc đó O_1O_2 là đường trung bình của tam giác BCD nên $O_1O_2 \,//\, CD$ suy ra $PQ \le 2O_1O_2$ (1) (theo câu b). Lại có : $BQ \le BD$ (2), $BP \le BC$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra chu vi tam giác

$$BPQ = PQ + BQ + BP \le 2(O_1O_2 + R_1 + R_2) \text{ (không đổi).}$$

Dấu bằng có khi $P \equiv C, Q \equiv D$.

Vậy chu vi tam giác BPQ đạt giá trị lớn nhất khi cát tuyến PAQ vuông với dây chung BA tại A.

d) Kẻ $BN \perp PQ$ thì $BN \le BA$.

Lúc đó $S_{BPQ} = \dfrac{1}{2}BN.PQ \le \dfrac{1}{2}BA.CD$ không đổi.

Vậy S_{BPQ} đạt giá trị lớn nhất khi cát tuyến PAQ vuông góc với dây chung BA tại A.

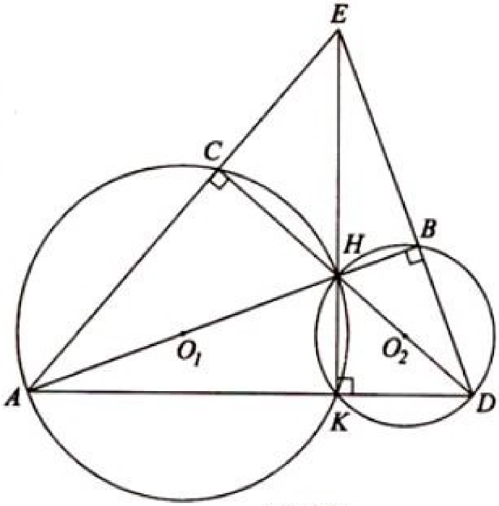
66. (H.169)

Gọi giao điểm của AC với BD là E. Các tam giác ACH, AKH nội tiếp đường tròn (O_1) có cạnh HA là đường kính nên tam giác ACH vuông tại C, tam giác AKH vuông tại K suy ra

DC $\perp$ AE (1) HK $\perp$ AK (2).

Lại có tam giác HKD, HBD nối tiếp đường tròn (O_2) có cạnh HD là đường kính nên tam giác HKD vuông tại K, tam giác HBD vuông tại B suy ra :

HK $\perp$ KD (3), AB $\perp$ DE (4).



Hình 169

Từ (2) và (3) suy ra A, K, D thẳng hàng nên HK $\perp$ AD. (5)

Từ (1) và (4) suy ra H là trực tâm của tam giác AED, do đó EH $\perp$ AD. (6)

Từ (5) và (6) suy ra H $\in$ EK (vì qua H ở ngoài đường thẳng AD chỉ kẻ được một đường thẳng vuông góc với AD).

Vậy AC, BD, HK đồng quy tại E là giao điểm của AC và BD.

Chương 3

GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu góc ở tâm, góc tạo bởi hai cát tuyến (hoặc góc giữa cát tuyến và tiếp tuyến) của đường tròn, quỹ tích cung chứa góc và điều kiện để một tứ giác nội tiếp hay ngoại tiếp được một đường tròn. Qua đó rèn luyện những kĩ năng cơ bản trong việc chứng minh các tính chất hình học, cách giải các bài toán quỹ tích, dựng hình, tính toán các đại lượng hình học như độ dài đường tròn, độ dài cung tròn, diện tích hình tròn và diện tích hình quạt tròn.

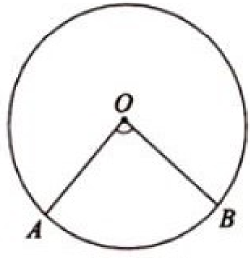
Chủ đề 1

GÓC Ở TÂM, SỐ ĐO CUNG, LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Góc ở tâm có mối liên hệ chặt chẽ với cung tròn.

Trong đường tròn (O), ta xét góc ở tâm $\widehat{AOB}$ (H.170) thì số đo cung nhỏ AB bằng số đo góc $\widehat{AOB}$, số đo cung lớn AB bằng $360^o - \widehat{AOB}$. Từ đó, để tìm số đo cung ta tìm số đo góc và ngược lại.



Hình 170

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1

SỰ LIÊN HỆ GIỮA GÓC Ở TÂM VÀ CUNG

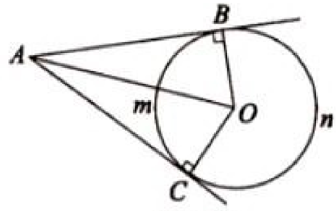
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Số đo góc ở tâm đường tròn bằng số đo cung bị chắn. Trên hình 170 :

$$\text{sđ}\,\widehat{AOB} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giả sử A là một điểm nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB và AC tới đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Tìm số đo cung nhỏ và cung lớn BC của đường tròn (O), biết rằng $\widehat{BAC} = \alpha$.



Hình 171

Giải (H.171)

Từ giả thiết bài toán ta có các tam giác OAB, OAC vuông lần lượt tại B và C.

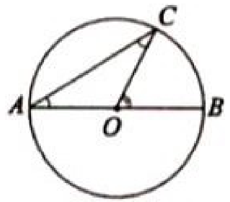
Từ đó $\widehat{OAB} + \widehat{AOB} = 90^o$, $\widehat{OAC} + \widehat{AOC} = 90^o$.

Suy ra $(\widehat{OAB} + \widehat{OAC}) + (\widehat{AOB} + \widehat{AOC}) = 180^o$.

Hay $\widehat{BAC} + \widehat{BOC} = 180^o$, dẫn đến $\widehat{BOC} = 180^o - \alpha$.

Do đó số đo $\overset{\frown}{BmC} = 180^o - \alpha$ và số đo $\overset{\frown}{BnC} = 180^o + \alpha$.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) đường kính AB và dây cung AC. Chứng tỏ rằng sđ $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$.



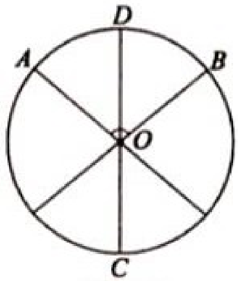
Hình 172

Giải (H.172)

Ta thấy $\widehat{BOC}$ là góc ngoài của tam giác AOC cân tại đỉnh C nên $\widehat{BOC} = 2\widehat{OAC} = 2\widehat{BAC}$

Từ đó $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ (đpcm).

Ví dụ 3. Giả sử C là một điểm trên cung lớn AB của đường tròn (O). Điểm C chia cung lớn AB thành hai cung AC và CB. Chứng minh rằng cung lớn AB có sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ + sđ $\overset{\frown}{CB}$.



Hình 173

Giải

Trường hợp 1 (H.173). Tia OC nằm trong góc đối đỉnh của góc ở tâm $\widehat{AOB}$.

Kẻ đường kính CD của đường tròn (O), ta thấy

$$\widehat{AOD} + \widehat{AOC} = 180^o;$$

$$\widehat{BOD} + \widehat{BOC} = 180^o.$$

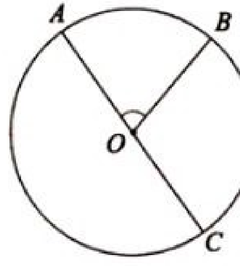
Suy ra $\widehat{AOD} + \widehat{BOD} + (\widehat{AOC} + \widehat{BOC}) = 360^o$

hay $\widehat{AOB}+\widehat{AOC}+\widehat{BOC}=360^{o}$.

Từ đó số đo cung nhỏ AB + số đo cung nhỏ AC + số đo cung nhỏ BC = 360^{o}. Vậy số đo cung lớn AB = số đo cung nhỏ AC + số đo cung nhỏ CB. Nghĩa là ta đã chứng minh được nếu C nằm trên cung lớn AB thì

$$\text{sđ } \overset{\frown}{AB} = \text{sđ } \overset{\frown}{AC} + \text{sđ } \overset{\frown}{CB}.$$

Trường hợp 2 (H.174). Tia OC trùng với tia đối của một cạnh góc ở tâm $\widehat{AOB}$.



Hình 174

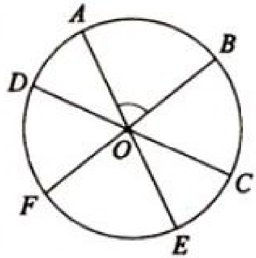
Ta có $\widehat{AOB}+\widehat{COB}=180^{o}$; $\widehat{AOC}=180^{o}$.

Suy ra $\widehat{AOC}+\widehat{COB}+\widehat{AOB}=360^{o}$

hay $\widehat{AOC}+\widehat{COB}=360^{o}-\widehat{AOB}$.

Từ đó số đo cung nửa đường tròn AC + số đo cung nhỏ CB = số đo cung lớn AB. Nghĩa là với cung lớn AB, ta có sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ + sđ $\overset{\frown}{CB}$.

Trường hợp 3 (H.175): Tia OC nằm trong một góc kề bù với góc ở tâm AOB.



Hình 175

Từ trường hợp 2 ta thấy số đo cung lớn AB = số đo cung nửa đường tròn AE + số đo cung nhỏ EB.

Vì C nằm trên cung nhỏ EB, nên số đo cung nhỏ EB = số đo cung nhỏ AC + số đo cung nhỏ CB. Do đó số đo cung lớn AB = số đo cung nửa đường tròn AE + số đo cung nhỏ EC + số đo cung nhỏ CB. Từ trường hợp 2 ta có số đo cung nửa đường tròn AE + số đo cung nhỏ EC = số đo cung lớn AC. Do đó số đo cung lớn AB = số đo cung lớn AC + số đo cung nhỏ CB (đpcm).

Lưu ý. *Trong các bài toán về cung tròn, bài toán chứng minh hai cung bằng nhau có ý nghĩa rất quan trọng. Từ hai cung bằng nhau, ta chứng minh được hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau.*

III. BÀI TẬP

1. Giả sử M là một điểm nằm ngoài đường tròn (O, R) sao cho OM = 2R. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A và B là các tiếp điểm). Tìm số đo góc ở tâm $\widehat{AOB}$.

2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Đường phân giác của góc $\widehat{OBO'}$ cắt các đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại C và D so sánh hai góc $\widehat{BOC}$ và $\widehat{BO'D}$.

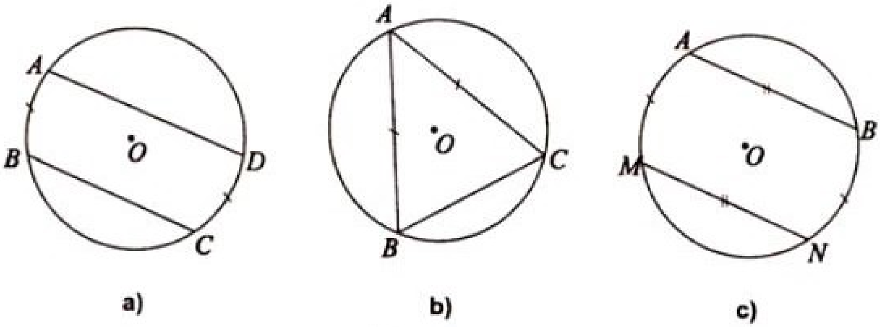
3. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 70^o$, $\hat{C} = 50^o$. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác đó tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC theo thứ tự tại D, E, F. Tính số đo các cung DE, EF và FD.

Dạng 2
SỰ LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Hai đường thẳng song song cắt (O) tại A, B, C, D (H.176a) thì

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{CD}.$$



Hình 176

2. Các trường hợp cơ bản:

Trên hình 176b: AB = AC ⇔ sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$.

Trên hình 176c: AB = MN ⇔ sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{MN}$.

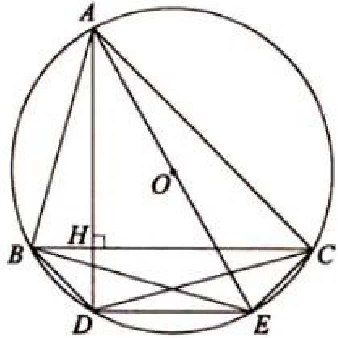
II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giả sử ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn (O) tại D. Kẻ đường kính AE của đường tròn (O). Hãy chứng minh :

a) BC song song với DE.

b) Tứ giác BCED là hình thang cân.

Giải (H.177)



Hình 177

a) Vì AE là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{ADE} = 90^{\circ}$, hay $AD \perp DE$.

Mặt khác, do $AD \perp BC \Rightarrow BC \,//\, DE$.

b) Từ kết quả câu a, có BC // DE

$\Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CE}$.

Vậy nên $\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{DE} \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CD}$

$\Rightarrow$ BE = CD (mối liên hệ giữa cung và dây).

Do đó tứ giác BDEC là hình thang cân.

Lưu ý. *Để chứng minh hai cung bằng nhau trong một đường tròn, ngoài cách dùng định nghĩa, ta thường sử dụng các định lí sau :*

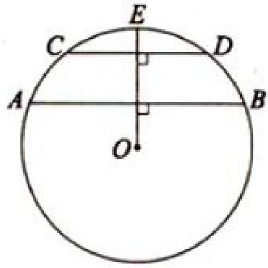
– Nếu hai dây bằng nhau thì hai cung căng hai dây đó bằng nhau.

– Hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

– Đường kính đi qua trung điểm của một dây (khác đường kính) thì chia cung căng dây ấy thành hai cung bằng nhau.

– Đường kính vuông góc với một dây cung thì chia cung căng dây ấy thành hai cung bằng nhau.

Ví dụ 2. Giả sử AB là một dây cung của đường tròn (O). Trên cung nhỏ AB lấy các điểm C và D sao cho $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$. Chứng minh rằng AB // CD.



Hình 178

Giải (H.178)

Vẽ bán kính OE của đường tròn (O) vuông góc với dây AB thì rõ ràng có $\overset{\frown}{EA} = \overset{\frown}{EB}$.

Từ giả thiết $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$, suy ra $\overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{ED}$ (vì chúng có số đo là hiệu của số đo hai cung bằng nhau).

Trên hình 178, ta có sđ $\overset{\frown}{EC}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ – sđ $\overset{\frown}{EA}$; sđ $\overset{\frown}{ED}$ = sđ $\overset{\frown}{BD}$ – sđ $\overset{\frown}{EB}$.

Do $\overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{ED}$ nên $OE \perp CD$ (bán kính đi qua điểm chính giữa một cung thì vuông góc với dây căng cung).

Từ $OE \perp AB$ và $OE \perp CD$, suy ra AB // CD (đpcm).

III. BÀI TẬP

4. Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AO. Các điểm C, D thuộc đường tròn (O) sao cho $B \in \overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{BD}$. Các dây cung AC và AD cắt đường tròn (O') theo thứ tự tại E và F.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng OE và OF.

b) So sánh số đo các cung AE và AF của đường tròn (O').

5. Cho đường tròn (O, R) hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau tại I (C thuộc cung nhỏ AB). Kẻ đường kính BE của đường tròn (O).

a) Chứng tỏ rằng AC = DE.

b) Chứng minh hệ thức $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4R^2$.

6. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa đường tròn đó lấy hai điểm C, D. Kẻ CH vuông góc với AB cắt đường tròn tại điểm thứ hai E. Kẻ AK vuông góc với CD, cắt đường tròn tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng :

a) Hai cung nhỏ CF và DB bằng nhau.

b) Hai cung nhỏ BF và DE bằng nhau.

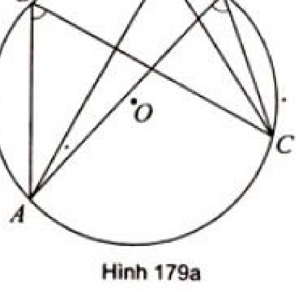
c) DE = BF.

Chủ đề 2

GÓC NỘI TIẾP VÀ GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VỚI MỘT DÂY CUNG

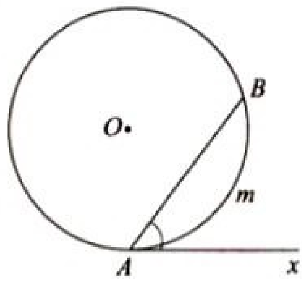
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Góc $\widehat{ABC}$ có đỉnh nằm trên đường tròn (O) và các cạnh cắt đường tròn đó được gọi là góc nội tiếp (H.179a). Trong trường hợp các góc nội tiếp có số đo không vượt quá 90° thì số đo của chúng bằng nửa số đo của góc ở tâm, cùng chắn một cung. Các góc nội tiếp đều có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn. Vì thế, nếu những góc này cùng chắn một cung (hoặc chắn những cung bằng nhau) thì chúng bằng nhau, nếu các góc nội tiếp này bằng nhau thì các cung bị chắn bằng nhau.



Hình 179a

- Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Từ điểm A ta kẻ tia tiếp tuyến Ax với đường tròn, khi đó $\widehat{BAx}$ được gọi là góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung AB (H.179b). Cũng như góc nội tiếp, số đo góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo cung bị chắn sđ $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AmB}$.



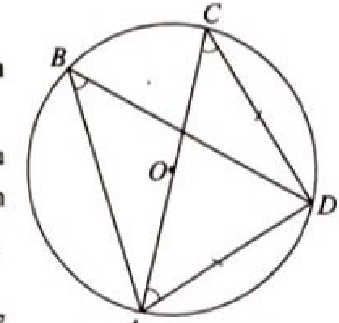
Hình 179b

Những khái niệm, định lí, hệ quả về góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung có thể giúp chúng ta so sánh số đo các góc, từ đó chứng minh được các đường thẳng song song với nhau, các tam giác bằng nhau, các tam giác đồng dạng với nhau ...

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
GÓC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI



Hình 179c

1. Chú ý phân biệt: Góc nằm trên đường tròn khác với góc nằm trong đường tròn.

2. Hai góc cùng chắn một cung thì bằng nhau và bằng nửa số đo cung bị chắn. Trên hình 179a: sđ $\widehat{ABC}$ = sđ $\widehat{ADC}$ = sđ $\widehat{AEC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$.

3. Các góc chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau. Trên hình 179c:

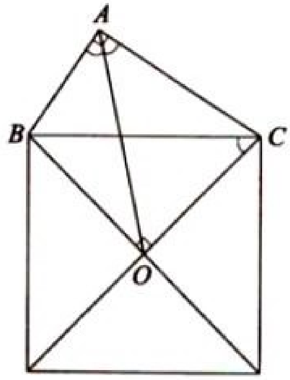
$$AD = CD \Leftrightarrow \text{sđ}\,\overset{\frown}{AD} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow \text{sđ}\,\widehat{ABD} = \text{sđ}\,\widehat{CAD}.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc vuông $\widehat{BAC}$.

Giải (H.180)

Vì O là tâm của hình vuông nên $\widehat{BOC} = 90^o$. Lại vì $\widehat{BAC} = 90^o$ suy ra bốn điểm A, B, O, C cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.



Hình 180

Đối với đường tròn này ta thấy

$\widehat{BAO} = \widehat{BCO}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BO}$).

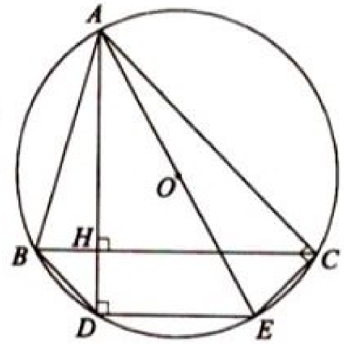
Mà $\widehat{BCO} = 45^o \Rightarrow \widehat{BAO} = 45^o$.

Do $\widehat{BAC} = 90^o$, nên $\widehat{CAO} = \widehat{BAC} - \widehat{BAO} = 45^o$. Vậy $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$, nghĩa là AO là tia phân giác của góc vuông $\widehat{BAC}$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Giải (H.181)

Kẻ đường kính AE của đường tròn (O). Ta thấy $\widehat{ACE} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Từ đó $\widehat{OAC} + \widehat{AEC} = 90^o$ (1)



Hình 181

Từ giả thiết bài ra, ta có :

$\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = 90^o$ (2)

Lại vì $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$ (đpcm).

Lưu ý : *Cũng có thể giải bài toán theo hướng sau.*

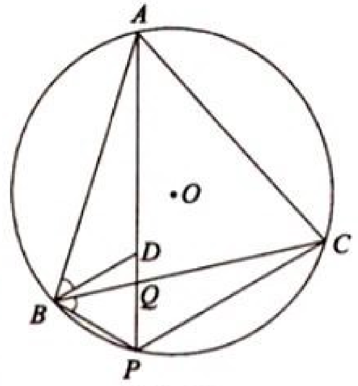
Gọi D là giao điểm của tia AH với đường tròn (O), chứng tỏ tứ giác BDEC là hình thang cân. Từ đó suy ra sđ $\overset{\frown}{BD}$ = *sđ* $\overset{\frown}{CE}$, *dẫn đến* $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$, *hay* $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung BC không chứa A ta lấy điểm P bất kì (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q.

a) Giả sử D là một điểm trên đoạn PA sao cho PD = PB. Chứng minh rằng tam giác PDB đều.

b) Chứng minh rằng PA = PB + PC.

c) Chứng minh hệ thức $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.



Hình 182

Giải (H.182)

a) Trước tiên ta nhận thấy rằng tam giác PBD cân tại P. Mặt khác

$\widehat{BPD} = \widehat{BPA} = \widehat{BCA} = 60^o$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O). Vậy nên tam giác PDB đều.

b) Ta đã có PB = PD, vậy để chứng minh PA = PB + PC ta sẽ chứng minh DA = PC.

Thật vậy, xét hai tam giác BPC và BDA, có

BA = BC (giả thiết),

BD = BP (do tam giác BPD đều).

Lại vì $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 60^o$, $\widehat{PBC} + \widehat{DBC} = 60^o$ nên $\widehat{ABD} = \widehat{PBC}$.

Từ đó $\Delta BPC = \Delta BDA$ (c.g.c), dẫn đến DA = PC. (Đpcm)

c) Xét hai tam giác PBQ và PAC ta thấy $\widehat{BPQ} = 60^o$, $\widehat{APC} = \widehat{ABC} = 60^o$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$) suy ra $\widehat{BPQ} = \widehat{APC}, \widehat{PBQ} = \widehat{PBC} = \widehat{PAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PC}$). Từ đó

$$\Delta PBQ \sim \Delta PAC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{PQ}{PB} = \frac{PC}{PA}, \text{ hay } PQ.PA = PB.PC.$$

Theo kết quả câu b, ta có PA = PB + PC nên PQ (PB + PC) = PB. PC.

Hệ thức này tương đương với $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$. (Đpcm)

Ghi chú :

– Tứ giác ABCD *có tính chất* AB.CD = BC.AD *(*) nói ở ví dụ trên được gọi là tứ giác điều hoà. Loại tứ giác đặc biệt này có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học phẳng khác.*

– Nếu viết hệ thức (*) dưới dạng $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$ *và nhớ lại tính chất đường phân giác trong tam giác ta có thể nêu thêm một tính chất của tứ giác điều hoà.*

– Tứ giác ABCD *là một tứ giác điều hoà khi và chỉ khi các đường phân giác của góc* $\widehat{BAD}$ *và* $\widehat{BCD}$ *cắt nhau tại một điểm trên đường chéo* BD.

– Tứ giác ABCD là tứ giác điều hoà khi và chỉ khi các đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ *và* $\widehat{ADC}$ *cắt nhau trên đường chéo* AC.

III. BÀI TẬP

7. Cho góc $\widehat{xAy}$ và M là một điểm bất kì nằm trong góc đó. Kẻ các đường vuông góc MP và MQ theo thứ tự lên các cạnh Ax, Ay (P thuộc Ax, Q thuộc Ay). Kẻ AK vuông góc với đoạn PQ. Chứng minh rằng $\widehat{PAK} = \widehat{MAQ}$.

8. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi A', B', C' là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B, C trên các cạnh BC, CA, AB ; H là trực tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng AA' là đường phân giác trong của góc B'A'C'.

b) Cho $\widehat{BAC} = 60^o$. Chứng tỏ rằng tam giác AOH cân.

9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Tia phân giác của góc BAC cắt BC ở D và cắt đường tròn (O) tại E.

a) Chứng minh AB.AC = AD. AE.

b) Chứng minh rằng $ED.EA = EB^2$.

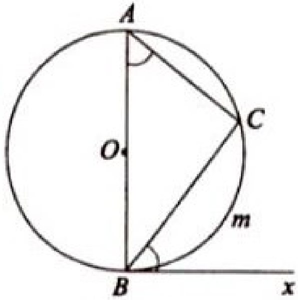
Dạng 2

GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Số đo góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung (tại một điểm trên đường tròn) bằng nửa số đo cung bị chắn.

2. Trên hình 183: sđ $\widehat{BAC}$ = sđ $\widehat{xBC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$.



Hình 183

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giả sử A và B là hai điểm phân biệt trên đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại điểm M. Từ A kẻ đường thẳng song song với MB, cắt đường tròn (O) tại C. MC cắt đường tròn (O) tại E. Các tia AE và MB cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $MK^2 = AK.EK$ và MK = KB.

Giải (H.184)

* Do MB // AC nên $\widehat{BMC} = \widehat{ACM}$ (1) ; lại có $\widehat{ACM} = \widehat{ACE} = \widehat{MAE}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AE}$) (2).

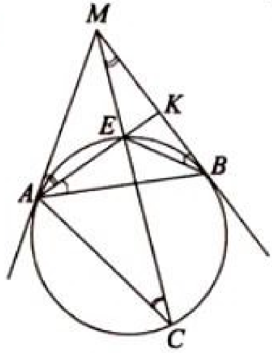
Từ (1) và (2) suy ra $\Delta KME \sim \Delta KAM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MK}{AK} = \frac{EK}{MK} \text{ hay } MK^2 = AK.EK \ (3).$$

* Ta thấy $\widehat{EAB} = \widehat{EBK}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$).

Từ đó $\Delta EBK \sim \Delta BAK$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BK}{AK} = \frac{EK}{BK} \text{ hay } BK^2 = AK.EK \ (4).$$



Hình 184

Từ (3) và (4) suy ra $MK^2 = KB^2$ nghĩa là, MK = KB (đpcm).

Ví dụ 2. Cho đường tròn (C) tâm O, AB là một dây cung của (C) không đi qua O và I là trung điểm của AB. Một đường thẳng thay đổi đi qua A cắt đường tròn (C_1) tâm O bán kính OI tại P và Q. Chứng minh rằng tích AP.AQ không đổi và đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ luôn đi qua một điểm cố định khác B.

Giải (H.185)

Ta có $\widehat{PQI} = \widehat{PIA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{PI}$), nên $\Delta API \sim \Delta AIQ$ (g.g).

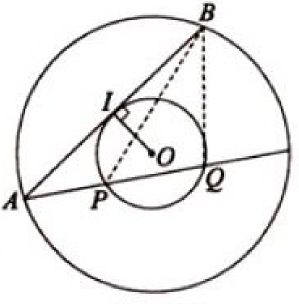
Suy ra $\dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AI}{AQ} \Rightarrow AP.AQ = AI^2$ (không đổi).

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ cắt AB tại D (D ≠ B).

Khi đó $\Delta ADP \sim \Delta AQB$, suy ra $\dfrac{AD}{AQ} = \dfrac{AP}{AB}$ hay

$AD.AB = AP.AQ = AI^2$ (không đổi).

Do đó điểm D là điểm cố định (đpcm).



Hình 185

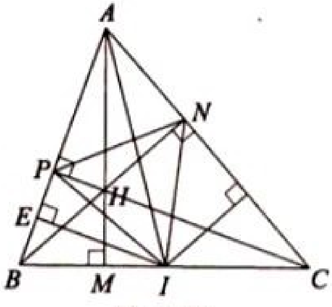
Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M, N, P theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC và I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng tam giác INP đều.

b) Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC. Chứng minh rằng các điểm I, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Giả sử IA là phân giác của $\widehat{NIP}$. Tìm số đo góc $\widehat{BCP}$.

Giải (H.186)



Hình 186

a) Từ giả thiết bài ra, ta có : $IN = IP = \frac{1}{2}BC$,

nên tam giác INP cân tại I.

Lại vì B, P, N, C nằm trên đường tròn tâm I, đường kính BC nên theo mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung, ta thấy $\widehat{PIN} = 2\widehat{PBN} = 60^{o}$.

Vậy tam giác INP đều.

b) Rõ ràng bốn điểm I, M, E và K cùng nằm trên đường tròn đường kính AI.

c) Từ điều kiện của bài ra ta thấy AI là tia phân giác của $\widehat{BAC} = 60^{o}$, mà I là trung điểm của BC nên tam giác ABC đều. Từ đó suy ra $\widehat{BCP} = 30^{o}$.

III. BÀI TẬP

10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm D trên cạnh AC (AC > 2DC) làm tâm vẽ đường tròn tiếp xúc với BC tại E. Từ B kẻ tiếp tuyến thứ hai BF cắt AD tại I và cắt AE tại K. Trung tuyến AM của tam giác ABC cắt BF tại N.

a) Chứng minh năm điểm A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh hệ thức $\frac{IF}{IK} = \frac{BF}{BK}$.

c) Cho $\widehat{AEC} = 130^{o}$, tính số đo góc $\widehat{ANB}$.

11. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm A. Một tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm B cắt đường tròn (O') tại C và D (C nằm giữa B và D). Các tia CA, DA cắt đường tròn (O) theo thứ tự tại E và F.

a) Chứng minh rằng EF // CD.

b) Gọi M là điểm chính giữa của cung CD (M và A khác phía đối với CD). Tính số đo góc $\widehat{BAM}$.

12. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn (D nằm giữa A và E). Tia phân giác của góc $\widehat{DBE}$ cắt DE tại I. Chứng minh rằng :

a) $\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}$.

b) AI = AB = AC.

c) CI là tia phân giác của góc DCE.

13. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AKD sao cho BD song song với AC. Nối BK cắt AC ở I.

a) Nêu cách vẽ cát tuyến AKD sao cho BD // AC.

b) Chứng minh hệ thức $IC^2 = IK.IB$.

c) Cho góc $\widehat{BAC} = 60^o$. Chứng tỏ rằng cát tuyến AKD đi qua điểm O.

14. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Qua A kẻ hai đường thẳng d và d'. Đường thẳng d' cắt (O) tại M và cắt (O') tại N. Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại C và cắt đường tròn (O') tại D sao cho AB là tia phân giác của góc $\widehat{MAD}$. Chứng minh rằng CD = MN.

Chủ đề 3

GÓC CÓ ĐỈNH Ở TRONG HOẶC NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

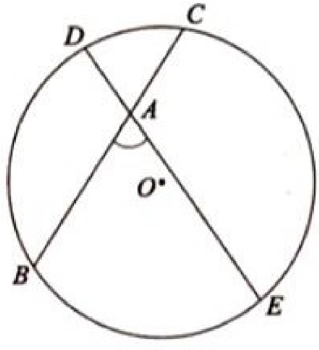
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Với đỉnh A nằm trong đường tròn (O) ta có góc với đỉnh ở trong đường tròn (H.187).

Số đo của góc này bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc và các tia đối của hai cạnh đó.

$$sđ\,\widehat{BAE} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{BE} + sđ\,\overset{\frown}{CD}}{2};$$

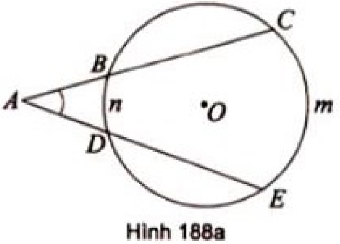
$$sđ\,\widehat{BAD} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{BD} + sđ\,\overset{\frown}{CE}}{2}.$$



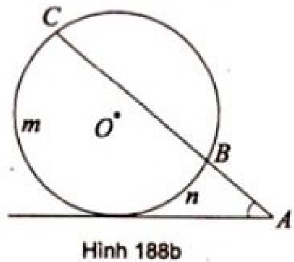
Hình 187

Với đỉnh A nằm ở ngoài đường tròn (O) ta lưu ý đến các loại góc có hai cạnh cắt đường tròn hoặc tiếp xúc với đường tròn (H.188a, H.188b, H.188c).

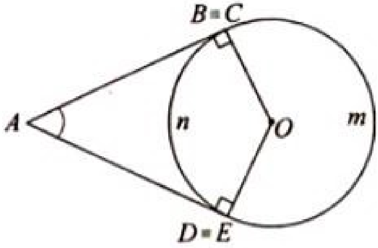
Các góc này đều có số đo bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.



Hình 188a



Hình 188b



Hình 188c

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

ÁP DỤNG GÓC CÓ ĐỈNH Ở TRONG ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cũng như phần góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, các định lí và hệ quả của góc có đỉnh nằm trong hoặc nằm ngoài đường tròn giúp chúng ta tìm mối quan hệ giữa các số đo các góc, chứng minh các đường song song, các tam giác bằng nhau, các tam giác đồng dạng với nhau, hai đường thẳng vuông góc với nhau.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trên đường tròn (O) cho các điểm A, B, C, D theo thứ tự đó. Gọi A_1, B_1, C_1 và D_1 lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CD và DA. Chứng minh các đường thẳng A_1C_1 và B_1D_1 vuông góc với nhau.

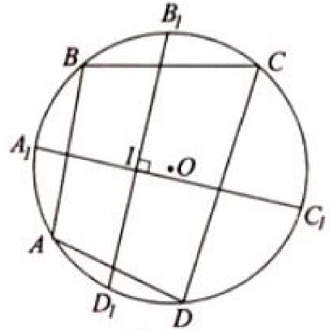
Giải (H.189)

Gọi I là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ theo thứ tự là số đo góc của các cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DA}$.

Khi đó $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.

Xét góc $\widehat{A_1IB_1}$ là góc có đỉnh nằm trong đường tròn (O). Ta có

$$\widehat{A_1IB_1} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \overset{\frown}{A_1BB_1} + \text{sđ } \overset{\frown}{C_1DD_1})$$



Hình 189

$$= \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{A_1B} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BB_1} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{C_1D} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{DD_1})$$

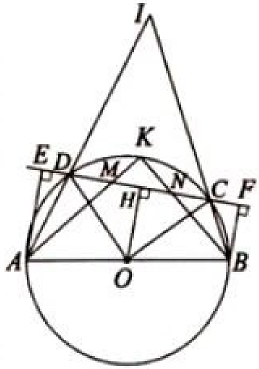
$$= \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 90^o.$$

Nghĩa là $A_1C_1 \perp B_1D_1$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho bốn điểm A, D, C, B theo thứ tự đó nằm trên đường tròn tâm O đường kính AB = 2R (C và D nằm về cùng một phía so với AB). Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên đường thẳng CD. Tia AD cắt tia BC tại I. Biết rằng $AE + BF = R\sqrt{3}$.

a) Tính số đo góc AIB.

b) Trên cung nhỏ CD lấy điểm K. Gọi giao điểm của KA, KB với DC lần lượt là M và N. Tìm giá trị lớn nhất của MN khi K di động trên cung nhỏ CD.



Hình 190

Giải (H.190)

a) Kẻ OH $\perp$ CD ($H \in CD$), ta thấy OH là đường trung bình của hình thang ABFE, suy ra $OH = \frac{1}{2}(AE + BF) = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó tam giác OCD đều, suy ra sđ $\overset{\frown}{COD}$ = sđ $\overset{\frown}{CKD} = 60^o$.

Ta thấy góc $\widehat{AIB}$ có đỉnh nằm ngoài đường tròn (O) nên

$$\text{sđ}\,\widehat{AIB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AmB} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{CKD}) = \frac{1}{2}(180^o - 60^o) = 60^o.$$

b) Ta thấy $\Delta AEM \sim \Delta NFB$ suy ra EM.NF = AE.BF (không đổi). Do đó MN lớn nhất khi và chỉ khi EM + NF nhỏ nhất. Theo trên, EM.NF không đổi nên EM + NF nhỏ nhất khi $EM = FN = \sqrt{AE.BF}$.

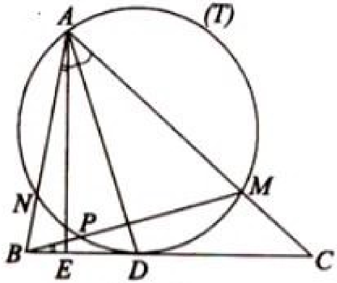
Vậy giá trị lớn nhất của MN bằng $EF - 2\sqrt{AE.BF}$.

Ví dụ 3. Trong tam giác ABC, đường phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại D. Giả sử (T) là đường tròn tiếp xúc với BC tại D và đi qua điểm A. Gọi M là giao điểm thứ hai của (T) và AC, P là giao điểm thứ hai của (T) và BM, E là giao điểm của AP và BC.

a) Chứng minh rằng $\widehat{EAB} = \widehat{MBC}$.

b) Chứng minh hệ thức $BE^2 = EP.EA$.

Giải



Hình 191

a) Gọi N là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn (T) (H.191).

Do AD là phân giác của góc BAC nên

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{DM} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{DN}.$$

Ta có

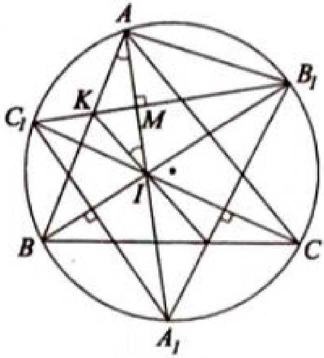
$$\widehat{MBC} = \widehat{MBD} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{DM} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{DP})$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{DN} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{DP}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{NP} = \widehat{NAP} = \widehat{EAB} \text{ (đpcm).}$$

b) Từ kết quả câu a) ta thấy $\widehat{EBP} = \widehat{EAB}$. Từ đó $\Delta EBP \backsim \Delta EAB$ (g.g) suy ra

$$\frac{BE}{EP} = \frac{EA}{BE}, \text{ hay } BE^2 = EP.\,EA \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 4. Trên đường tròn (O) ta lấy các điểm A, C_1, B, A_1, C, B_1 theo thứ tự đó.



Hình 192a

a) Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác trong của tam giác ABC thì chúng là các đường cao của $\Delta A_1B_1C_1$.

b) Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC thì chúng là các đường phân giác trong của $\Delta A_1B_1C_1$.

c) Giả sử (T_1) và (T_2) là hai tam giác nội tiếp đường tròn (O), đồng thời các đỉnh của tam giác (T_2) là các điểm chính giữa của các cung của đường tròn bị chia bởi các đỉnh của tam giác (T_1). Chứng minh rằng trong hình lục giác là giao của các tam giác (T_1) và (T_2) các đường chéo nối các đỉnh đối nhau song song với các cạnh của tam giác (T_1) và đồng quy tại một điểm.

Giải

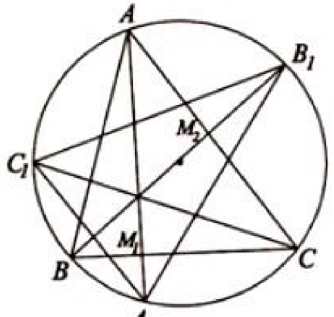
a) (H.192a) Ta chứng minh $AA_1 \perp BB_1$. Thật vậy, gọi M là giao điểm của AA_1 và B_1C_1, khi đó :

$$\widehat{AMB_1} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB_1} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{A_1BC_1}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB_1} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{A_1B} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC_1})$$

$$= \widehat{ABB_1} + \widehat{A_1AB} + \widehat{BCC_1} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA}) = 90^o \text{ (đpcm).}$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $BB_1 \perp A_1C_1$; $CC_1 \perp A_1B_1$.

b) (H.192b) Gọi M_1 là giao điểm của BB_1 và AC. Ta có



Hình 192b

$$\widehat{BM_1A} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC_1B} + \overset{\frown}{A_1C})$$

$$= \widehat{BCA} + \widehat{A_1C_1C} \quad (1).$$

Lại có

$$\widehat{BM_2A} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC_1B} + \overset{\frown}{B_1C})$$

$$= \widehat{BCA} + \widehat{B_1C_1C} \quad (2).$$

Bởi vì $\widehat{BM_1A} = \widehat{BM_2A} = 90^o$, nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1C_1C} = \widehat{B_1C_1C}$. Tức là CC_1 chứa đường phân giác của góc $\widehat{A_1C_1B_1}$.

Chứng minh tương tự, ta cũng thu được A A_1 chứa đường phân giác của góc $B_1A_1C_1$, BB_1 chứa đường phân giác của góc $A_1B_1C_1$.

c) Kí hiệu các đỉnh của tam giác (T_1) là A, B và C; A_1, B_1 và C_1 là điểm chính giữa các cung BC, CA và AB tương ứng. Khi đó (T_2) là tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường AA_1, BB_1, CC_1 chứa các đường phân giác của tam giác (T_1) nên chúng đồng quy tại điểm I. Giả sử K là giao điểm của AB và B_1C_1. Ta chỉ cần chứng minh rằng IK // AC.

Thật vậy, ta thấy tam giác AB_1I cân tại B_1 nên tam giác AKI cân tại K. Từ đó $\widehat{KIA} = \widehat{KAI} = \widehat{IAC}$, dẫn đến IK // AC (đpcm).

III. BÀI TẬP

15. Dọc theo cạnh của một tam giác đều ta lăn một đường tròn có bán kính bằng đường cao của tam giác. Chứng minh rằng số đo của cung định trên đường tròn bởi các cạnh của tam giác bằng 60^o.

16. Giả sử A, B và C là ba điểm thuộc đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn cắt tia BC tại D. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn tại M, tia phân giác của $\widehat{ADC}$ cắt AM tại I. Chứng minh rằng AM $\perp$ DI.

17. Trên đường tròn tâm O bán kính R ta kẻ ba dây cung liên tiếp bằng nhau AB, BC và CD (mỗi dây có độ dài nhỏ hơn R). Gọi I là giao điểm của AB và CD. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và D cắt nhau tại K.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BIC} = \widehat{BKD}$.

b) Chứng tỏ rằng BC là tia phân giác của góc KBD.

18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường phân giác trong của tam giác kẻ từ A, B, C cắt nhau tại I và cắt đường tròn (O) theo thứ tự tại D, E và F.

a) Chứng minh rằng $CI \perp ED$.

b) Gọi M là giao điểm của AC và DE. Chứng minh rằng IM // BC.

c) Gọi K là điểm đối xứng với I qua D. Chứng tỏ rằng K là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC.

19. Cho tam giác cân ABC (AB = AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm thuộc cung BC không chứa A, E là giao điểm của BC và AD.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AEB} = \widehat{ABD}$.

b) Chứng minh hệ thức $AC^2 = AD.AE$.

c) Các kết quả ở câu a và câu b có thay đổi không nếu điểm D thuộc cung BC chứa A ?

20. Cho đường tròn tâm O và dây AB. Trên hai cung AB ta lần lượt lấy các điểm M và N. Hai tia AM và NB cắt nhau tại C, hai tia AN và MB cắt nhau tại D. Chứng minh rằng nếu $\widehat{ACN} = \widehat{ADM}$, thì $AB \perp CD$.

Chủ đề 4

CUNG CHỨA GÓC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

• Quỹ tích những điểm nhìn đoạn AB cố định dưới một góc không đổi α ($0 < \alpha < 180^o$) là hai cung chứa góc α vẽ trên đoạn AB (quỹ tích cơ bản).

• Trường hợp đặc biệt : Quỹ tích những điểm nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

ÁP DỤNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN VỀ QUỸ TÍCH VÀ DỰNG HÌNH

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Khái niệm cung chứa góc giúp chúng ta giải được nhiều bài toán quỹ tích, dựng hình, chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn.

II. VÍ DỤ

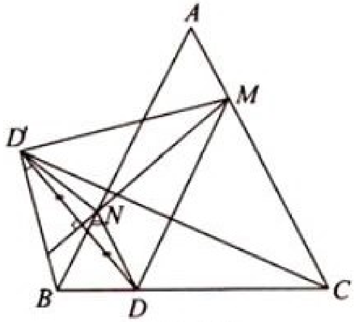
Ví dụ 1. Cho tam giác cân ABC (AB = AC) và D là một điểm trên cạnh BC. Kẻ DM song song với AB (M thuộc AC), DN song song với AC (N thuộc AB). Gọi D' là điểm đối xứng của D qua MN. Tìm quỹ tích điểm D' khi điểm D di động trên cạnh BC.

Giải

Phần thuận (H.193). Từ giả thiết đề ra ta thấy NB = ND = ND', do đó ba điểm B, D, D' nằm trên đường tròn tâm N. Từ đó

$$\widehat{BD'D} = \frac{1}{2}\widehat{DMC} \quad (2)$$

Lại có $\widehat{BND} = \widehat{DMC} = \widehat{BAC}$, nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BD'C} = \widehat{BAC}$ (không đổi). Vì BC cố định, D' nhìn BC dưới một góc $\widehat{BAC}$ không đổi, D' khác phía với D (tức là cùng phía với A so với MN) nên D' nằm trên cung chứa góc BAC vẽ trên đoạn BC (một phần của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).



Hình 193

Phần đảo. Bạn đọc tự giải.

Kết luận. Quỹ tích của điểm D' là cung chứa góc BAC vẽ trên đoạn BC. Đó chính là cung $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lưu ý : *Quy trình để giải một bài toán quỹ tích như sau :*

Để tìm quỹ tích các điểm M thoả mãn một tính chất (T) nào đó ta tiến hành các bước

** Phần thuận: Chỉ ra mọi điểm có tính chất (T) đều thuộc hình (H).*

** Phần đảo : Chứng tỏ rằng mọi điểm thuộc hình (H) đều có tính chất (T).*

** Kết luận : Quỹ tích các điểm M có tính chất (T) là hình (H).*

Chú ý rằng trong một số bài toán, sau phần thuận, trước phần đảo ta có thể thêm phần giới hạn quỹ tích.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, A khác C). Tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$ cắt đường tròn (O) tại điểm D khác điểm C. Lấy điểm I thuộc đoạn CD sao cho DI = DB. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm K khác điểm B.

a) Chứng minh rằng tam giác KAC cân.

b) Chứng minh đường thẳng AI luôn đi qua một điểm J cố định.

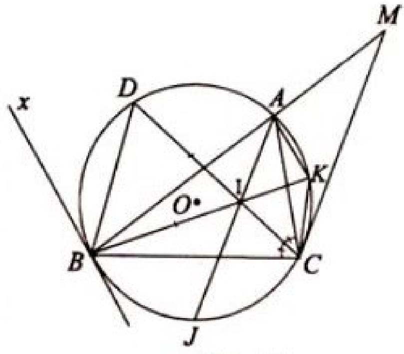
c) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho AM = AC. Tìm quỹ tích các điểm M khi A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O).

Giải (H.194)

a) Ta có $\widehat{DBK} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{DA} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AK})$

$$\text{sđ}\,\widehat{DIB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{KC})$$

Vì sđ $\overset{\frown}{BD}$ = sđ $\overset{\frown}{DA}$ và ΔDBI cân tại D nên sđ $\overset{\frown}{KC}$ = sđ $\overset{\frown}{AK}$. Suy ra AK = CK hay ΔKAC cân tại K (đpcm).



Hình 194

b) Từ kết quả câu a, ta thấy I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên đường thẳng AI luôn đi qua điểm J (điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A). Rõ ràng J là điểm cố định.

c) *Phần thuận.* Do ΔAMC cân tại A, nên $\widehat{BMC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$. Giả sử số đo $\widehat{BAC}$ là 2α (không đổi) thì khi A di động trên cung lớn BC thì M thuộc cung chứa góc α dựng trên đoạn BC về phía điểm O.

Phần đảo. Tiếp tuyến Bx với đường tròn (O) cắt cung chứa góc α vẽ trên đoạn BC tại điểm X. Lấy điểm M bất kì trên $\overset{\frown}{Cx}$ (một phần của cung chứa góc α và vẽ trên đoạn BC (M # X và M # C). Nếu MB cắt đường tròn (O) tại A thì rõ ràng A thuộc cung lớn BC của đường tròn (O).

Vì $\widehat{BAC} = 2\alpha$, $\widehat{AMC} = \alpha$ suy ra Δ AMC cân tại A hay AC = AM.

Kết luận. Quỹ tích các điểm M là cung $\overset{\frown}{Cx}$, một phần của cung chứa góc α vẽ trên đoạn BC về phía O trừ hai điểm C và X.

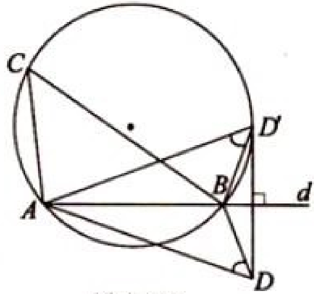
Ví dụ 3. Cho trước điểm A trên đường thẳng d và hai điểm C, D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau, bờ d. Hãy dựng một điểm B trên d sao cho $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Giải (H.195)

* *Phân tích :* Giả sử dựng được điểm B trên d sao cho $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua d.

Khi đó $\widehat{ADB} = \widehat{AD'B}$, vậy $\widehat{ACB} = \widehat{AD'B}$.

Suy ra C và D' cùng nằm trên một cung chứa góc dựng trên đoạn AB. Từ đó ta thấy B là giao điểm của d với đường tròn ngoại tiếp ΔACD'.



Hình 195

* *Cách dựng.* Dựng điểm D' là điểm đối xứng của D qua đường thẳng d.

Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD'.

Dựng giao điểm B của đường thẳng d với đường tròn (ACD').

* *Chứng minh.* Rõ ràng với cách dựng trên, ta có $\widehat{ACB} = \widehat{AD'B} = \widehat{ADB}$.

* *Biện luận.* Nếu ba điểm A, C, D không thẳng hàng, hoặc nếu ba điểm này thẳng hàng nhưng CD không vuông góc với d thì bài toán có một nghiệm hình.

\+ Nếu ba điểm A, C, D thẳng hàng và d là đường trung trực của đoạn CD thì bài toán có vô số nghiệm hình.

\+ Nếu ba điểm A, C, D thẳng hàng, d $\perp$ CD nhưng d không phải là đường trung trực của CD thì bài toán không có nghiệm hình.

Lưu ý : *Khái niệm cung chứa góc được áp dụng để chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn. Ví dụ để chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn, ta có thể chứng minh hai điểm A và B cùng nhìn CD dưới hai góc bằng nhau. Nói cách khác, nếu một tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì bốn đỉnh của tứ giác đó cùng thuộc một đường tròn.*

Ví dụ 4. Giả sử AD là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC (D thuộc đoạn BC). Trên AD lấy hai điểm M và N sao cho $\widehat{ABN} = \widehat{CBM}$. BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM tại điểm thứ hai E và CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.

c) Chứng minh $\widehat{BCF} = \widehat{ACM}$, từ đó suy ra $\widehat{ACN} = \widehat{BCM}$.

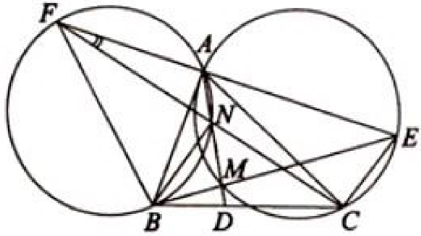
Giải (H.196)

a) Ta có

$\widehat{BFC} = \widehat{BAN}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BN}$);

$\widehat{BEC} = \widehat{CAN}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CM}$), mà $\widehat{BAN} = \widehat{CAN}$, suy ra $\widehat{BFC} = \widehat{BEC}$.

Từ đó bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).



Hình 196

b) Từ kết quả trên, ta có $\widehat{CFE} = \widehat{NFA}$. Do đó hai tia FA và FE trùng nhau nghĩa là ba điểm A, E, F thẳng hàng (đpcm).

c) Vì $\widehat{BCF} = \widehat{BEF}$ và do $\widehat{ACM} = \widehat{BEF}$ nên $\widehat{BEF} = \widehat{ACM}$. Từ đó suy ra $\widehat{ACM} = \widehat{BCF}$, dẫn đến $\widehat{ACN} = \widehat{BCM}$ (đpcm).

III. BÀI TẬP

21. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC = 2R. A là điểm di động trên nửa đường tròn đó. Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của các dây AC và AB. Tìm quỹ tích các giao điểm M của BD và CE.

22. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C di động trên nửa đường tròn. Vẽ tam giác đều ACD với D thuộc nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B. Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn CD.

23. Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây cung $AB = R\sqrt{3}$. C là điểm di động trên cung nhỏ AB. Vẽ đường tròn tâm C tiếp xúc với AB. Từ A và B kẻ các tiếp tuyến (khác AB) với đường tròn tâm C, chúng cắt nhau tại M. Tìm quỹ tích các điểm M.

24. Dựng tam giác ABC, biết rằng :

a) BC = 3cm, $\widehat{BAC} = 50^\circ$, độ dài đường trung tuyến AM bằng 3cm.

b) $\widehat{BAC} = 50^\circ$, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng 2,5cm, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 1cm.

25. Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự cùng nằm trên đường tròn (O) sao cho AC vuông góc BD tại H (H khác O). Gọi M và N lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ H xuống các đường thẳng AB và BC, P và Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng MH và NH với các đường thẳng CD và DA.

a) Chứng minh rằng PQ // AC.

b) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

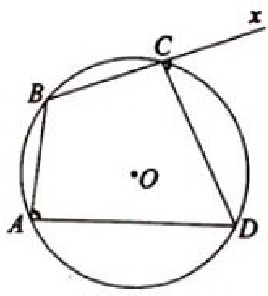
26. Cho tam giác ABC, gọi D và E theo thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn tâm O nội tiếp tam giác với các cạnh AB và AC, H là giao điểm của đường thẳng BO và đường thẳng DE.

a) Chứng minh rằng bốn điểm O, E, H, C cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng tỏ rằng đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$, đường trung bình của tam giác ABC song song với cạnh AB và đường thẳng DE đồng quy.

Chủ đề 5
TỨ GIÁC NỘI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ



Hình 197

• Ta đã biết một tứ giác nội tiếp có bốn đỉnh cùng nằm trên một đường tròn. Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180°. Đảo lại, nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.

• Từ những kiến thức cơ bản trên ta có thể rút ra các hệ quả sau :

a) Góc ngoài tại một đỉnh của tứ giác nội tiếp bằng góc trong tại đỉnh đối diện. Đảo lại, nếu góc ngoài ở một đỉnh của tứ giác bằng góc trong ở đỉnh đối diện thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.

$$\text{ABCD nội tiếp} \Leftrightarrow \widehat{BAD} = \widehat{DCx} \text{ (H.197).}$$

b) Hình thang nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi nó là hình thang cân.

• Cách nhận biết một tứ giác nội tiếp.

1) Dựa vào định nghĩa tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh tứ giác đó có hai góc đối bù nhau (hoặc tứ giác đó có một góc bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện).

3) Dựa vào khái niệm cung chứa góc : Tứ giác có hai đỉnh liên tiếp nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1.
CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Cho tứ giác ABCD. Nếu $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 90^o$ thì tứ giác ABCD nội tiếp.

2. Dựa và các hệ quả, cách nhận biết để giải quyết bài toán.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm là H. Giả sử M là một điểm trên cung BC không chứa A (M khác B, M khác C). Gọi N, P theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC.

a) Chứng minh tứ giác AHCP nội tiếp.

b) Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

c) Tìm vị trí của M để độ dài đoạn NP lớn nhất.

Giải (H.198)

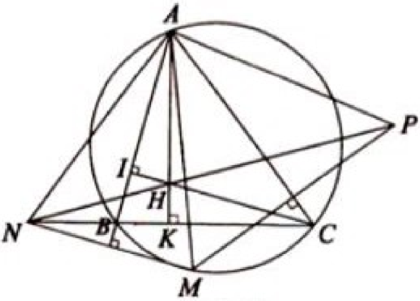
a) Gọi I là giao điểm của CH và AB, K là giao điểm của AH và BC.

Ta thấy $\widehat{IBK} + \widehat{AHC} = 180^o$. (1)

Mặt khác $\widehat{IBK} = \widehat{APC}$. (2)

Từ (1) và (2) ta thấy tứ giác AHCP nội tiếp (đpcm).

b) Do tứ giác AHCP nội tiếp nên $\widehat{AHP} = \widehat{ACP}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AP}$).



Hình 198

Có $\widehat{ACP} = \widehat{ACM}$ (tính chất đối xứng).

Suy ra $\widehat{AHP} = \widehat{ACM}$. (3)

Tương tự, ta chứng minh được tứ giác AHBN nội tiếp, nên $\widehat{AHN} = \widehat{ABN}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AP}$).

Có $\widehat{ABN} = \widehat{ABM}$ (tính chất đối xứng).

Suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{ABM}$. (4)

Dễ thấy tứ giác ABMC nội tiếp, nên $\widehat{ACM} + \widehat{ABM} = 180^o$. (5)

Thay (3), (4) vào (5), ta được $\widehat{AHP} + \widehat{AHN} = 180^o$.

Vậy ba điểm N, H, P thẳng hàng. (Đpcm)

c) Từ $\widehat{MAN} = 2\widehat{BAM}, \widehat{MAP} = 2\widehat{MAC}$, suy ra

$$\widehat{NAP} = 2(\widehat{BAM} + \widehat{MAC}) = 2\widehat{BAC} \text{ (không đổi).}$$

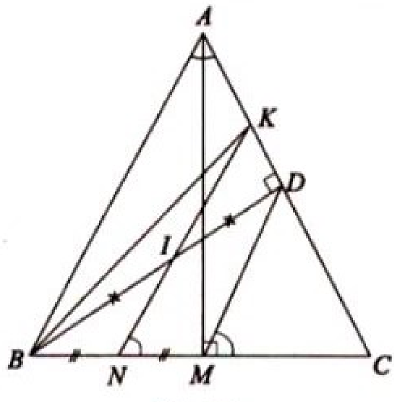
Ta có NP = 2AP.sin $\widehat{BAC}$ = 2AM.sin$\widehat{BAC}$. Do đó NP lớn nhất khi và chỉ khi AM lớn nhất, lúc đó AM là đường kính của đường tròn (O).

Vậy NP lớn nhất khi và chỉ khi M là điểm đối xứng của A qua O.

Ví dụ 2. Cho tam giác cân ABC (AB = AC, $\widehat{A} < 90^o$), đường cao BD. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của các đoạn BC, BM và BD. Tia NI cắt cạnh AC tại K. Chứng minh rằng :

a) Các tứ giác ABMD, ABNK nội tiếp.

b) $BC^2 = \frac{4}{3}CA.CK$.



Hình 199

Giải (H.199)

a) Do tam giác ABC cân tại A nên $AM \perp BM$. Lại có $BD \perp AD$, do đó tứ giác ABMD nội tiếp đường tròn đường kính AB.

Mặt khác NI là đường trung bình của tam giác BMD nên NI // MD. Do đó $\widehat{KNC} = \widehat{DMC}$. Hơn nữa $\widehat{DMC} = \widehat{KAB}$ (tính chất tứ giác nội tiếp ABMD). Suy ra $\widehat{KNC} = \widehat{KAB}$ (1).

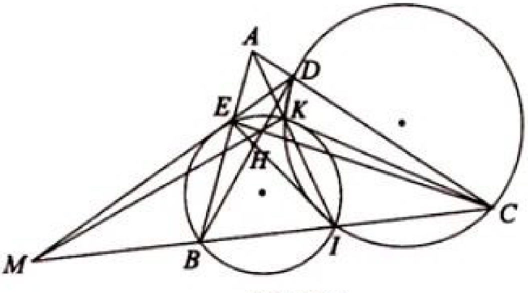
Từ đây ta thấy tứ giác ABNK nội tiếp (đpcm).

b) Ta có $\widehat{NKC} = \widehat{ABC}$ (tứ giác ABNK nội tiếp).

Kết hợp với (1) ta có $\Delta ABC \backsim \Delta NKC \Rightarrow \dfrac{BC}{CK} = \dfrac{CA}{NC}$.

Mặt khác, dễ thấy $NC = \dfrac{3}{4}BC$, do đó $BC^2 = \dfrac{4}{3}BC.NC = \dfrac{4}{3}CA.CK$ (đpcm).

Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc cạnh AC, E thuộc cạnh AB). Gọi I là trung điểm của BC. Đường tròn ngoại tiếp ΔBEI và đường tròn ngoại tiếp ΔCDI cắt nhau tại K (K khác I).



Hình 200

a) Chứng minh rằng $\widehat{BDK} = \widehat{CEK}$.

b) Đường thẳng DE cắt BC tại M. Chứng minh ba điểm M, H, K thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng tứ giác BKMD nội tiếp.

Giải (H.200)

a) Vì $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{EKD} + \widehat{EKI} + \widehat{IKD} = 540^o$, mà $\widehat{B} + \widehat{EKI} = \widehat{C} + \widehat{IKD} = 180^o$,

nên $\widehat{A} + \widehat{EKD} = 180^o$. Suy ra tứ giác AEKD nội tiếp.

Mặt khác, tứ giác AEHD nội tiếp. Vậy năm điểm A, E, H, K, D cùng nằm trên đường tròn đường kính AH, dẫn đến $\widehat{BDK} = \widehat{CEK}$ (đpcm).

b) Ta có $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, $\widehat{AKE} = \widehat{ADE}$, suy ra $\widehat{AKE} = \widehat{ABC}$.

Từ đó $\widehat{AKE} + \widehat{EKI} = 180^o$, nghĩa là ba điểm A, K, I thẳng hàng.

Lại có $\widehat{IKC} = \widehat{IDC} = \widehat{ICD}$, $\widehat{IKC} = \widehat{KAC} + \widehat{ACK}$, $\widehat{ICD} = \widehat{ICK} + \widehat{KCD}$.

Vậy tứ giác MEKC nội tiếp.

Tứ giác MEKC nội tiếp nên $\widehat{MEC} = \widehat{MKC}$.

Vì $\widehat{IKC} = \widehat{AED} = \widehat{MEB}$; $\widehat{MEC} = \widehat{MEB} + 90^o$; $\widehat{MKC} = \widehat{MKI} + \widehat{IKC}$,

$\Rightarrow \widehat{MKI} = 90^o$.

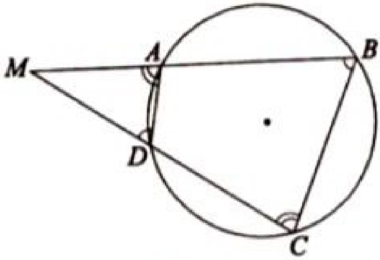
Do A, E, H, K, D nằm trên đường tròn đường kính AH, nên $\widehat{HKA} = 90^o$. Vậy K, H, M thẳng hàng.

c) Do tứ giác DEHK nội tiếp, nên $\widehat{HEK} = \widehat{HDK}$. (1)

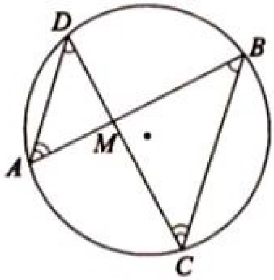
Tứ giác MEKC nội tiếp nên $\widehat{KEC} = \widehat{KMC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KMB} = \widehat{HDK}$, hay tứ giác MBKD nội tiếp (đpcm).

***Lưu ý :** Sử dụng kiến thức của tam giác đồng dạng ta thấy : Nếu hai cát tuyến AB và CD của một đường tròn cắt nhau tại M thì MA.MB = MC.MD (xem H.201a, H.201b).*



Hình 201a



Hình 201b

Đảo lại, ta cũng chứng minh được : Nếu hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm M sao cho MA.MB = MC.MD thì bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Đây cũng là một cách nhận biết một tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 4. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$). Gọi E là trung điểm của AD. Kẻ AH vuông góc với BE, DI vuông góc với CE, K là giao điểm của AH và DI.

a) Chứng minh rằng tứ giác BHIC nội tiếp.

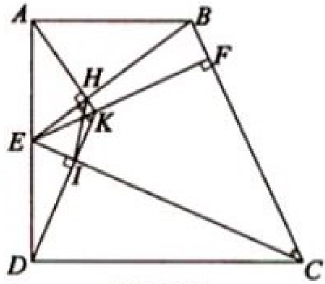
b) Chứng minh rằng EK $\perp$ BC.

Giải (H.202)

a) Sử dụng hệ thức lượng cho các tam giác vuông AEB và BEC, ta thấy

$EA^2 = EH.EB$. (1)

$ED^2 = EI.EC$. (2)



Hình 202

Lại vì EA = ED (gt), nên từ (1) và (2) ta suy ra EH.EB = EI.EC.

Dẫn đến tứ giác BHIC nội tiếp được một đường tròn (đpcm).

b) Giả sử F là giao điểm của EK và BC.

Từ câu a) tứ giác BHIC nội tiếp nên $\widehat{EHI} = \widehat{BCI}$. (1)

Mặt khác, do tứ giác EHKI nội tiếp ($\widehat{EHK} = \widehat{EIK} = 90^o$) nên $\widehat{EHI} = \widehat{EKI}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BCI} = \widehat{EKI}$, hay tứ giác FKIC nội tiếp, dẫn tới $\widehat{KFC} + \widehat{KIC} = 180^o$.

Theo giả thiết $\widehat{KIC} = 90^o$, suy ra $\widehat{KFC} = 90^o$.

Nghĩa làEK $\perp$ BC (đpcm).

III. BÀI TẬP

27. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ; AD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M là điểm đối xứng của B qua O, I là giao điểm của BM và DE, K là giao điểm của AC và HM.

a) Chứng minh rằng các tứ giác AEDC và DIMC là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh OK $\perp$ AC.

c) Cho số đo góc AOK bằng 60^o. Chứng minh tam giác HBO cân.

28. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên hai cạnh AD và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\widehat{MBN} = 45^o$. BM và BN cắt AC theo thứ tự tại E và F.

a) Chứng minh các tứ giác BENC và BFMA nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng tỏ MEFN cũng là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi H là giao điểm của MF và NE, I là giao điểm BH và MN. Tính độ dài đoạn BI theo a.

29. Giả sử trong tứ giác lồi ABCD có điểm M sao cho tứ giác ABMD là hình bình hành và $\widehat{CBM} = \widehat{CDM}$. Dựng hình bình hành BMCN.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABNC nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$.

Dạng 2.

CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Dựa vào cách chứng minh tam giác, tứ giác nội tiếp.

2. Dựa vào kết quả: Nếu IM.IH = IN. IK thì bốn điểm H, M, N, K cùng nằm trên đường tròn.

II. VÍ DỤ

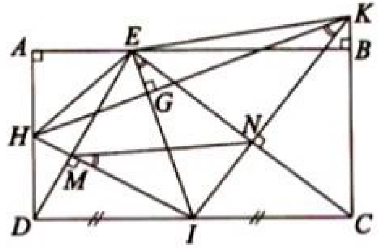
Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật ABCD, I là trung điểm của CD, E thuộc cạnh AB. Qua I kẻ IM vuông góc với DE, cắt AD tại H. Qua I kẻ IN vuông góc với CE, cắt BC tại K. Gọi G là giao điểm của EI và HK. Chứng minh rằng :

a) Bốn điểm H, M, N, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh năm điểm E, G, N, K, B cùng thuộc một đường tròn.

c) Năm điểm E, G, M, H, A cùng thuộc một đường tròn.

Giải (H.203)



Hình 203

a) Sử dụng hệ thức lượng cho các tam giác vuông IDH và IKC, ta thấy

$$ID^2 = IM.IH. \quad (1)$$

$$IC^2 = IN.IK. \quad (2)$$

Mà IC = ID nên từ (1) và (2), ta có

$$IM.IH = IN.IK.$$

Suy ra bốn điểm H, M, N, K cùng nằm trên đường tròn (đpcm).

b) Từ kết quả câu a) ta suy ra $\widehat{IMN} = \widehat{IKH}$. (3)

Lại vì tứ giác EMIN nội tiếp (do $\widehat{M} = \widehat{N} = 90^o$) nên $\widehat{IMN} = \widehat{IEN}$. (4)

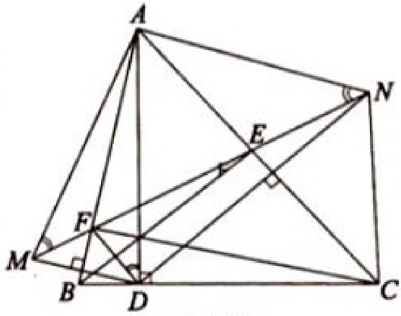
Từ (3) và (4), suy ra $\widehat{IEN} = \widehat{IKH} \Rightarrow$ tứ giác EGNK nội tiếp.

Từ đó $\widehat{EGK} = \widehat{ENK} = 90^o$. Kết hợp với $\widehat{EBK} = 90^o$ ta thấy năm điển E, G, N, B, K cùng nằm trên đường tròn đường kính EK (đpcm).

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC với đường cao AD. Gọi M là điểm đối xứng của D qua AB, N là điểm đối xứng của D qua AC, E và F theo thứ tự là giao điểm của MN với AB và AC. Chứng minh rằng :

a) Năm điểm A, F, D, C và N cùng thuộc một đường tròn.

b) Ba đường AD, BE và CF đồng quy.



Hình 204

Giải (H.204)

a) Từ giả thiết ta có $\widehat{ADC} = \widehat{ANC}$ (tính đối xứng) mà $\widehat{ADC} = 90^o$ nên $\widehat{ANC} = 90^o$. Từ đó tứ giác ADCN nội tiếp (1).

Lại vì D đối xứng với M qua AB nên $\widehat{AMF} = \widehat{ADF}$. Do Δ AMN cân tại A, suy ra $\widehat{AMF} = \widehat{ANF}$. Vậy $\widehat{ADF} = \widehat{ANF}$, dẫn đến tứ giác AFDN nội tiếp (2). Từ (1) và (2) ta thấy năm điểm A, F, D, C và N cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).

b) Từ kết quả câu a) ta có $\widehat{AFC} = \widehat{ADC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$), mà $\widehat{ADC} = 90^o$ nên $\widehat{AFC} = 90^o$. Như vậy $CF \perp AB$. Tương tự ta cũng có $BE \perp AC$. Ta thấy AD, BE và CF là ba đường cao của ΔABC nên chúng đồng quy (đpcm).

III. BÀI TẬP

30. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và dây cung CD vuông góc với AB tại điểm H. Gọi I là điểm đối xứng với H qua D, K là trung điểm của đoạn HD. Vẽ dây cung EF đi qua K. Chứng minh bốn điểm E, H, F, I cùng nằm trên một đường tròn.

31. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn đó. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B và C là các tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của OA và BC. Kẻ dây cung DE của đường tròn (O) qua I.

a) Chứng minh bốn điểm A, D, O, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.

32. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng AB.CD + BC.AD = AC.BD (Định lí Ptô-lê-mê).

Chủ đề 6

TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

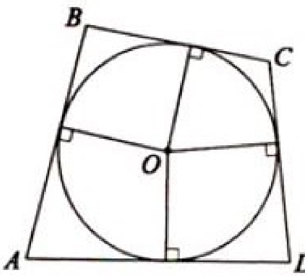
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một tứ giác được gọi là đường tròn nội tiếp tứ giác và tứ giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn.

2. Nếu một tứ giác ngoại tiếp một đường tròn thì tổng các cặp cạnh đối bằng nhau. Đảo lại, nếu một tứ giác có tổng các cặp cạnh đối bằng nhau thì tứ giác đó ngoại tiếp một đường tròn.

Tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O)

$\Leftrightarrow$ AB + CD = BC + AD (H.205)



Hình 205

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1.
CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC CẠNH CỦA TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP

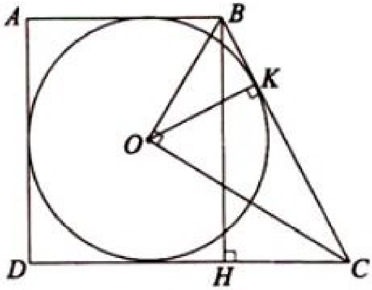
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O) $\Leftrightarrow$ AB + CD = BC + AD.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$) ngoại tiếp đường tròn (O). Tìm độ dài các cạnh AB và CD, biết rằng OB = 15cm và OC = 20cm.

Giải (H.206)



Hình 206

Xét tam giác BOC ta có

$$\widehat{OBC} + \widehat{OCB} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{BCD}}{2} = 90^o$$

suy ra tam giác BOC vuông tại O. Từ đó

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 = 15^2 + 20^2 = 625.$$

Do đó BC = 25cm.

Giả sử đường tròn (O) tiếp xúc với BC tại K, kẻ BH $\perp$ CD. Ta thấy

$$OK.BC = OB.OC, \text{ suy ra } OK = \frac{OB.OC}{BC} = \frac{15.20}{25} = 12 \text{ (cm)}.$$

Xét tam giác vuông BHC, ta có $HC^2 = BC^2 - BH^2 = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$ (cm).

Đặt CD = a, AB = b thì a − b = HC = 7. Vì ABCD ngoại tiếp đường cao (O) nên a + b = BC + AD = 49.

Giải hệ $\begin{cases} a - b = 7 \\ a + b = 49, \end{cases}$ ta được a = 28, b = 21 (cm).

Ví dụ 2. Cho tứ giác lồi ABCD, các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại K (C nằm giữa D và K) các đường thẳng BC và AD cắt nhau tại L (C nằm giữa B và L). Chứng minh rằng tứ giác ABCD ngoại tiếp được một đường tròn khi và chỉ khi thoả mãn một trong hai điều kiện sau :

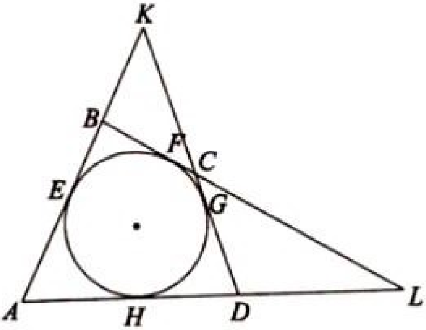
a) BK + BL = DK + DL. (1)

b) CK + AL = AK + CL.

Giải

Ta chỉ chứng minh trường hợp a) còn trường hợp b) được suy ra từ a) hoặc chứng minh tương tự.

Giả sử đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự tại E, F, G, H (H.207).



Hình 207

Từ tính chất tiếp tuyến ta có :

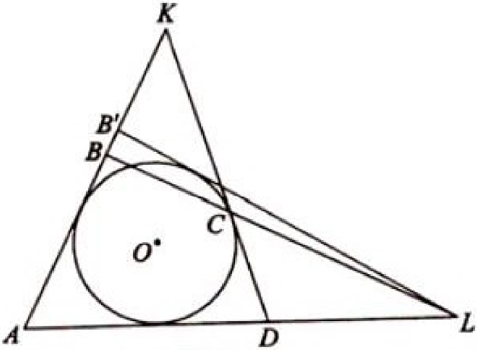
$BK + BL = (EK - BE) + (BF + FL)$

$= (KG - BE) + (BF + HL)$

$= KG + HD + DL$

$= KG + GD + DL = DK + DL.$

Ngược lại, giả sử có (1) ta sẽ chứng minh tứ giác ABCD ngoại tiếp. Thật vậy, vẽ đường tròn (O) nội tiếp ΔKAD. Giả sử tứ giác ABCD không ngoại tiếp thì đường tròn (O) không tiếp xúc với BC (H.208). Giả sử (O) cắt BC (trường hợp BC không cắt (O) lí luận tương tự).



Hình 208

Từ L kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt AK tại B' (B' nằm giữa B và K).

Ta thấy $BK + BL = DK + DL$ (giả thiết)

$B'K + B'L = DK + DL$ (theo phần trên).

Suy ra $BK + BL = B'K + B'L$

$\Rightarrow BK - B'K = B'L - BL$

$\Rightarrow BB' = B'L - BL$ (vô lí).

Vậy BC phải tiếp xúc với đường tròn (O), nghĩa là ABCD là tứ giác ngoại tiếp.

Lưu ý : *Kết quả của Ví dụ 2 cho ta thêm một dấu hiệu nhận biết một tứ giác lồi là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn.*

III. BÀI TẬP

33. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^{\circ}$) ngoại tiếp đường tròn (O) bán kính 6cm, cạnh đáy nhỏ AB = 10cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BC và CD.

34. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) ngoại tiếp đường tròn (O, r) và CD = 4AB. Tìm độ dài các đoạn thẳng AB và CD.

Dạng 2.

CHỨNG MINH TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP

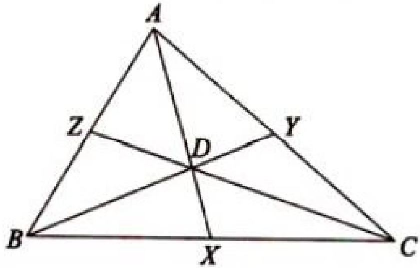
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Dựa vào dấu hiệu tứ giác ngoại tiếp.

2. Nếu tứ giác ABCD có AB + CD = BC + AD thì nó ngoại tiếp đường tròn.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và D là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Các đường thẳng AD, BD, CD cắt các cạnh BC, AC, AB theo thứ tự tại X, Y, Z. Chứng minh rằng nếu hai trong ba tứ giác DYAZ, DZBX, DXCY ngoại tiếp thì tứ giác thứ ba cũng ngoại tiếp.



Hình 209

Giải (H.209)

Giả sử hai tứ giác DZBX và DXCY ngoại tiếp.

Từ kết quả của Ví dụ 2 – Dạng 1, ta thấy

$$AB + CD = BC + AD. \quad (1)$$

$$BC + AD = AC + BD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra AB + CD = AC + BD.

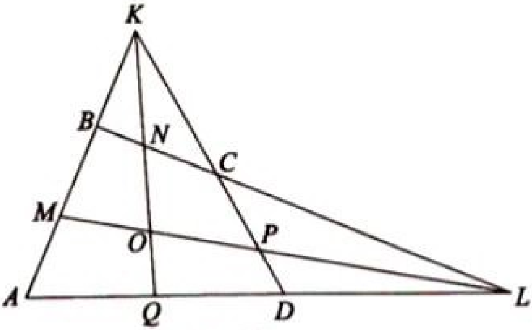
Do đó tứ giác DYAZ ngoại tiếp (đpcm).

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD, các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại K (C nằm giữa D và K), các đường thẳng BC và AD cắt nhau tại L (C nằm giữa B và L). Qua K và L kẻ hai đường thẳng chia tứ giác ABCD thành bốn tứ giác nhỏ. Chứng minh rằng nếu hai tứ giác nhỏ không có cạnh chung mà ngoại tiếp thì tứ giác ABCD cũng ngoại tiếp.

Giải (H.210)

Có hai trường hợp xảy ra:

a) Hai tứ giác AMOQ và ONCP ngoại tiếp.



Hình 210

Khi đó theo kết quả Ví dụ 2 - Dạng 1, ta có

AK + OL = AI + OK. (1)

OK + CL = OL + CK. (2)

Cộng (1) và (2) theo vế, ta được AK + CL = AL + CK, suy ra tứ giác ABCD ngoại tiếp.

b) Hai tứ giác MBNO và OPDQ ngoại tiếp, khi đó theo kết quả ví dụ 2 – dạng 1, ta có

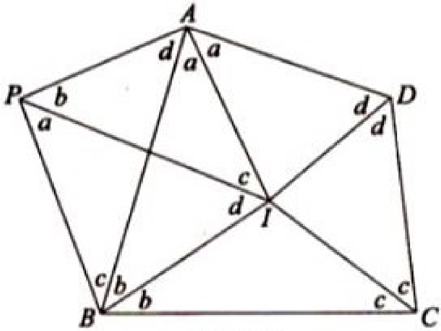
BK + BL = BK + OL

OK + OL = DK + DL

Suy ra BK + BL = DK + DI do đó tứ giác ABCD ngoại tiếp (đpcm).

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm I thì ta có hệ thức

$$BI^2 + \frac{AI}{DI}.BI.CI = AB.BC.$$



Hình 211

Giải (H.211)

Lấy điểm P ngoài tứ giác ABCD sao cho $\Delta PAB \sim \Delta IDC$. Khi đó $\widehat{PAB} = \widehat{IDC} = d$, $\widehat{PAB} = \widehat{ICD} = c$, suy ra $\widehat{PAB} = \widehat{IDC} = c$.

Suy ra $\widehat{PAI} + \widehat{PBI} = a + b + c + d = 180^o$, nên tứ giác PAIB nội tiếp.

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp này, ta có :

$$BI.PA + PB.AI = PI.AB, \text{ hay } BI.\frac{PA}{PI} + PB.\frac{AI}{PI} = AB \ (1)$$

Mặt khác $\widehat{IPA} = \widehat{IBA} = b, \widehat{BPI} = \widehat{BAI} = a, \widehat{PIA} = \widehat{PBA} = c, \widehat{PAB} = \widehat{PIB} = d$ nên

$$\Delta PIA \sim \Delta BCI \Rightarrow \frac{IA}{PI} = \frac{IC}{BC}; \frac{AP}{PI} = \frac{BI}{BC} \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BI^2 + PB.IC = AB.BC$ (3)

Lại vì $\Delta PBI \backsim \Delta AID$ nên $\frac{PB}{BI} = \frac{IA}{ID}$, hay $PB = BI.\frac{IA}{ID}$.

Thay vào (3) ta được $BI^2 + \frac{AI}{BI}.BI.CI = AB.BC$ (đpcm).

Lưu ý : *Lập luận tương tự ta cũng có hệ thức* $CI^2 + \frac{DI}{AI}.BI.CI = CD.CB$.

III. BÀI TẬP

35. Cho tứ giác ngoại tiếp ABCD. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ACD tiếp xúc với nhau tại một điểm nằm trên đường chéo AC.

36. Cho tứ giác ngoại tiếp ABCD. Qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng AB tại P. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng CD tại Q. Chứng minh rằng tứ giác APCQ ngoại tiếp.

37. Cho hình thang cân ABCD nội tiếp trong đường tròn (O_1, r) và ngoại tiếp đường tròn (O_2, r). Gọi $d = O_1O_2$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{r^2} \geq \frac{2}{R^2 - d^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Chủ đề 7

ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Công thức tính độ dài đường tròn

1. Tỉ số giữa độ dài đường tròn và đường kính của nó là một số không đổi, nghĩa là như nhau cho mọi đường tròn.

Người ta kí hiệu số không đổi ấy bằng chữ π (đọc là pi). Như vậy

$$\frac{C}{2R} \approx \pi \approx 3,14 \approx \frac{22}{7}.$$

2. Độ dài C của một đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$ hay $C = \pi d$ với d là đường kính của đường tròn.

II. Công thức tính độ dài cung tròn

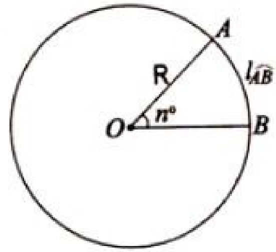
1. Đường tròn bán kính R (ứng với cung 360^o) có độ dài là $2\pi R$.

2. Mỗi cung 1^o bán kính R có độ dài là

$$\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}.$$

3. Một cung n^o bán kính R có độ dài là :

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi Rn}{180} \text{ (H.212).}$$



Hình 212

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÍNH ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN HOẶC CÁC ĐẠI LƯỢNG LIÊN QUAN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định công thức.

2. Tìm R, n, d.

3. Thay giá trị và tính.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1.

a) Tính độ dài cung 60^o của một đường tròn có bán kính 2dm.

b) Tính chu vi vành xe đạp có đường kính 650mm.

Giải

a) Áp dụng công thức $L = \frac{\pi Rn}{180}$ với $R = 2dm$, $n = 60^o$ thì

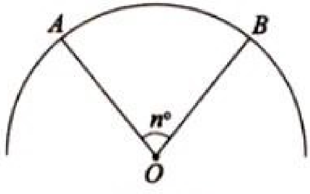
$$L = \frac{\pi.2.60}{180} \approx 2,09 \text{ (dm)}$$

b) Chu vi của vành xe đạp là

$$C = \pi d \approx 3,14.650 = 2041 \text{ (mm).}$$

Ví dụ 2. Bánh xe của một ròng rọc có chu vi là 540mm. Dây curoa bao bánh xe theo cung AB có độ dài 200mm (H.213). Tính số đo góc AOB.

Giải (H.213)



Hình 213

Áp dụng công thức $L_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi Rn}{180} = \dfrac{2\pi Rn}{360}$.

Với $2\pi R = 540$ và $L_{\overset{\frown}{AB}} = 200, n^o = \widehat{AOB}$.

Ta được : $200 = \dfrac{540.n}{360} \Leftrightarrow n \approx 133$.

Vậy $\widehat{AOB} = sđ\,\overset{\frown}{AB} \approx 133^o$.

Ví dụ 3. Tính bán kính của một đường tròn biết độ dài cung 30^o của nó là 1m.

Giải

Áp dụng công thức $L = \dfrac{\pi Rn}{180}$ với $L = 1m, n^o = 30^o$.

Ta được $L = \dfrac{\pi R30}{180} \Leftrightarrow R = \dfrac{6}{\pi} \approx 1,91$ (m).

Ví dụ 4. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp :

a) Một tam giác đều có cạnh là 6cm.

b) Một tứ giác đều có cạnh là 4cm.

c) Một lục giác đều có cạnh là 4cm.

Giải

a) Cạnh a của tam giác đều tính theo bán kính đường tròn ngoại tiếp là :

$$a = R\sqrt{3},\ \text{với } a = 6 \text{ (cm) thì } R = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Vậy độ dài của đường tròn ngoại tiếp là :

$$C = 2\pi R = 2\pi.\,2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

b) Cạnh a của tứ giác đều (hình vuông) tính theo bán kính đường tròn ngoại tiếp là :

$$a = R\sqrt{3},\ \text{với } a = 4cm \text{ thì } R = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp là :

$$C = 2\pi R = 2\pi.2\sqrt{2} = 4\pi\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

c) Cạnh của lục giác đều bằng bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.

Với R = 4cm thì độ dài đường tròn ngoại tiếp là :

$$C = 2\pi R = 2\pi.4 = 8\pi \text{ (cm)}$$

Ví dụ 5.

a) Xích đạo là một đường tròn của Trái Đất có độ dài khoảng 40.000km. Hỏi bán kính của trái đất bằng bao nhiêu.

b) Biết rằng mỗi kinh tuyến là một nửa đường tròn lớn của Trái Đất, có độ dài khoảng 20.000km. Vĩ độ của Hà Nội là $20^{o}01'$. Tính độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến Xích Đạo.

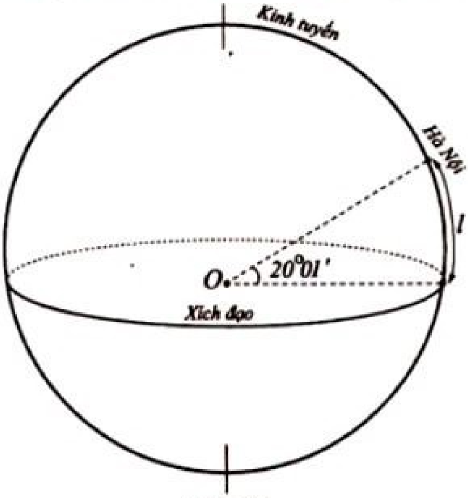
Giải

a) Gọi R là bán kính trái đất thì

$2\pi R = 40000$

$\Leftrightarrow R = \dfrac{20.000}{\pi} = 6369$ (km).

b) (H.214)



Hình 214

Cung 180^{o} ứng với 20.000km.

Cung $20^{o}01'$ ứng với l km

Ta có tỉ lệ thức

$$\frac{180}{20\frac{1}{60}} = \frac{20.000}{l} \Leftrightarrow l \approx 2224 (\text{km}).$$

Vậy độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến Xích Đạo dài khoảng 2224km.

III. BÀI TẬP

38. Nêu cách tính độ dài cung n^{o} của hình quạt tròn bán kính R.

39. Đường kính bánh xe của một xe đạp là 73cm.

a) Bánh xe đó quay bao nhiêu vòng khi xe đi được một đoạn đường 8km ?

b) Xe đi được bao nhiêu kilômét nếu bánh xe quay 1000 vòng ?

40. Nếu đường kính của một đường tròn tăng $\dfrac{1}{\pi}$ đơn vị thì chu vi của nó tăng thêm bao nhiêu ?

41. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp :

a) Một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 6cm, 8cm.

b) Một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông là 4cm.

c) Một tam giác cân có góc ở đỉnh là 120^{o} và đáy là 6cm.

42. Một tam giác đều và một tứ giác đều có cùng chu vi là 36cm. Hỏi độ dài đường tròn ngoại tiếp hình nào lớn hơn ? Lớn hơn bao nhiêu ?

Dạng 2
TÍNH ĐỘ DÀI CỦA CUNG TRÒN DO CÁC CUNG CHẤP NỐI THÀNH

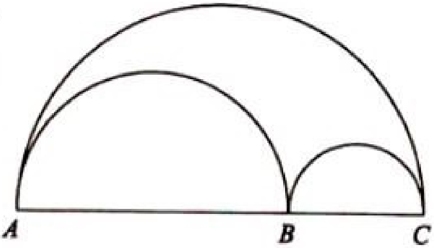
I. PHƯƠNG PHÁP

1. Tính độ dài mỗi cung theo bán kính của đường tròn tạo ra cung đó.

2. Lấy tổng độ dài các cung thành phần.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng sao cho B nằm giữa A và C. Chứng minh rằng độ dài của nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC.



Hình 215

Giải

Gọi C_1, C_2, C_3 lần lượt là độ dài của các nửa đường tròn đường kính AC, AB và BC thì $C_1 = \pi.AC$; $C_2 = \pi AB$ và $C_3 = \pi BC$.

Mà $C_2 + C_3 = \pi(AB + BC) = \pi.AC = C_1$.

Vậy $C_1 = C_2 + C_3$.

Ví dụ 2. Cho (O, OM). Vẽ (O') đường kính OM. Một bán kính OA của (O) cắt (O') ở B. Chứng minh $\overset{\frown}{MA}$ và $\overset{\frown}{MB}$ có độ dài bằng nhau.

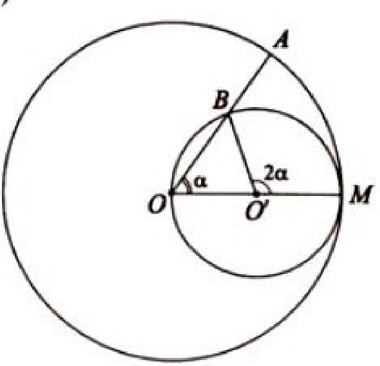
Giải (H.216)

Trên (O') đặt $\widehat{AOM} = \alpha$ thì $\widehat{BO'M} = 2\alpha$ (vì góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung).

Suy ra sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$, sđ $\overset{\frown}{MB} = 2\alpha$.

Do đó $l_{\overset{\frown}{MA}} = \dfrac{\pi.OM.2}{180^o}$. (1)

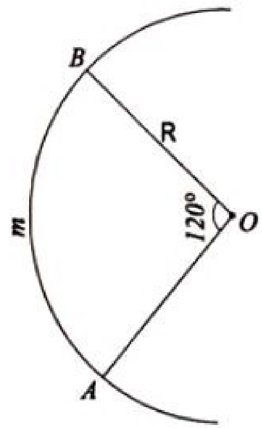
$$l_{\overset{\frown}{MB}} = \frac{\pi.OM.2\alpha}{180^o.2} = \frac{\pi.OM.\alpha}{180^o} \quad (2)$$



Hình 216

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{MA}$ và $\overset{\frown}{MB}$ có độ dài bằng nhau.

Ví dụ 3. Xem hình 217 và so sánh độ dài của cung AmB với độ dài đường gấp khúc AOB.



Hình 217

Giải

Gọi bán kính của hình quạt là R thì

$$l_{\overparen{AmB}} = \frac{\pi.R.120}{180} = \frac{2\pi R}{3}.$$

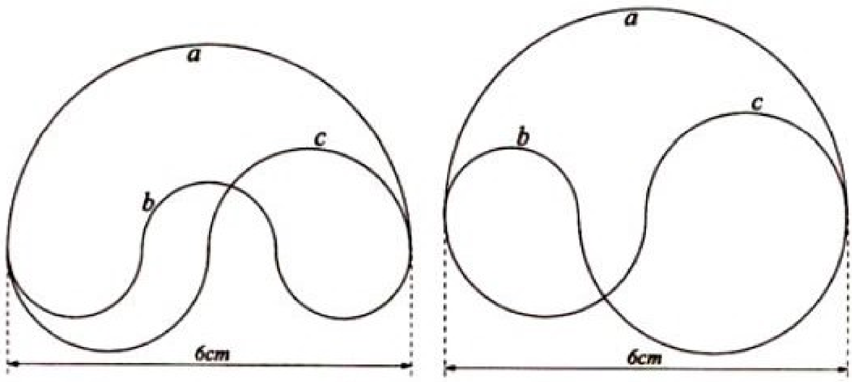
Độ dài đường gấp khúc AOB gồm hai đoạn OA, OB nên d = OA + OB = 2R.

Vì $\pi = 3{,}14 > 3 \Rightarrow \frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow 2R\frac{\pi}{3} > 2R$.

Vậy $l_{\overparen{AmB}} > d$.

III. BÀI TẬP

43. Hãy so sánh độ dài ba đường cong a, b, c trong hình 218a và 218b.



a) Hình 218 b)

Chủ đề 8

DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Công thức tính diện tích hình tròn

Diện tích S của một hình tròn bán kính R (H.219) được tính theo công thức

$$S = \pi R^2.$$

Hình 219

II. Cách tính diện tích hình quạt tròn (H.220)

1. Hình tròn bán kính R (ứng với cung 360^o) có diện tích là $S = \pi R^2$.

2. Diện tích một hình quạt 1^o bán kính R có diện tích là $\dfrac{\pi R^2}{360}$.

3. Diện tích một hình quạt n^o bán kính R có diện tích là

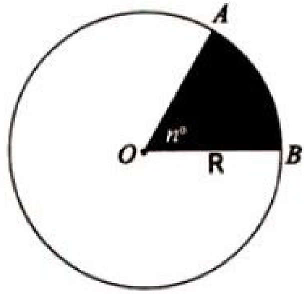
$$S_q = \frac{\pi R^2.n}{360}.$$

Viết lại thành

$$S_q = \frac{\pi R.n}{180} \times \frac{R}{2} = L_q.\frac{R}{2}.$$

Vậy công thức tính diện tích quạt tròn là

$$S_q = \frac{\pi R^2.n}{360} \text{ hay } S_q = L_q.\frac{R}{2}.$$

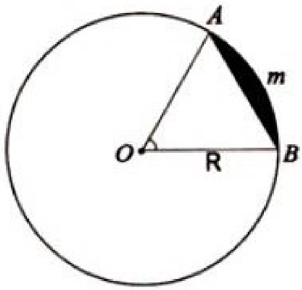


Hình 220

III. Diện tích hình viên phân – Diện tích hình vành khăn

1. Hình viên phân (phần tô đen) là phần hình tròn giới hạn bởi một cung AmB và dây căng cung AB có diện tích được tính bởi công thức

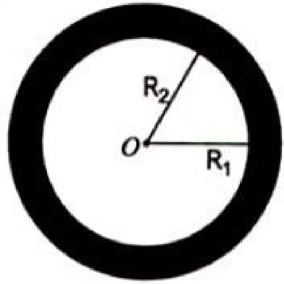
$$S_{vp} = S_{qAOB} - S_{OAB}.$$



Hình 221

2. Hình vành khăn (phần tô đen) là phần hình tròn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có diện tích được tính bởi công thức

$$S_{\text{vành khăn}} = \pi (R_1^2 - R_2^2).$$



Hình 222

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, QUẠT TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

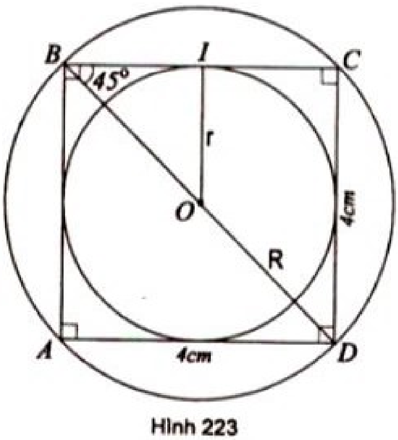
1. Xác định công thức.

2. Tìm R, n^o, *l*.

3. Thay số và tính.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính diện tích các hình tròn nội tiếp ngoại tiếp một hình vuông có cạnh là 4cm và nêu nhận xét về kết quả tìm được.



Hình 223

Giải

Trên (H.223) kẻ OI ⊥ BC thì OI = r là bán kính hình tròn nội tiếp hình vuông suy ra OI là đường trung bình của tam giác BCD nên

$$r = \frac{4}{2} = 2 \text{ (cm)}.$$

Vậy diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông là

$$S_1 = \pi R^2 = \pi\, 2^2 = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

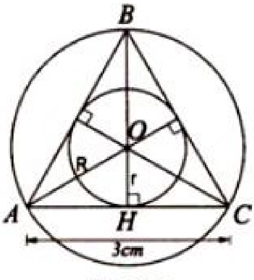
Diện tích hình tròn ngoại tiếp hình vuông là

$$S_2 = \pi R^2 = \pi.\, (2\sqrt{2}\,)^2 = 8\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Ta thấy $S_2 = 2S_1$ nên có nhận xét : diện tích hình tròn ngoại tiếp một hình vuông gấp hai lần diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông đó.

Ví dụ 2. Tính diện tích các hình tròn nội tiếp, ngoại tiếp một tam giác đều có cạnh là 3cm và nêu nhận xét về kết quả tìm được.

Giải



Hình 224

Trên (H.224) kẻ đường cao AH. Vì tam giác ABC đều nên trực tâm, trọng tâm, tâm vòng tròn ngoại tiếp trùng với O là tâm đường tròn ngoại tiếp.

Do đó $R = OA = \frac{2}{3}AH$, $r = OH = \frac{1}{3}AH$.

Vì AH đối diện với góc 60^o trong tam giác ABH vuông tại H có cạnh huyền AB = 3cm nên

$$\sin 60^o = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AH = 3.\sin 60^o = 3\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}.$$

Suy ra $R = \frac{2}{3}\frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (cm) ; $r = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (cm).

Diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác đều là :

$$S_2 = \pi.R^2 = \pi.(\sqrt{3})^2 = 3\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích hình tròn nội tiếp tam giác đều là :

$$S_1 = \pi.r^2 = \pi.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{4} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ta thấy $S_2 = 4S_1$ nên có nhận xét trong một tam giác đều diện tích hình tròn ngoại tiếp gấp bốn lần diện tích hình tròn nội tiếp của nó.

Ví dụ 3. Tính diện tích hình tròn trong mỗi trường hợp sau :

a) Chu vi của hình tròn là C.

b) Chu vi của hình tròn bằng nghịch đảo bán kính của nó.

Giải

a) Gọi bán kính của hình tròn là R thì $C = 2\pi R$ nên $R = \frac{C}{2\pi} \Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{C}{2\pi}\right)^2$.

Vậy diện tích của hình tròn đó là

$$S = \pi R^2 = \pi\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi C^2}{4\pi^2} = \frac{C^2}{4\pi} \text{ (đơn vị diện tích)}.$$

b) Vì $C = 2\pi R = \frac{1}{R} \Leftrightarrow R^2 = \frac{1}{2\pi}$.

Vậy diện tích của hình tròn này là :

$$S = \pi R^2 = \pi \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Ví dụ 4. Tính diện tích hình quạt tròn có bán kính 6cm, số đo cung là 36^o.

Giải

Áp dụng công thức $S_{quạt} = \frac{\pi R^2 n}{360}$ với $R = 6cm$, $n = 36$

Ta có $S_{quạt} = \frac{\pi.6^2.36}{360} = 3,6\pi \text{ } (cm^2)$.

III. BÀI TẬP

44. Nêu cách tính diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^o.

45. Tính diện tích hình tròn bán kính 4cm và các hình quạt tròn có góc ở tâm 30^o và 150^o của hình tròn đó.

46. Một thiết diện cắt ngang của một thân cây có chu vi đo được 154cm. Tính diện tích thiết diện đó (coi như hình tròn).

47. Ở vườn quốc gia Cúc Phương (tỉnh Ninh Bình) có Cây Chò ngàn năm tuổi thân to đến mức 8 người ôm mới xuể. Hãy tính thiết diện ngang của thân cây (coi như hình tròn và mỗi sải tay khoảng 1,5m).

48. Cho một hình tròn và một hình vuông có cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn hơn ?

Dạng 2
TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH VIÊN PHÂN, HÌNH VÀNH KHĂN VÀ NHỮNG HÌNH KHÁC LIÊN QUAN ĐẾN CUNG TRÒN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

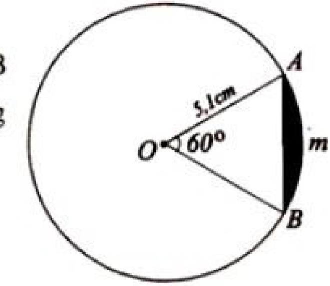
1. Dùng tính cộng diện tích : Nếu một hình H được chia thành hai hình H_1 và H_2 không có điểm trong chung $S_H = S_{H1} + S_{H2}$.

2. Xác định công thức.

3. Tìm R, n, thay số rồi tính.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hãy tính diện tích hình viên phân AmB biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60^o$ và bán kính đường tròn là 5,1cm.



Hình 225

Giải (H.225)

Áp dụng công thức $S = S_{\text{quạt AmB}} - S_{OAB}$.

Mà $S_{\text{quạt AmB}} = \dfrac{\pi.5,1^2.60}{360} = \dfrac{5,1^2\pi}{6}$.

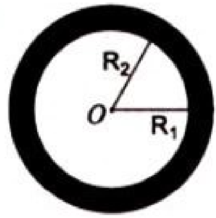
Tam giác OAB có OA = OB = 5,1cm và góc xen giữa 2 cạnh bằng 60^o nên có :

$S_{OAB} = \dfrac{1}{2}.5,1^2.\sin 60^o = \dfrac{5,1.\sqrt{3}}{4}$. Nên $S = 5,1^2\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 2,35\ (cm^2)$.

Ví dụ 2. Trên (H.226)

a) Tính diện tích S của hình vành khăn theo R_1 và R_2 (giả sử $R_1 > R_2$).

b) Tính S khi $R_1 = 10,5cm$, $R_2 = 7,8cm$.



Hình 226

Giải

a) Ta có $S = \pi(R_1^2 - R_2^2)$.

b) Khi $R_1 = 10,5cm$; $R_2 = 7,8cm$ thì

$$S = \pi\,(10,5^2 - 7,8^2) \approx 155,1\ (cm^2).$$

Ví dụ 3. Trên (H.227) biết diện tích miền tô đen là $86cm^2$. Tính diện tích hình tròn.

Giải (H.227)

Ta có $S_{\text{hình tròn}} = S_{hv} - S_{\text{gạch sọc}} = S_{hv} - 86$.

Gọi độ dài cạnh hình vuông là 2a (cm^2) thì

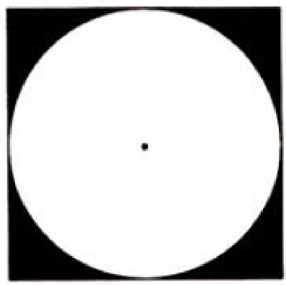
$$S_{hv} = (2a)^2 = 4a^2.$$

Khi đó bán kính hình tròn nội tiếp hình vuông là a và $S_{\text{hình tròn}} = \pi a^2$.

Do đó $\pi a^2 = 4a^2 - 86 \Leftrightarrow 86 = a^2(4 - \pi) \approx 0,86a^2$.

Suy ra $a^2 \approx 100$.

Vậy $S_{\text{hình tròn}} = \pi a^2 = 100\pi\ (cm^2)$.



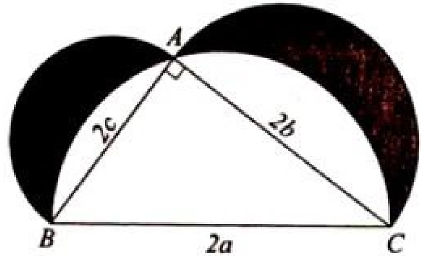
Hình 227

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nội tiếp nửa đường tròn đường kính BC. Vẽ ra phía ngoài của tam giác các nửa đường tròn đường kính AB và AC. Chứng minh rằng tổng diện tích hai hình trăng khuyết giới hạn bởi ba nửa tròn bằng S_{ABC} (hình trăng khuyết Hy-pô-crát).

Giải (H.228)

Vì tam giác ABC nội tiếp nửa đường tròn đường kính BC nên nó vuông tại A. Đặt BC = 2a, CA = 2b, CB = 2c thì

$$S_1 = \frac{1}{2}2b.2c = 2bc.$$



Hình 228

Diện tích ba nửa hình tròn đường kính AB, AC và BC lần lượt là

$$S_2 = \frac{1}{2}\pi c^2, S_3 = \frac{1}{2}\pi b^2, S_4 = \frac{1}{2}\pi a^2.$$

Nên tổng diện tích hai hình trăng khuyết là

$$S = S_1 + S_2 + S_3 - S_4 = 2bc + \frac{1}{2}\pi(b^2 + c^2 - a^2) = 2bc = S_{ABC}.$$

(do $b^2 + c^2 = a^2$ theo hệ thức Py-ta-go).

Ví dụ 5. Cho đường tròn có đường kính AB. Trên đoạn AB lấy hai điểm C và D sao cho AC = CD = DB. Vẽ về một phía của AB hai nửa đường tròn đường kính AC và AD. Vẽ về phía bên kia của AB hai nửa đường tròn đường kính CB, DB. So sánh diện tích phần tô đen (H.229) và diện tích mỗi phần còn lại của hình tròn.

Giải (H.229)

Đặt AC = CD = DB = 2a thì AB = 6a. Diện tích nửa hình tròn đường kính AB là

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi(3a)^2 = \frac{9\pi a^2}{2}.$$

Diện tích nửa hình tròn đường kính AC = DB = 2a là $S_2 = \frac{1}{2}\pi a^2$.

Diện tích nửa hình tròn đường kính AD = CB = 4a là $S_3 = \frac{1}{2}\pi(2a)^2 = 2\pi a^2$.

Diện tích hình tròn đường kính AB là

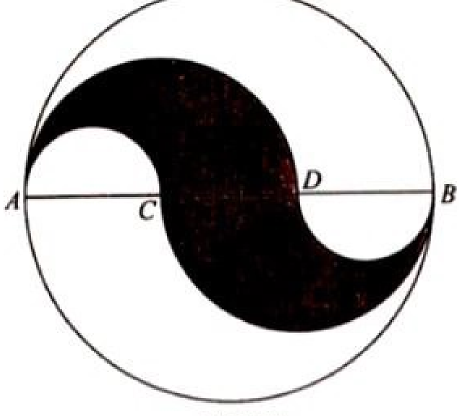
$$S = \pi (3a)^2 = 9\pi a^2.$$

Nên diện tích mỗi phần còn lại của hình tròn bằng :

$$S_1 + S_2 - S_3 = $$

$$= \frac{3\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{2} - 2\pi a^2$$

$$= 3\pi a^2 = \frac{1}{3}S.$$



Hình 229

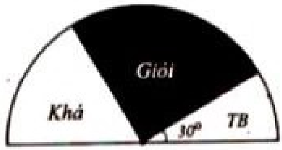
Diện tích phần tô đen bằng :

$$S - \frac{2}{3}S = \frac{1}{3}S.$$

Vậy diện tích mỗi phần bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình tròn đường kính AB.

III. BÀI TẬP

49. Hãy xem biểu đồ hình quạt biểu diễn xếp loại học lực học sinh của một trường THCS theo ba loại : giỏi, khá, trung bình (H.230).



Hình 230

Hãy trả lời các câu hỏi sau :

a) Có phải $\frac{1}{2}$ số học sinh xếp loại học lực giỏi không ?

b) Có phải $\frac{1}{3}$ số học sinh xếp loại học lực khá không ?

c) Số học sinh xếp loại học lực trung bình chiếm bao nhiêu phần trăm ?

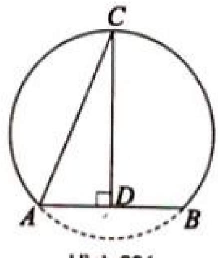
d) Tính số học sinh mỗi loại, biết tổng số học sinh là 900 em.

50. Người ta muốn may một chiếc khăn để phủ một chiếc bàn tròn đường kính 76cm sao cho khăn rủ xuống khỏi mép bàn (khăn có dạng hình tròn). Hãy tính diện tích vải cần có để làm khăn (không kể viền, mép, phần thừa) phần diện tích vải rủ xuống khỏi mép bα.

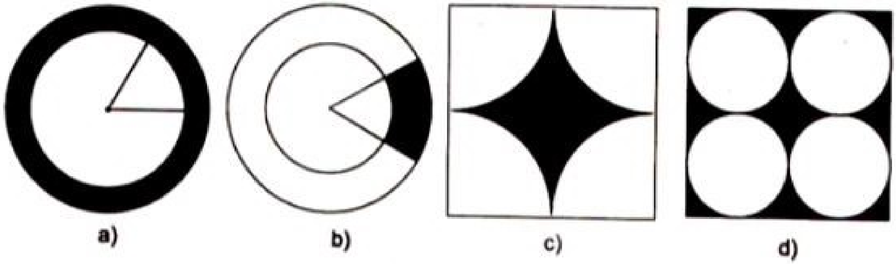
51. Cho hai đường tròn đồng tâm tạo thành một hình vành khăn. Biết rằng đường tròn nhỏ có bán kính là 4cm và hình vành khăn có diện tích là $20\pi cm^2$. Tìm đường kính của đường tròn lớn.

52. Trong hình 231, $\overset{\frown}{ACB}$ là một cung của một đường tròn, CD là đoạn thẳng nằm trên đường trung trực của dây AB. Biết AB = 6, CD = 9. Tính diện tích của cả hình tròn.

53. Với những kiến thức đã học, có thể tính được diện tích những hình tô đen dưới đây (H.232a, b, c, d) hay không ? Cần biết những dữ kiện nào đối với mỗi hình ?



Hình 231



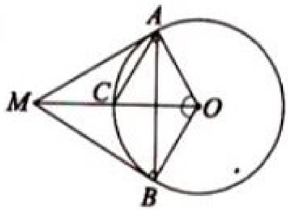
Hình 232

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

CHỦ ĐỀ 1

1. (H.233) Gọi C là giao điểm của OM với đường tròn (O) thì do OM = 2R, OC = R nên C là trung điểm của MO xét tam giác vuông OAM với AC là trung tuyến, ta thấy

$$AC = \frac{1}{2}MO = OC = OA.$$



Hình 233

Từ đó tam giác ACO đều, suy ra $\widehat{AOC} = 60^\circ$.

Vậy $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOC} = 120^\circ$.

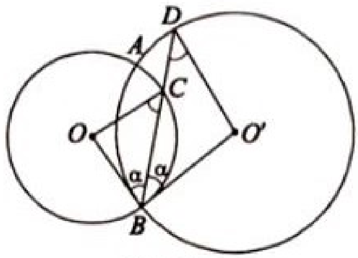
2. (H.234) Đặt $\widehat{OBC} = \widehat{O'BD} = \alpha$.

Xét các tam giác cân BOC và BO'D.

Ta thấy $\widehat{BOC} = 180^\circ - 2\alpha$,

$\widehat{BO'D} = 180^\circ - 2\alpha$.

Do đó $\widehat{BOC} = \widehat{BO'D}$.



Hình 234

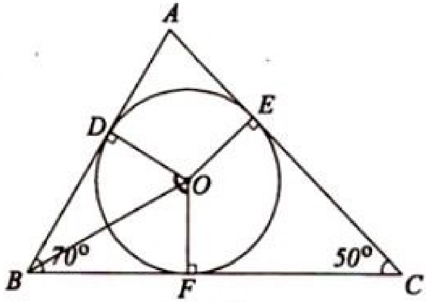
3. (H.235) Nối OB thì BO là tia phân giác của góc $\widehat{DBF}$. Từ đó

$$\widehat{OBF} = 70^o : 2 = 35^o.$$

Xét tam giác vuông OFB có

$$\widehat{BOF} = 90^o - 35^o = 55^o.$$

Từ đó $\widehat{DOF} = 2\widehat{BOF} = 110^o$, suy ra sđ $\overset{\frown}{DF} = 110^o$.



Hình 235

Xét tương tự, do $\hat{C} = 50^o$ nên $\widehat{EOF} = 130^o$, suy ra

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{EF} = 130^o\,;$$

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{DE} = 360^o - 110^o - 130^o = 120^o.$$

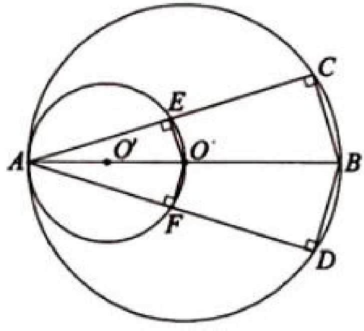
4. (H.236)

a) Ta có $OE = \dfrac{1}{2}BC$, $OF = \dfrac{1}{2}BD$.

Vì $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{BD}$ nên

$$BC < BD \Rightarrow OE < OF.$$

b) Rõ ràng thấy $\overset{\frown}{AE} > \overset{\frown}{AF}$, $\overset{\frown}{OE} < \overset{\frown}{OF}$.



Hình 236

5. (H.237)

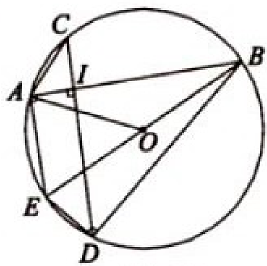
a) Nối AO do OA = OB = OE nên ΔAEB vuông tại A, nghĩa là $AB \perp AE$. Từ giả thiết $CD \perp AB$, suy ra AE // CD.

Từ đó $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DE}$ và AC = DE (đpcm).

b) Áp dụng định lí Py-ta-go, ta thấy

$$IA^2 + IC^2 = AC^2 = DE^2. \qquad (1)$$

$$IB^2 + ID^2 = BD^2. \qquad (2)$$



Hình 237

Từ (1) và (2) suy ra

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = DE^2 + BD^2 = BE^2 = 4R^2 \text{ (đpcm).}$$

6. (H.238)

a) Ta thấy $CD \perp AK$, $FB \perp AK$ suy ra CD // FB.

Từ đó $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{DB}$ (hai cung bị chắn giữa hai dây song song). (1)

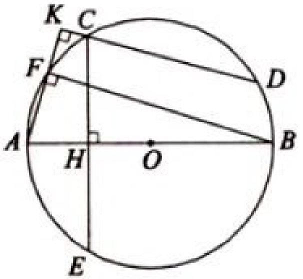
b) Vì lí do đối xứng nên $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BE}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{BE}$$

nghĩa là $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DE}$. (3)

c) Rõ ràng từ (3), ta có BF = DE (đpcm).

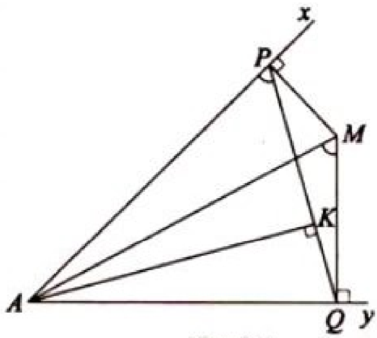


Hình 238

CHỦ ĐỀ 2

7. (H.239) Rõ ràng bốn điểm A, P, M, Q nằm trên đường tròn đường kính AM. Do đó $\widehat{QMA} = \widehat{QPA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AQ}$).

Các tam giác PAK và MAQ vuông, suy ra $\widehat{PAK} = \widehat{MAQ}$.



Hình 239

8. (H.240)

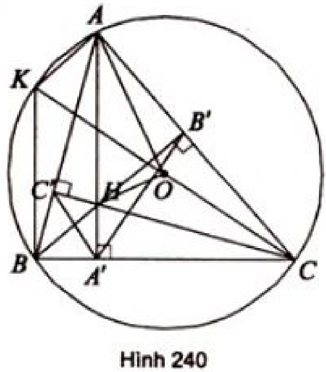
a) Ta thấy bốn điểm B, A', H, C' cùng nằm trên đường tròn đường kính BH nên $\widehat{C'A'H} = \widehat{C'BH}$.

Bốn điểm C, A', H, B' cùng nằm trên đường tròn đường kính CH nên $\widehat{B'CH} = \widehat{B'A'H}$.

Mặt khác $\widehat{C'BH} = \widehat{B'CH}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) (đpcm).

b) Giả sử K là giao điểm của CD với đường tròn (O). Tứ giác BHAK là hình bình hành nên AH = BK (1)

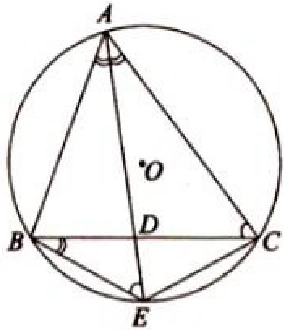
Tam giác vuông KBC có $\widehat{BKC} = \widehat{BAC} = 60^o$ nên $BK = \frac{1}{2}KC = OA$ (2)



Hình 240

Từ (1) và (2) suy ra AH = OA, nghĩa là tam giác AOH cân tại A.

9. (H.241)



Hình 241

a) Xét hai tam giác AEB và ACD có

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ (gt).

$\widehat{AEB} = \widehat{ACB} = \widehat{ACD}$.

Suy ra Δ AEB∽ΔACD (g.g), dẫn đến

$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AB}{AD}$, hay AB.AC = AD. AE.

b) Xét Δ EAB và Δ EBD có

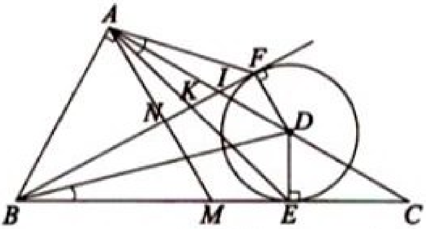
$\widehat{EBD} = \widehat{EBC} = \widehat{EAC} = \widehat{BAE}$

nên ΔEAB∽ΔEBD (g.g). Suy ra $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{EB}{ED}$, hay $ED.EA = EB^2$.

10. (H.242) a) Năm điểm A, B, E, D, F nằm trên đường tròn đường kính BD.

b) Trên đường tròn đường kính BD có DE = DF, nên $\widehat{FAD} = \widehat{EAD}$.

Suy ra AI là phân giác trong của ΔFAK, do đó $\dfrac{IF}{IK} = \dfrac{AF}{AK}$. (1)



Hình 242

Lại vì ΔAFK∽ΔBEK nên

$\dfrac{AF}{AK} = \dfrac{BE}{BK} = \dfrac{BF}{BK}$. (2)

Từ (1) và (2), ta thu được $\dfrac{IF}{IK} = \dfrac{BF}{BK}$.

c) Ta có $\widehat{AFB} = \widehat{AEB} = 180^o - 130^o = 50^o$.

Mặt khác $\widehat{AFB} = \widehat{ADB} = \widehat{ACB} + \widehat{DBC} = \widehat{MAC} + \widehat{DAF} = \widehat{NAF}$.

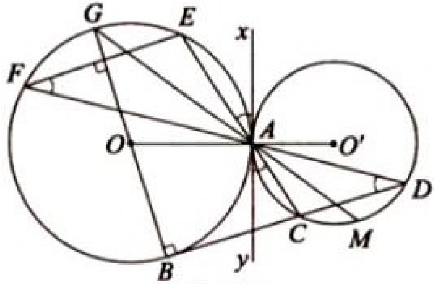
Từ đó $\widehat{ANB} = \widehat{AFB} + \widehat{NAF} = 50^o + 50^o = 100^o$.

11. (H.243) a) Qua A kẻ tiếp tuyến chung xy của hai đường tròn (O) và (O').

Ta có $\widehat{EFA} = \widehat{ADC} \rightarrow$ EF // CD.

b) Kẻ đường kính BG của đường tròn (O). TA có BG $\perp$ EF.

Từ đó $\widehat{GE} = \widehat{GF}$, suy ra AG là tia phân giác của góc $\widehat{EAF}$. Lại thấy $\widehat{CM} = \widehat{DM}$ nên AM là tia phân giác



Hình 243

của góc $\widehat{CAD}$. Ta lại có $\widehat{EAF}$ và $\widehat{CAD}$ đối đỉnh nên G, A, M thẳng hàng. Do $\widehat{BAG} = 90^o$ nên $\widehat{BAM} = 90^o$.

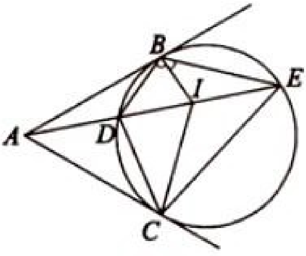
12. (H.244)

a) Xem lời giải của Ví dụ 4 – Chủ đề 3.

b) Ta có

$$\widehat{AIB} = \widehat{IBE} + \widehat{IEB}$$

$$\widehat{ABI} = \widehat{IBD} + \widehat{DBA}$$



Hình 244

Lại có $\widehat{IEB} = \widehat{DEB} = \widehat{DBA}$ (cùng chắn $\overparen{DB}$).

Suy ra $\widehat{AIB} = \widehat{ABI}$, dẫn tới Δ AIB cân tại A.

Do đó AB = AI. Kết hợp với AB = AC, ta có AB = AC = AI.

c) Do tam giác AIC cân tại A nên $\widehat{AIC} = \widehat{DCI} + \widehat{DCA}$. Ta lại có $\widehat{AIC} = \widehat{ICE} + \widehat{IEC}$ mà $\widehat{IEC} = \widehat{DCA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung).

Suy ra $\widehat{DCI} = \widehat{ICE}$. Vậy CI là tia phân giác của góc $\widehat{DCE}$.

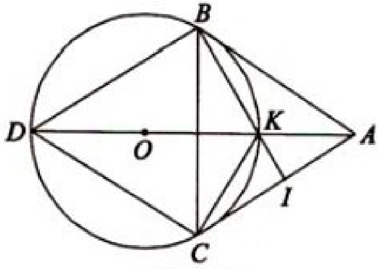
13. (H.245)

a) Vẽ dây cung BD // AC, nối DA cắt đường tròn (O) tại K, thì cát tuyến AKD là cát tuyến thoả mãn đề bài.

b) Xét hai tam giác BCI và CKI, ta có

$\widehat{BIC}$ chung,

$\widehat{KCI} = \frac{1}{2}$sđ$\overparen{CK}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung $\overparen{CK}$),



Hình 245

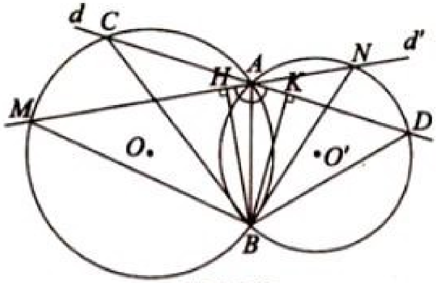
$\widehat{IBC} = \frac{1}{2}$sđ$\overparen{CK}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overparen{CK}$).

Suy ra $\widehat{KCI} = \widehat{IBC}$.

Vậy $\Delta BCI \backsim \Delta CKI \Rightarrow \frac{BI}{CI} = \frac{CI}{KI}$, hay $IC^2 = IK.IB$.

c) Với điều kiện $\widehat{BAC} = 60^o$. Mặt khác $\widehat{BDC} = \widehat{BCA} = 60^o$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung), suy ra ΔBDC đều. Từ đó tứ giác ABDC là hình thoi, dẫn đến AD$\perp$BC. Kết hợp với D là trung điểm cung $\overparen{BC}$ ta thấy AD đi qua điểm O (đpcm).

14. (H.246)



Hình 246

Kẻ BH $\perp$ MN (H $\in$ MN), BK $\perp$ CD (K $\in$ CD).

Từ giả thiết ta có BH = BK.

Xét hai tam giác vuông KCB và HMB có BH = BK,

$\widehat{KCB} = \widehat{ACB} = \widehat{AMB} = \widehat{HMB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB của đường tròn (O)).

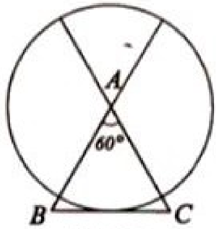
Do đó ΔKCB = Δ HMN, dẫn đến BC = BM.

Lại có $\Delta BCD \backsim \Delta BMN$ (g.g), suy ra $\dfrac{MN}{CD} = \dfrac{BM}{BC} = 1$.

Do vậy MN = CD (đpcm).

CHỦ ĐỀ 3

15. (H.247) Kí hiệu số đo của cung bị chắn bởi các cạnh của tam giác trên đường tròn là α.



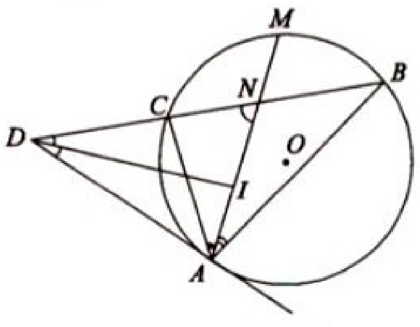
Hình 247

Xét cung được chắn bởi các phần kéo dài của các cạnh trên đường tròn và kí hiệu số đo góc của nó là β.

Khi đó $\dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \widehat{BAC} = 60^o$.

Nhưng $\alpha = \beta$, bởi vì các cung đó đối xứng với nhau qua đường thẳng đi qua tâm đường tròn và song song với BC. Do đó $\alpha = \beta = 60^o$.

16. (H.248) Giả sử N là giao điểm của AM và BC. Ta có



Hình 248

$$\widehat{AND} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BM})$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{CM})$$

$$= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{ACM}. \qquad (1)$$

Mặt khác $\widehat{NAD} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{ACM}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AND} = \widehat{NAD}$, hay ΔDAN cân tại D.

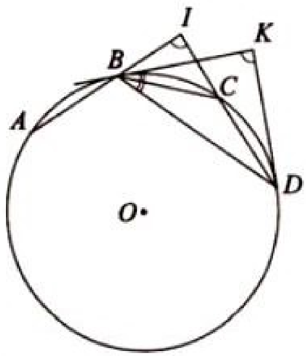
Từ đó $DI \perp AM$ (đpcm).

17. (H.249)

a) Ta có $\widehat{BIC} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{AmD}$ − sđ $\overset{\frown}{BC}$). (1)

$\widehat{BKD} = \frac{1}{2}$ (sđ $\overset{\frown}{BAD}$ − sđ $\overset{\frown}{BCD}$) $= \frac{1}{2}$ (sđ $\overset{\frown}{BA}$ + sđ $\overset{\frown}{AmD}$ − sđ $\overset{\frown}{BC}$ − sđ $\overset{\frown}{CD}$)

$= \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{AmD}$ − sđ $\overset{\frown}{BC}$). (2)



Hình 249

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BIC} = \widehat{BKD}$.

b) Ta thấy $\widehat{KBC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).

Lại thấy $\widehat{CBD} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{CD}$, mà sđ $\overset{\frown}{BC}$ = sđ $\overset{\frown}{CD}$

nên $\widehat{KBC} = \widehat{CBD}$, hay BC là tia phân giác của $\widehat{KBD}$ (đpcm).

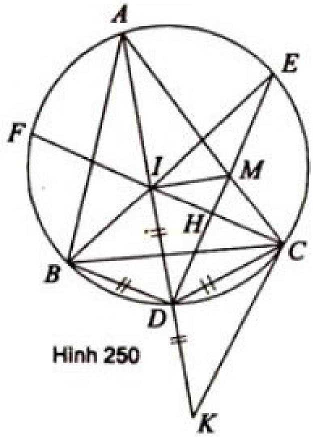
18. a) Gọi H là giao điểm của CF và DE (H.250).

Ta có $\widehat{CHD} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{CD}$ + sđ $\overset{\frown}{FAE}$)

$= \frac{1}{2}$ (sđ $\overset{\frown}{CD}$ + sđ $\overset{\frown}{FA}$ + sđ $\overset{\frown}{AE}$)

$= \frac{1}{4}$ (sđ $\overset{\frown}{BC}$ + sđ $\overset{\frown}{AB}$ + sđ $\overset{\frown}{AC}$)

$= \frac{360^o}{4} = 90^o \Rightarrow CI \perp ED.$



Hình 250

b) Ta có

$\widehat{BID} = (\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BD}$ + sđ $\overset{\frown}{AE}$)

$$\widehat{IBD} = \frac{1}{2} sđ\,\overparen{DCE} = \frac{1}{2}(sđ\,\overparen{DC} + sđ\,\overparen{CE}).$$

Mà $\overparen{BD} = \overparen{DC}$, $\overparen{AE} = \overparen{CE}$, nên $\widehat{BID} = \widehat{IBD}$. Suy ra DB = DI = DC. Tam giác DIC cân tại D có DE $\perp$ CI (theo câu a) nên DE là đường trung trực của đoạn IC. Từ đó ΔMIC cân tại M, dẫn đến $\widehat{MIC} = \widehat{MCI} = \widehat{ICB}$. Do đó IM // BC.

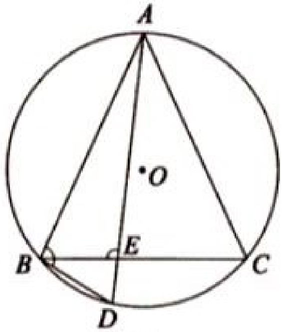
c) Tam giác CIK có CD = DI = DK, nên ΔCIK vuông tại C. Do CI là tia phân giác của góc ACB, suy ra CK là tia phân giác ngoài của $\widehat{ACB}$. Điểm K là giao điểm của tia phân giác của góc BAC và tia phân giác ngoài của góc ACB nên nó là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A của ΔABC.

***Lưu ý** : Từ kết quả câu c ta có mệnh đề sau : Đường tròn ngoại tiếp ΔABC chia đoạn thẳng nối tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp thành hai phần bằng nhau.*

19. (H.251)

a) Ta có

$$\widehat{AEB} = \frac{1}{2}(sđ\,\overparen{AB} + sđ\,\overparen{CD})$$
$$= \frac{1}{2}(sđ\,\overparen{AC} + sđ\,\overparen{CD})$$
$$= \frac{1}{2} sđ\,\overparen{ACD}$$
$$= \widehat{ABD}.$$



Hình 251

b) Từ câu a, ta thấy Δ AEB$\backsim$$\Delta$ABD (g.g) dẫn đến

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AB^2 = AC^2 = AD.AE.$$

c) Khi D thuộc cung BC chứa A thì các kết luận ở câu a và câu b vẫn đúng.

Chú ý rằng trong trường hợp này thì góc AEB là góc có đỉnh nằm ở bên ngoài đường tròn.

20. (H.252) Các góc $\widehat{ACN}$ và $\widehat{ADM}$ đều là những góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn (O). Do đó

$$sđ\,\widehat{ACN} = \frac{1}{2}(sđ\,\overparen{AN} - sđ\,\overparen{BM}). \quad (1)$$

$$sđ\,\widehat{ADM} = \frac{1}{2}(sđ\,\overparen{AM} - sđ\,\overparen{BN}). \quad (2)$$

Vì $\widehat{ACN} = \widehat{ADM}$ nên từ (1) và (2), ta có

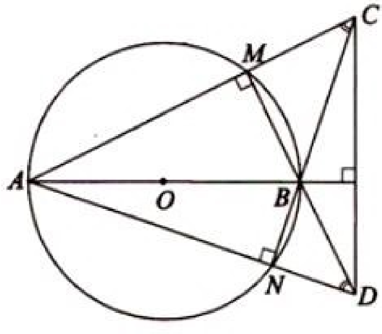
$$sđ\,\overset{\frown}{AN} - sđ\,\overset{\frown}{BM} = sđ\,\overset{\frown}{AM} + sđ\,\overset{\frown}{BM}.$$

Suy ra

$$sđ\,\overset{\frown}{AMB} = sđ\,\overset{\frown}{ANB} = \frac{360^o}{2} = 180^o.$$

Vậy AB là đường kính của đường tròn (O). Lại vì $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^o$ nên B là trực tâm Δ ACD.

Từ đó $AB \perp CD$ (đpcm).

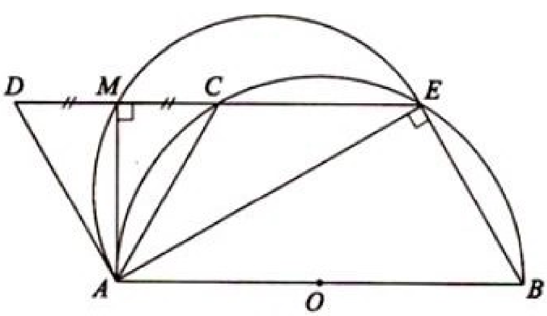


Hình 252

CHỦ ĐỀ 4

21. Kết quả : Quỹ tích các giao điểm M của BD và CE là nửa đường tròn tâm O bán kính $\frac{R}{3}$.

22. (H.253)



Hình 253

* *Phần thuận*. Giả sử E là giao điểm của đường thẳng CD với nửa đường tròn (O). Từ giả thiết ΔACD đều ta thấy $\widehat{ACE} = 120^o$ nên sđ $\overset{\frown}{BE} = 60^o$. Vì thế E là điểm cố định. Lại vì M là trung điểm của CD, mà ΔACD đều nên $AM \perp CD$ hay $\widehat{AME} = 90^o$. Từ đó M nằm trên đường tròn đường kính AE.

Lưu ý rằng khi C trùng A thì M trùng A, khi C trùng B thì M trùng với E. Vậy M chỉ nằm trên nửa đường tròn đường kính AE.

* *Phần đảo*. Lấy điểm M bất kì trên nửa đường tròn đường kính AE. Đường thẳng EM cắt nửa đường tròn (O) tại C. Vẽ tam giác đều ACD, trong đó D thuộc nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B. Khi đó do sđ $\overset{\frown}{BE} = 60^o$ nên ta thấy ngay $\widehat{ABE} = 60^o$, dẫn đến $\widehat{ACE} = 120^o$.

Suy ra $\widehat{ACD} + \widehat{ACE} = 60^o + 120^o = 180^o$ nên bốn điểm D, M, C, E thẳng hàng. Rõ ràng MD = MC (vì trong tam giác đều ACD đường cao AH cũng là đường trung tuyến).

* *Kết luận*. Quỹ tích trung điểm M của CD là nửa đường tròn đường kính AE nằm trên nửa mặt phẳng bờ AE không chứa B.

23. (Bạn đọc tự vẽ hình)

* *Phần thuận*. Từ giả thiết $AB = R\sqrt{3}$ suy ra sđ $\widehat{ACB} = 120^o$. Từ đó $\widehat{ACB} = 120^o$. Từ $\widehat{ACB} = 90^o + \dfrac{\widehat{AMB}}{2}$ dẫn đến $\widehat{AMB} = 60^o$. Vậy điểm M nằm trên cung chứa góc 60^o vẽ trên đoạn AB ở nửa mặt phẳng bờ AB chứa cung nhỏ AB.

* *Phần đảo*. Lấy điểm M bất kì trên cung chứa góc 60^o vẽ trên đoạn AB ở nửa mặt phẳng bờ AB chứa cung nhỏ AB. Vẽ đường tròn tâm C nội tiếp Δ MAB. Ta cần chứng minh C thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O). Thật vậy, do $\widehat{ACB} = 90^o + \dfrac{\widehat{AMB}}{2} = 120^o$, suy ra điểm C thuộc cung chứa góc 120^o vẽ trên đoạn AB. Do đó C thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (O).

* *Kết luận*. Quỹ tích của điểm M là cung chứa góc 60^o vẽ trên đoạn thẳng AB thuộc nửa mặt phẳng bờ AB có chứa cung nhỏ AB của đường tròn (O).

24. a) Hướng dẫn : Điểm A thuộc cung chứa góc 50^o vẽ trên đoạn BC và A thuộc đường tròn tâm M bán kính R = 3cm (M là trung điểm BC).

b) Dựng đường tròn (O ; 2,5cm).

* Dựng dây cung BC của đường tròn (O) sao cho $\widehat{BOC} = 100^o$.

* Dựng cung chứa góc 115^o vẽ trên đoạn BC.

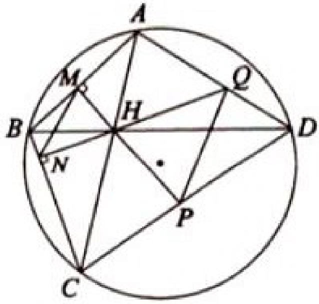
* Dựng đường thẳng d song song với BC cách BC 1cm, cắt cung chứa góc 115^o tại I.

* Dựng đường tròn (I, 1cm).

* Dựng dây cung BA của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (I).

* Nối AC, tam giác ABC là tam giác cần dựng.

25. (H.254)



Hình 254

a) Ta có $\widehat{AHQ} = \widehat{CHN} = \widehat{CBD} = \widehat{CAD}$ suy ra tam giác QHA cân tại Q. Từ đó dễ dàng suy ra QH = QA = QD nghĩa là Q là trung điểm của đoạn AD.

Chứng minh tương tự ta cũng thấy P là trung điểm của đoạn CD. Vậy PQ // AC.

b) Do bốn điểm B, M, H, N cùng nằm trên đường tròn đường kính BH nên $\widehat{CBH} = \widehat{NMH}$.

Mặt khác $\widehat{HQP} = \widehat{AHQ} = \widehat{CHN} = \widehat{CBH}$.

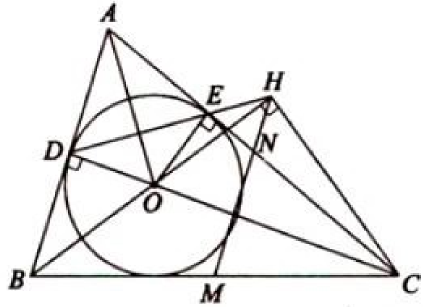
Suy ra $\widehat{NQP} = \widehat{NMH} = \widehat{NMP}$, dẫn đến bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).

26. (H.255) a) Ta thấy bốn điểm A, D, O, E cùng nằm trên đường tròn đường kính OA nên $\widehat{EAO} = \widehat{EDO} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Trong đó ΔBDH có

$$\widehat{BHD} = 180^o - 90^o - \widehat{EDO} - \frac{\widehat{B}}{2}$$

$$= 90^o - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2}.$$



Hình 255

Mặt khác $\widehat{ACD} = \dfrac{\widehat{C}}{2}$, từ đó $\widehat{OHE} = \widehat{ECO}$, dẫn đến bốn điểm O, E, H, C cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).

b) Theo kết quả câu a, ta có $\widehat{OEC} = \widehat{OHC} = 90^o$, hay BH ⊥ CH.

Gọi M là trung điểm của BC, khi đó tam giác BHM cân tại M, suy ra $\widehat{HBM} = \widehat{MHB}$, mặt khác $\widehat{HBM} = \widehat{HBA}$ nên $\widehat{HBA} = \widehat{MBH}$.

Từ đó HM // AB.

Tóm lại : Đường trung bình của tam giác ABC (song song với cạnh AB), đường phân giác trong của $\widehat{ABC}$ và DE đồng quy tại điểm H (đpcm).

CHỦ ĐỀ 5

27. (H.256)

a) Vì $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^o$ nên tứ giác AEDC nội tiếp.

Theo trên, tứ giác AEDC nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \widehat{BDI}$ (cùng bù với $\widehat{EDC}$).

Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$ (cùng chắn $\widehat{BC}$) suy ra $\widehat{BDI} = \widehat{BMC}$, dẫn đến tứ giác DIMC nội tiếp (đpcm).

b) Từ giả thiết BM là đường kính, ta có MA ⊥ AB.

lại có CH ⊥ AB, suy ra AM // CH. (1)

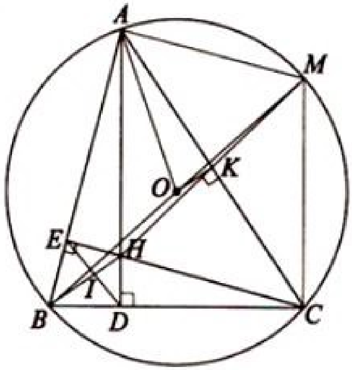
Tiếp theo, do CM ⊥ BC. AD ⊥ BC nên AH // CM. (2)

Từ (1), (2) ta thấy tứ giác AHCM là hình bình hành. Từ đó K là trung điểm của AC. Suy ra OK ⊥ AC (đpcm).

c) Xét tam giác vuông AKO có $\widehat{AOK} = 60^o$, suy ra $\widehat{OAK} = 30^o$, dẫn đến

$$OK = \frac{1}{2}\ OA = \frac{1}{2} OB. \quad (3)$$

Lại do OK là đường trung bình của tam giác BHM nên $OK = \frac{1}{2}$ BH. (4)



Hình 256

Từ (3) và (4) suy ra BH = OB, nghĩa là tam giác BHO cân tại B (đpcm).

28. (H.257)

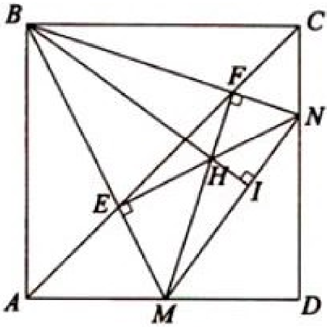
a) Ta thấy $\widehat{EBN} = \widehat{ECN} = 45^o \Rightarrow$ tứ giác BENC nội tiếp.

$\widehat{FBM} = \widehat{FAM} = 45^o \Rightarrow$ tứ giác BFMA nội tiếp.

b) Từ kết quả câu a, tứ giác BCNE nội tiếp nên $\widehat{BCN} + \widehat{BEN} = 180^o$. Mà $\widehat{BCN} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{BEN} = 90^o$, hay $\widehat{MEN} = 90^o$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $\widehat{MFN} = 90^0$.



Hình 257

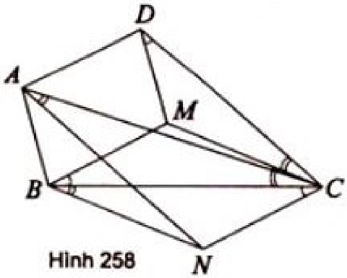
Do đó tứ giác MEFN nội tiếp đường tròn đường kính MN (đpcm).

c) Từ câu b, ta thấy H là trực tâm tam giác BMN. Từ đó BI ⊥ MN.

Xét hai tam giác vuông BCN và BIN có BN chung, $\widehat{BNC} = \widehat{BEC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$), $\widehat{BEC} = \widehat{BNI}$ (cùng bù với $\widehat{FEM}$) nên $\widehat{BNC} = \widehat{BNI}$. Vì thế ΔBCN = Δ BIN (g.c.g) dẫn tới BI = BC = a.

29. (H.258)

a) Vì tứ giác BMCN là hình bình hành nên $\widehat{BCN} = \widehat{CBM}$ (so le trong).



Hình 258

Lại theo giả thiết $\widehat{CBM} = \widehat{CDM}$, suy ra $\widehat{BCN} = \widehat{CDM}$. (1)

Ta có CN $\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}$ BM, BM $\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}$ AD nên CN $\mathrel{\underline{\underline{/\!/}}}$ AD, nghĩa là tứ giác ADCN là hình bình hành, dẫn đến AN // CD, mà AB // DM, suy ra $\widehat{BAN} = \widehat{MDC}$ (góc có cạnh tương ứng song song). (2)

Từ (1) và (2) có $\widehat{BCN} = \widehat{BAN}$, suy ra tứ giác ABNC nội tiếp (đpcm).

b) Ta có $\widehat{BCM} = \widehat{CBN}$ (so le trong). Lại vì tứ giác ABNC nội tiếp nên $\widehat{CBN} = \widehat{CAN}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{NC}$). Mặt khác $\widehat{CAN} = \widehat{ACD}$ (so le trong).

Do đó $\widehat{BCM} = \widehat{ACD}$ (đpcm).

30. (H.259)

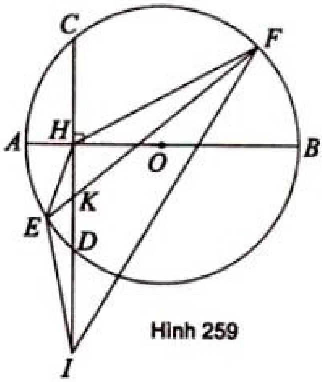
Đặt HK = KD = x, khi đó DI = 2x, KC = 3x. Ta thấy bốn điểm E, D, F, C cùng nằm trên đường tròn (O) nên KE. KF = KD. KC (1)

Mặt khác KD.KC = x.3x = $3x^2$

$$KH. KI = x. 3x = 3x^2.$$

Suy ra KD. KC = KH. KI (2) Từ (1) và (2) suy ra KE. KF = KH. KI

Do đó bốn điểm E, H, F, I cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).



Hình 259

31. (H.260) a) Do bốn điểm B, D, C, E cùng nằm trên đường tròn (O) nên

$$ID. IE = IB. IC = IB^2. \qquad (1)$$

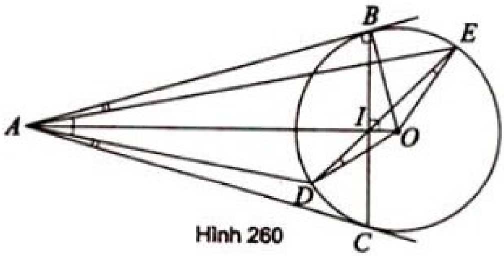
Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông ABO với BI là đường cao, ta có

$$IB^2 = IA.IO. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thu được

$$ID.IE = IA.IO.$$

Chứng tỏ bốn điểm A, D, O, E cùng nằm trên một đường tròn.



Hình 260

b) Từ câu a) ta thấy $\widehat{ODE} = \widehat{OAE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{OE}$), $\widehat{OED} = \widehat{OAD}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{OD}$).

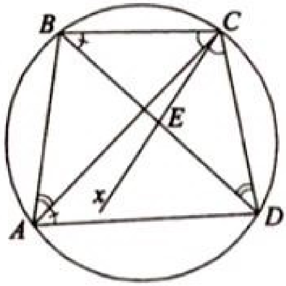
Mà ΔODE cân tại O nên $\widehat{ODE} = \widehat{OED}$. Do đó $\widehat{OAE} = \widehat{OAD}$. (3)

Chú ý rằng AO là tia phân giác của góc BAC từ (3) ta suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$. (4)

Từ (4) dễ dàng suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ (đpcm).

Lưu ý: Kết quả bài toán không thay đổi, nếu ta hoán đổi vị trí hai điểm D và E trên đường tròn (O).

32. (H.261)



Hình 261

Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{ACD} > \widehat{ACB}$.

Qua C kẻ tia Cx sao cho $\widehat{xCD} = \widehat{ACB}$.

Gọi E là giao điểm của Cx với BD.

Ta thấy $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ (g.g) suy ra $\dfrac{AB}{ED} = \dfrac{AC}{CD}$,

hay AB.CD = AC.ED. (1)

Mặt khác $\Delta ACD \backsim \Delta BCE$ (vì $\widehat{BCE} = \widehat{ACD}$, $\widehat{CAD} = \widehat{CBE}$, suy ra $\dfrac{AD}{EB} = \dfrac{AC}{BC}$, hay BC.AD = AC. EB. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB.CD + BC.AD = AC (EB + ED) = AC.BD (đpcm).

CHỦ ĐỀ 6

33. Bạn đọc tự vẽ hình.

Kẻ $BE \perp CD$ ($E \in CD$). Ta có BE = AD = 12cm.

Đặt BC = a, CE = b. Do tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O) nên

$$AB + CD = AD + BC \Leftrightarrow 10 + 10 + b = 12 + a \Leftrightarrow a - b = 8. \quad (1)$$

Từ định lí Py-ta-go cho tam giác vuông BEC, ta có

$$BE^2 = BC^2 - CE^2, \text{ hay } a^2 - b^2 = 144. \quad (2)$$

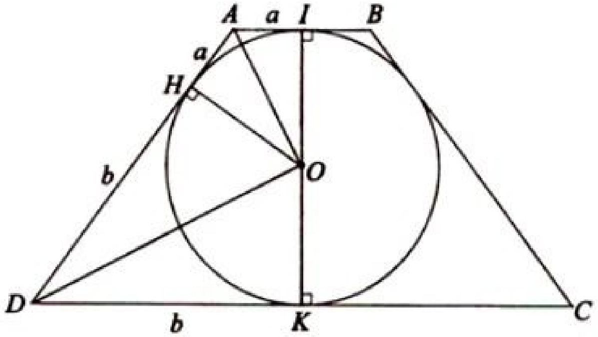
Giải hệ phương trình $\begin{cases} a - b = 8 \\ a^2 - b^2 = 144 \end{cases}$ tìm được BC = 13cm, CD = 15cm.

34. (H.262)

Gọi H, I, K theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (O) với các cạnh AD, AB, CD. Đặt AI = AH = a, DH = DK = b.

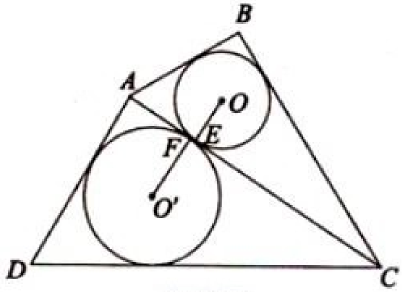
Sử dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông AOD, ta có

$$OH^2 = HA.HD$$



Hình 262

Hay $r^2 = a.4a$, suy ra $a = \frac{r}{2}$. Từ đó dễ dàng suy ra $AB = r$ và $CD = 4r$.



Hình 263

35. (H.263)

Giả sử đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với cạnh AC tại điểm E, đường tròn nội tiếp tam giác ACD tiếp xúc với cạnh AC tại điểm F.

Ta sẽ chứng minh E trùng F. Thật vậy, ta có $2AE = AB + AC - BC$

$2AF = AD + AC - CD$, nên

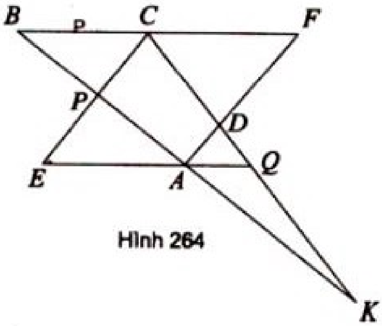
$$2|AE - AF| = |(AB + AC - BC) - (AD + AC - CD)|$$
$$= |(AB + CD) - (AD + BC)| \ (1)$$

Vì ABCD là tứ giác ngoại tiếp, nên $AB + CD = AD + BC$.

Do đó từ (1) ta suy ra

$$|AE - AF| = 0 \Leftrightarrow AE = AF,$$

nghĩa là E trùng F (đpcm).



Hình 264

36. (H.264) Nhận thấy, nếu ABCD là hình thang thì kết quả đúng hiển nhiên. Giả sử tứ giác ABCD không có hai cạnh nào song song.

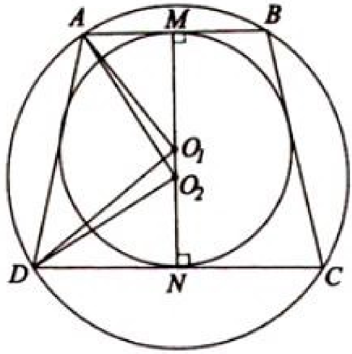
Xét trường hợp $AB > CD$ và $BC > AD$. Kéo dài các cạnh đối của hai tứ giác

ABCD và APCQ cắt nhau tại E, F, K (H). Vì ABCD là tứ giác ngoại tiếp nên theo kết quả ví dụ 6.2 ta có

$$CF + CK = AF + AK \Leftrightarrow AE + CK = CE + AK.$$

(do tứ giác AECF là hình bình hành). Do đó theo kết quả ví dụ 2 – chủ đề 6, ta suy ra tứ giác APCQ ngoại tiếp được một đường tròn.

37. (H.265)



Hình 265

Từ giả thiết ta suy ra O_1, O_2 nằm trên trục đối xứng MN của hình thang cân ABCD (M là trung điểm của AB, N là trung điểm của CD). Vì

$$\widehat{BAO_2} + \widehat{CDO_2} = \frac{1}{2}(\widehat{BAD} + \widehat{ADC}) = 90^o$$

mà $\Delta AMO_2 \backsim \Delta O_2ND \rightarrow \dfrac{AM}{O_2N} = \dfrac{MO_2}{ND}$.

Suy ra $AM.DN = O_2M.\ O_2N = r^2$. Sử dụng định lí Py-ta-go cho các tam giác vuông AMO_1 và DNO_1 ta có

$$2R^2 = AO_1{}^2 + O_1D^2 = AM^2 + MO_1{}^2 + DN^2 + NO_1{}^2$$
$$= AM^2 + DN^2 + (r + d)^2 + (r - d)^2$$
$$\geq 2AM.DN + 2(r^2 + d^2) = 4r^2 + 2d^2.$$

Do đó $R^2 - d^2 \geq 2r^2$, suy ra $\dfrac{1}{r^2} \geq \dfrac{2}{R^2 - d^2}$ (đpcm)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi AM = DN, hay AB = CD, tức là ABCD là hình vuông (lúc này $d = O_1O_2 = 0$).

CHỦ ĐỀ 7

38. Muốn tính độ dài cung n^o của hình quạt tròn bán kính R người ta lập luận theo ba bước sau :

Bước 1 : Độ dài cung 360^o của hình quạt bán kính R chính là chu vi đường tròn $C = 2\pi R$.

Bước 2 : Độ dài cung 1^o của hình quạt tròn bán kính R là $\dfrac{2\pi R}{360} = \dfrac{\pi R}{180}$.

Bước 3 : Độ dài cung n^o của hình quạt tròn bán kính R là $\frac{\pi Rn}{180}$.

39. Đường kính bánh xe đạp là 73cm thì chu vi của bánh xe đó là :

$$C = \pi d = 73\pi \text{ (cm)} \approx 299\text{cm}.$$

a) Bánh xe quay một vòng xe đi được đoạn đường 229cm.

Bánh xe quay x vòng xe đi được đoạn đường 8km

Ta có $x = \frac{800.000}{229} = 3493\frac{103}{229}$ (vòng).

b) Nếu bánh xe quay 1000 vòng thì xe đi được :

$$229 \times 1000 = 229000 \text{ (cm)} = 2{,}29\text{km}.$$

40. Chu vi một đường tròn được tính theo công thức $C = \pi d$ (d là đường kính của đường tròn).

Nếu đường kính tăng thêm $\frac{1}{\pi}$ đơn vị thì đường kính mới là $d + \frac{1}{\pi} = \frac{\pi d + 1}{\pi}$.

Nên đường tròn mới có chu vi là $C_1 = \frac{\pi(\pi d + 1)}{\pi} = \pi d + 1 = C + 1$.

Vậy chu vi tăng thêm 1 đơn vị.

41. Vì tâm đường tròn ngoại tiếp một tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền nên cạnh huyền của tam giác vuông là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông đó.

a) Một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 6cm, 8cm thì cạnh huyền là 10cm. Vậy chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông đó là :

$$C = \pi d = 10\pi \text{ (cm)}.$$

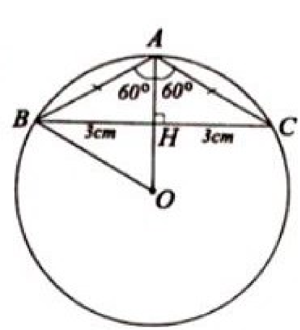
b) Một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông là 4cm thì có cạnh huyền là $4\sqrt{2}$ (cm). Vậy chu vi là

$$C = \pi d = 4\pi\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

c) (H.266) Xét tam giác cân ABC có góc ở đỉnh là $\widehat{A} = 120^o$ và đáy BC = 6cm nội tiếp (O, R).

Vì tam giác ABC cân tại A nên AB = AC suy ra $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$, do đó $OA \perp BC$.

Suy ra AO là phân giác của góc BAC hay



Hình 266

$\widehat{BAO} = 60^o$ đồng thời AO là đường trung tuyến nên BH = 3cm (H là giao điểm của AO và BC).

Lúc đó tam giác AB O là tam giác đều nên R = OA = AB.

Vì BH đối diện với góc 60^o trong tam giác ABH vuông tại H nên

$$\sin 60^o = \frac{BH}{AB} \leftrightarrow AB = \frac{BH}{\sin 60^0} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là :

$$C = 2\pi R = 2\pi.2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

42. Độ dài mỗi cạnh của tam giác đều là a = 36 : 3 = 12 (cm). Độ dài mỗi cạnh của tứ giác đều là b = 36 :4 = 9 (cm).

Cạnh a của tam giác đều tính theo bán kính đường tròn ngoại tiếp là :

$$a = R_1\sqrt{3} \text{ với } a = 12\text{cm thì } R_1 = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Nên độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là :

$$C_1 = 2\pi R = 2\pi.2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Cạnh b của tứ giác đều (hình vuông) tính theo bán kính đường tròn ngoại tiếp là :

$$b = R_2\sqrt{2} \text{ với } b = 9\text{cm thì } R_2 = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{(cm)}.$$

Nên độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác đều là :

$$C_2 = 2\pi R_2 = 2\pi.\frac{9\sqrt{2}}{2} = 9\pi\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

Lúc đó $C_1 - C_2 = 8\pi\sqrt{3} - 9\pi\sqrt{2} = \pi(8\sqrt{3} - 9\sqrt{2})$.

Do $8\sqrt{3} > 9\sqrt{2}$ nên $\pi(8\sqrt{3} > 9\sqrt{2}) > 0$ suy ra $C_1 > C_2$. Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác đều lớn hơn độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác đều.

43. (H.267)

Đường cong a là nửa đường tròn đường kính 6cm nên có độ dài là

$$a = \frac{1}{2}\pi.6 = 3\pi \text{ (cm)}.$$

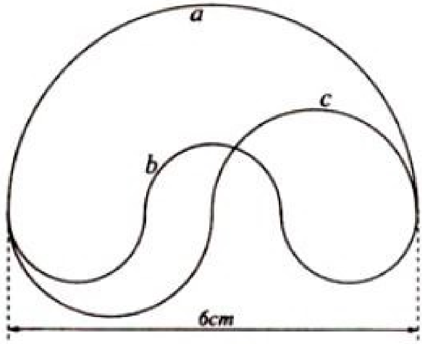
Đường cong b là ba nửa đường tròn đường kính 2cm nên có độ dài là

$$b = 3.\frac{1}{2}.\pi.2 = 3\pi \text{ (cm)}.$$

Đường cong c là hai nửa đường tròn đường kính 3cm nên có độ dài là :

$$c = 2.\frac{1}{2}.\pi.3 = 3\pi \text{ (cm)}.$$

Vậy ba đường cong có độ dài bằng nhau.



Hình 267

b) (H.268) Đường cong a là nửa đường tròn đường kính 6cm nên có độ dài là

$$a = \frac{1}{2}\pi.6 = 3\pi \text{ (cm)}.$$

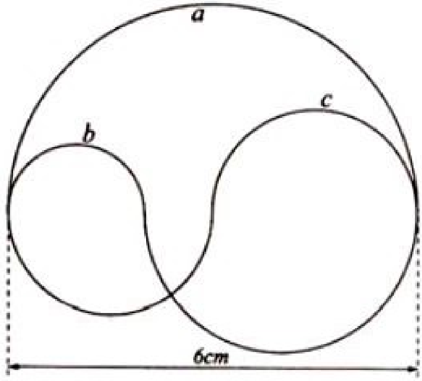
Đường cong b gồm hai nửa đường tròn có đường kính là 2cm, 4cm nên có độ dài là :

$$b = \frac{1}{2}\pi.2 + \frac{1}{2}\pi.4 = 3\pi \text{ (cm)}.$$

Đường cong c là hai nửa đường tròn đường kính 3cm nên c độ dài là :

$$c = 2.\frac{1}{2}.\pi.3 = 3\pi \text{ (cm)}.$$

Vậy ba đường cong có độ dài bằng nhau.



Hình 268

CHỦ ĐỀ 8

44. Muốn tính diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^o người ta lập luận theo ba bước sau :

Bước 1 : Hình quạt tròn bán kính R, cung 360^o có diện tích là πR^2.

Bước 2 : Hình quạt tròn bán kính R, cung 1^o có diện tích là $S_{quạt} = \frac{\pi R^2}{360}$.

Bước 3 : Hình quạt tròn bán kính R, cung n^o có diện tích là

$$S_{quạt} = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

45. Áp dụng công thức $S_{quạt}\ n^o = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$

Với R = 4cm và $n^o = 30^o$ ta có $S_{quạt}\ 30^o = \dfrac{\pi 4^2 30}{360} = \dfrac{4\pi}{3}$ (cm^2).

Với $n = 150^o$ thì $S_{quạt\ 150}{}^o = \dfrac{\pi.4^2.150}{360} = \dfrac{20\pi}{3}$ (cm^2).

46. Gọi bán kính của thiết diện hình tròn đó là R thì chu vi là

$$C = 2\pi.R = 154 \Leftrightarrow R = \frac{154}{2\pi} \approx \frac{49}{2} \text{ (cm)}.$$

Vậy diện tích thiết diện hình tròn đó là :

$$S = \pi R^2 = \pi\left(\frac{49}{2}\right)^2 \approx 1886{,}5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

47. Áp dụng công thức $S = \pi R^2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$ trong đó d là đường kính của hình tròn.

Trong dân gian lưu truyền một quy tắc tìm đường kính khi biết chu vi đường tròn.

"Quân bát, phát tam, tồn ngũ, quân nhị", áp dụng quy tắc này ta được

$$d = \frac{5}{16}.8.1{,}5 = 3{,}75 \text{ (m)}.$$

Vậy $\quad S = \dfrac{\pi.3{,}75^2}{4} \approx 11{,}46\ (m^2)$.

48. Gọi cạnh của hình vuông là a và bán kính của hình tròn là R. Vì hai hình có cùng chu vi nên ta có :

$$4a = 2\pi R \Leftrightarrow a = \frac{\pi R}{2}.$$

Tính diện tích hình vuông và diện tích hình tròn theo R ta được.

$$\frac{S_{hv}}{S_{ht}} = \left(\frac{\pi R}{2}\right)^2.\pi R^2 = \frac{\pi}{4} < 1 \rightarrow S_{hv} < S_{ht}$$

Vậy diện tích hình tròn lớn hơn diện tích hình vuông.

Bạn có biết ?

- Các hình có chu vi bằng nhau gọi là các hình đẳng chu.
- Định lí đẳng chu

1. Trong tất cả các hình phẳng có chu vi bằng nhau thì hình tròn có diện tích lớn nhất.
2. Trong tất cả các hình phẳng có diện tích bằng nhau thì hình tròn có chu vi nhỏ nhất.

49. Tổng số học sinh được biểu diễn bởi một hình quạt trên có góc 180^o.

Hình quạt tròn biểu diễn số học sinh xếp loại học lực trung bình có góc 30^o.

Hình quạt tròn biểu diễn số học sinh xếp loại học lực giỏi có góc 90^o.

Hình quạt tròn biểu diễn số học sinh xếp loại học lực khá có góc là

$$180^o - (30^o + 90^o) = 60^o.$$

a) Tỉ lệ học sinh xếp loại học lực giỏi so với học sinh toàn trường là :

$$\frac{90}{180} = \frac{1}{2}.$$

Vậy a) có câu trả lời là có.

b) Tỉ lệ học sinh xếp loại học lực khá so với học sinh toàn trường là

$$\frac{60}{180} = \frac{1}{3}.$$

Vậy b) có câu trả lời là có.

c) Tỉ lệ phần trăm học sinh xếp loại học lực trung bình là :

$$\frac{30}{180} = 0,1667 = 16,67\%$$

d) Số học sinh giỏi là : $900.\frac{1}{2} = 450$ (học sinh).

Số học sinh khá là : $900.\frac{1}{3} = 300$ (học sinh).

Số học sinh trung bình là : $900.\frac{1}{6} = 150$ (học sinh).

50. Gọi R_1 là bán kính của chiếc bàn tròn thì $R_1 = 38cm$.

R_2 là bán kính của chiếc khăn trải bàn thì $R_2 = 48cm$.

Vậy diện tích vải cần có để làm khăn là

$$S = \pi R_2^{\,2} = \pi\, 48^2 = 2304\pi\ (cm^2).$$

Phần diện tích vải rủ khỏi mép bàn là diện tích hình vành khăn có diện tích là : $S_2 - S_1 = \pi\,(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}) = \pi\,(48-38)\,(48+38) = 860\pi\ (cm^2)$.

51. Gọi bán kính của đường tròn lớn là R thì đường kính của nó là d = 2R.

Diện tích của hình vành khăn tạo bởi 2 đường tròn đó là :

$$S = \pi(R^2 - 4^2) = 20\pi \Leftrightarrow R^2 = 6^2 \Leftrightarrow R = 6\ (cm)\ (\text{vì } R > 0).$$

Vậy đường kính của đường tròn lớn là : d = 12cm.

52. Vì CD nằm trên đường trung trực của dây AB nên $CD \perp AB$ và

$$AD = DB = \frac{AB}{2} = 3cm.$$

Gọi E là giao điểm của CD với đường tròn thì CE là đường kính. Lúc đó tam giác ACE vuông tại A vì tam giác này có cạnh CE là đường kính của đường tròn ngoại tiếp.

Áp dụng hệ thức và đường cao $h^2 = b'c'$ ta được $AD^2 = DC.DE$ hay

$$3^2 = 9.DE \Leftrightarrow DE = 1\ (cm).$$

Suy ra đường kính CE = 9 + 1 = 10 (cm).

Vậy diện tích của cả đường tròn là :

$$S = \pi R^2 = \pi.\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25\pi\ (cm^2).$$

53. Câu trả lời là có.

Đối với hình 230a cần biết 2 dữ kiện là hai bán kính của hai hình tròn.

Đối với hình 230b cần biết ba dữ kiện là hai bán kính và góc ở tâm.

Đối với hai hình 230c, 230d thì chỉ cần một dữ kiện đó là độ dài cạnh hình vuông.

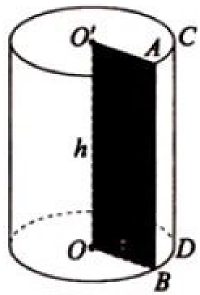
Chương 4

HÌNH TRỤ – HÌNH NÓN – HÌNH CẦU

Chủ đề 1
DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH HÌNH TRỤ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Hình trụ



Hình 269

Khi quay hình chữ nhật OO'AB một vòng quanh cạnh OO' cố định, ta được một hình trụ (H.269). Khi đó :

– OO' gọi là trục của hình trụ.

– O'A và OB quét nên hai đáy của hình trụ, là hai hình tròn bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song, có tâm là O' và O.

– Cạnh AB quét nên mặt xung quanh của hình trụ, mỗi vị trí của AB được gọi là một đường sinh. Chẳng hạn, CD là một đường sinh.

– Các đường sinh của hình trụ vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài đường sinh là chiều cao của hình trụ.

II. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ

– $S_{xq} = 2\pi Rh$.

– $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$ (R là bán kính đáy, h là chiều cao).

III. Thể tích hình trụ

$V = \pi R^2 h$ (R là bán kính đáy, h là chiều cao) = S.h (S là diện tích đáy).

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÍNH DIỆN TÍCH XUNG QUANH – DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN, THỂ TÍCH HÌNH TRỤ HOẶC CÁC YẾU TỐ LIÊN QUAN

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định công thức.

2. Tìm R và h.

3. Thay giá trị và tính.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hãy tính :

a) Diện tích xung quanh của một hình trụ có chu vi đường tròn đáy là 13cm và chiều cao là 3cm.

b) Thể tích của hình trụ có bán kính hình tròn đáy là 5mm và chiều cao là 8mm.

Giải

a) Áp dụng công thức $S_{xq} = 2\pi Rh$.

Vì chu vi đường tròn đáy là $13cm = 2\pi R$ và chiều cao là $h = 3cm$.

Vậy $S_{xq} = 13.3 = 39\ (cm^2)$.

b) Áp dụng công thức $V = \pi R^2 h$.

Vì $R = 5mm$, $h = 8mm$. Vậy $V = \pi.5^2.8 = 200\pi\ (mm^3)$.

Ví dụ 2. Chiều cao của một hình trụ bằng bán kính đáy. Diện tích xung quanh của hình trụ là $314cm^2$. Hãy tính bán kính đáy và thể tích hình trụ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Giải

Áp dụng công thức $S_{xq} = 2\pi Rh$.

Do $R = h$ và $S_{xq} = 314cm^2$ nên ta có : $2\pi R^2 = 314$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{314}{2.3,14} = (\sqrt{50})^2 \Leftrightarrow R = 7,07\ (cm).$$

Thể tích của hình trụ là : $V = \pi R^3 = \pi(\sqrt{50})^3 \approx 1110,16\ (cm^3)$.

Ví dụ 3. Cho hình chữ nhật ABCD (AB = 2a, BC = a). Quay hình chữ nhật đó quanh AB thì được hình trụ có thể tích V_1, quanh BC thì được hình trụ có thể tích V_2. Hỏi V_2 gấp mấy lần V_1.

Giải

Khi quay hình chữ nhật ABCD quanh AB ta được một hình trụ có chiều cao $h_1 = AB = 2a$, bán kính đáy $R_1 = BC = a$.

Thể tích của hình trụ đó là : $V_1 = \pi a^2.2a = 2\pi a^3$.

Khi quay hình chữ nhật ABCD quanh BC ta được một hình trụ có chiều cao $h_2 = BC = a$, bán kính đáy $R_2 = AB = 2a$.

Thể tích hình trụ đó là $V_2 = \pi\,(2a)^2.a = 2\,(2\pi a^3) = 2V_1$.

Vậy $V_2 = 2V_1$.

Ví dụ 4. Bài toán Ác-si-mét.

Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thuỷ tinh có nước dạng hình trụ. Diện tích đáy lọ thuỷ tinh là $12{,}8cm^2$. Nước trong lọ dâng lên thêm 8,5mm. Hỏi thể tích của tượng đá là bao nhiêu ?

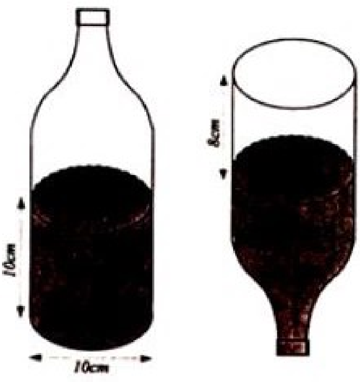
Giải

Thể tích tượng đá đó đúng bằng thể tích khối nước dâng lên trong lọ. Thể tích đó được tính bằng công thức V = Sh.

Vì $S = 12{,}8cm^2$ và chiều cao h = 8,5mm = 0,85cm.

Vậy $V = 12{,}8.\ 0{,}85 = 10{,}88\ (cm^3)$.

Ví dụ 5. Một cái chai phía dưới là hình trụ chứa lượng nước có chiều cao 10cm (H.270a). Người ta lật ngược chai lại thì phần chai không chứa nước là một hình trụ có chiều cao 8cm (H.270b). Tính thể tích của chai, biết rằng đường kính của đáy chai bằng 10cm.



a) b)

Hình 270

Giải

Thể tích của chai bằng tổng các thể tích của khối nước hình trụ ở (hình 270a) và phần chai không chứa nước ở (hình 270b).

Vậy $V = \pi.5^2.10 + \pi.5^2.8 = 450\pi \approx 1413\ (cm^3)$.

III. BÀI TẬP

1. Diện tích và chu vi của một hình chữ nhật ABCD (AB > AD) theo thứ tự là : $3a^2$ và 8a. Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB một vòng ta được một hình trụ. Tính thể tích, diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ này.
2. Một hình chữ nhật có chiều dài gấp 4 lần chiều rộng và có diện tích là $28cm^2$. Cho hình chữ nhật quay quanh chiều dài một vòng ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ.
3. Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ biết thể tích của nó là $128\pi cm^3$.
4. Một hình trụ có bán kính đáy là 4cm. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao của hình trụ.
5. Một hình trụ có diện tích xung quanh là $20\pi cm^2$ và diện tích toàn phần là $28\pi cm^3$. Tính thể tích của hình trụ.

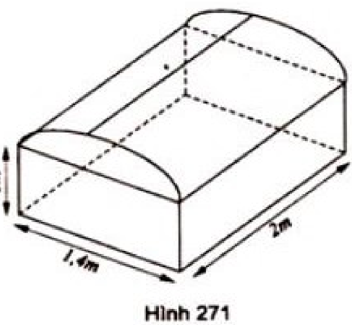
Dạng 2
TÍNH DIỆN TÍCH XUNG QUANH, THỂ TÍCH CỦA MỘT HÌNH HỖN HỢP GỒM NHIỀU HÌNH

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Tính diện tích xung quanh hoặc thể tích của từng bộ phận rồi cộng lại hoặc trừ đi.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Một cái hầm bi-ô-ga như (H.271). Phần trên là nửa hình trụ, phần dưới là một hình hộp chữ nhật với các kích thước cho trên hình vẽ. Tính thể tích hầm bi-ô-ga (lấy $\pi = \frac{22}{7}$).



Hình 271

Giải

– Thể tích của nửa hình được tính theo công thức :

$$V_1 = \frac{1}{2}\pi R^2 h \text{ với } R = 1,4 : 2 = 0,7 \text{ (m) và } h = 2\text{m}.$$

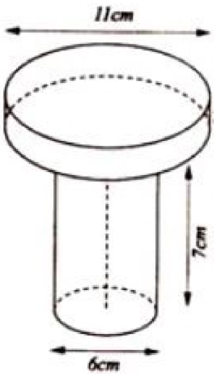
Nên $V_1 = \frac{1}{2}.\frac{22}{7}.0,7^2.2 = 1,54$ (m^3).

– Thể tích của hình hộp chữ nhật là : $V_2 = 1.1,4.2 = 2,8$ (cm^3).

Vậy thể tích của hầm bi-ô-ga

$$V = V_1 + V_2 = 1,54 + 2,8 = 4,34 \ (m^3).$$

Ví dụ 2. Hãy tính thể tích, diện tích bề mặt một chi tiết máy theo kích thước đã cho trên (H.272).



Hình 272

Giải

Chi tiết máy gồm hai hình trụ, một hình trụ có bán kính đáy $R_1 = 5,5$cm, chiều cao $h_1 = 2$cm nên có thể tích là : $V_1 = \pi.5,5.2$.

Và một hình trụ có bán kính đáy $R_2 = 3$cm, chiều cao $h_2 = 7$cm nên có thể tích là $V_2 = \pi.3^2.7$.

Thể tích của chi tiết máy này là :

$V = V_1 + V_2 = \pi.5,5^2.2 + \pi.3^2.7 = 123,5\pi \approx 388$ (cm^3).

Diện tích xung quanh của hai hình trụ là :

$$S_1 = \pi.11.2 + \pi.6.7 = 64\pi \ (cm^2).$$

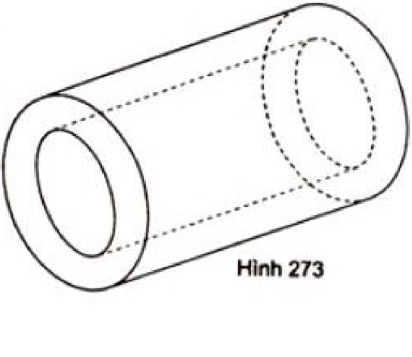
Tổng diện tích các mặt ngoài còn lại là :

$$S_2 = \pi.5,5^2 + \pi(5,5^2 - 3^2) + \pi.3^2 = 60,5\pi \ (cm^2).$$

Vậy diện tích bề mặt của chi tiết máy này là :

$$S = 64\pi + 60,5\pi = 124,5\pi \approx 391 \ (cm^2).$$

Ví dụ 3. Một vật thể có dạng hình trụ, bán kính đáy và chiều cao đều bằng 2R. Người ta khoan một lỗ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng 2R. Tính thể tích phần vật thể còn lại (H.273).


Hình 273

Giải

Thể tích vật thể hình trụ là :

$$V_1 = \pi.(2R)^2.2R = 8\pi R^3.$$

Thể tích lỗ khoan hình trụ là :

$$V_2 = \pi.R^2.2R = 2\pi R^3.$$

Thể tích phần vật thể còn lại là :

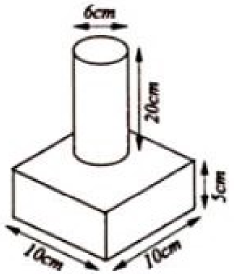
$$V = V_1 - V_2 = 8\pi R^3 - 2\pi R^3 = 6\pi R^3.$$

III. BÀI TẬP

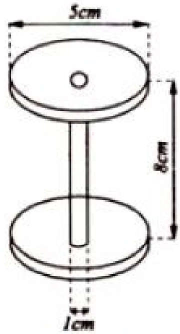
6. Một chi tiết máy có dạng hình hộp chữ nhật có các kích thước là 20cm, 20cm, 5cm. Người ta khoan một lỗ hình trụ có đường kính đáy 16cm và chiều cao 5cm xuyên qua chi tiết đó. Tính thể tích phần vật thể còn lại.

7. Một chi tiết máy có dạng hình trụ có đường kính đáy 25cm, chiều cao 5cm. Người ta khoét một hình hộp chữ nhật có kích thước là 16cm, 16cm, 5cm xuyên qua chi tiết đó. Tính thể tích phần vật thể còn lại.

8. Một chi tiết máy có các kích thước như hình vẽ. Hãy tính thể tích và diện tích bề mặt của chi tiết đó (H.274).



Hình 274



Hình 275

9. Lõi của một cuộn chỉ có kích thước như trên (H.275). Tính thể tích của chỉ sau khi chỉ được cuộn đầy vào lõi (làm tròn đến số thập phân thứ 2).

Chủ đề 2

DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT

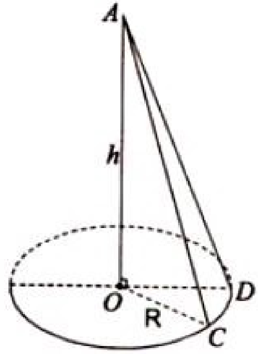
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Hình nón

Khi quay tam giác vuông AOC một vòng quanh cạnh góc vuông AO cố định thì được một hình nón (H.276). Khi đó :

– Cạnh OC quét nên đáy của hình nón là một hình tròn tâm O. A gọi là đỉnh là AO gọi là đường cao của hình nón.

– Cạnh AC quét nên mặt xung quanh của hình nón, mỗi vị trí của AC được gọi là một đường sinh. Chẳng hạn AD là một đường sinh.



Hình 276

II. Diện tích xung quanh của hình nón

$$S_{xq} = \pi R l$$

$$S_{tp} = \pi R l + \pi R^2$$

(R là bán kính đáy, l là đường sinh).

III. Thể tích của hình nón

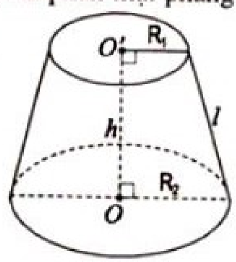
$$V_{nón} = \frac{1}{3}\pi R^2 h \text{ (h là chiều cao).}$$

IV. Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và đáy được gọi là hình nón cụt (H. 277).

$$S_{xq} = \pi(R_1 + R_2).l$$

$$V_{nón\ cụt} = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)$$



Hình 277

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÍNH SỐ ĐO CUNG HOẶC BÁN KÍNH HÌNH QUẠT TRÒN HOẶC NỬA GÓC Ở ĐỈNH CỦA HÌNH NÓN

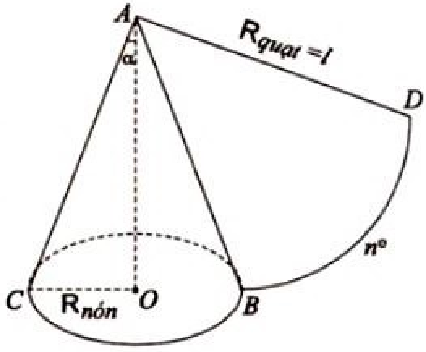
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Vẽ hình minh hoạ như H.278.

2. Tính độ dài cung BD của hình quạt theo công thức $C_{đáy} = 2\pi R_{nón}$.

3. Tính số đo cung (hoặc góc ở tâm) n^o theo công thức :

$$C_{đáy} = 2\pi R_{nón} = \frac{\pi R_{quạt}.n}{180}.$$



Hình 278

4. $R_{quạt} = l$ là đường sinh của nón.

5. Tính nửa góc ở đỉnh α phải xác định cạnh kề, cạnh đối của tam giác vuông chứa α.

II. VÍ DỤ

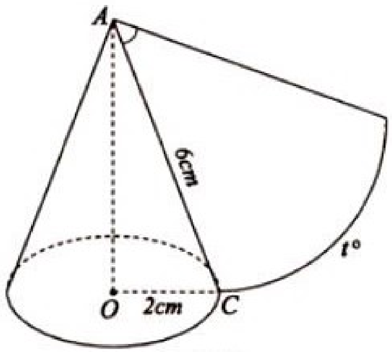
Ví dụ 1. Tính số đo cung của quạt tròn như hình vẽ (H.279).

Giải

Áp dụng công thức : $2\pi R_{nón} = \dfrac{\pi R_{quạt}.x}{180}$

Mà $R_{nón} = 2cm$, $R_{quạt} = 6cm$ là đường sinh của nón nên :

$$2 \times 2 = \frac{6.x}{180} \Leftrightarrow x = 120.$$



Hình 279

Vậy số đo cung của quạt tròn là 120^o.

Ví dụ 2. Khi quay tam giác vuông để tạo ra một hình nón như ở hình 276 thì góc CAO = α gọi là nửa góc ở đỉnh của hình nón, độ dài đường sinh là a. Tính số đo cung của hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón.

Giải

Áp dụng công thức $2\pi R_{nón} = \dfrac{\pi R_{quạt}.n}{180} \Leftrightarrow n = \dfrac{360.R_{nón}}{R_{quạt}}$.

Vì $R_{quạt} = l = a$, $R_{nón}$ đối diện với góc 30^o trong tam giác AOC vuông tại C. Có cạnh huyền là a nên $R_{nón} = \dfrac{a}{2}$.

Do đó : $\dfrac{360.a}{2.a} = 180$.

Vậy số đo cung của hình quạt là : 180^o.

Ví dụ 3. Hình khai triển mặt xung quanh của một hình nón là một hình quạt biết $R_{quạt} = 16cm$, số đo cung là 120^o. Tính tang của nửa góc ở đỉnh của hình nón.

Giải

Trên H.278, vì $R_{nón}$ đối diện với nửa góc ở đỉnh α của tam giác vuông AOC nên :

$$\tan\alpha = \frac{R_{nón}}{AO}.$$

Áp dụng công thức : $2\pi R_{nón} = \dfrac{\pi R_{quạt}.n}{180}$.

Ta được $R_{nón} = \dfrac{R_{quạt}.n}{360} = \dfrac{16.120}{360} = \dfrac{16}{3}$.

Lại có $AC = l = R_{quạt} = 16$.

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác AOC vuông tại O, thu được

$$AC^2 = CO^2 + OA^2 \text{ hay } 16^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + OA^2$$

$$\Leftrightarrow OA^2 = \left(\frac{32\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

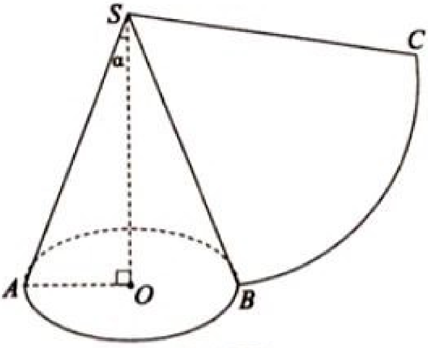
$$\Leftrightarrow OA = \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ (vì } AO > 0).$$

Vậy $\quad \tan\alpha = \dfrac{16}{3} : \dfrac{32\sqrt{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

III. BÀI TẬP

10. Một hình nón có bán kính đáy 7cm, chiều cao 24cm. Sau khi khai triển mặt xung quanh, ta được một hình quạt. Tính số đo cung hình quạt này.

11. Viết công thức tính nửa góc ở đỉnh của một hình nón (α là góc của tam giác vuông SOA (H.280)) sao cho diện tích mặt khai triển của mặt nón bằng một phần tư diện tích hình tròn bán kính SA.



Hình 280

Dạng 2
TÍNH DIỆN TÍCH XUNG QUANH, THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, NÓN CỤT VÀ CÁC ĐẠI LƯỢNG CÓ LIÊN QUAN NẾU BIẾT HAI TRONG BA YẾU TỐ : BÁN KÍNH ĐÁY, CHIỀU CAO, ĐƯỜNG SINH

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

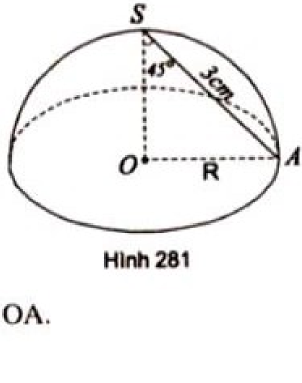
1. Xác định công thức.

2. Tìm yếu tố còn lại nhờ hệ thức lượng trong tam giác vuông.

3. Thay giá trị rồi tính.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính diện tích xung quanh và thể tích của một hình nón khi quay tam giác vuông cân SOA có cạnh huyền SA = 3cm quanh cạnh góc vuông SO cố định.



Hình 281

Giải (H.281)

• Áp dụng công thức $S_{xq} = \pi R l$.

Vì đường sinh l = SA = 3cm. Ta còn phải tính R = OA.

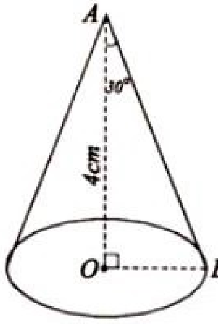
Vì tam giác SOA vuông cân tại O nên góc S bằng 45^o và OA đối diện với góc 45^o, do đó $\sin45^o = \dfrac{OA}{SA}$.

Hay $\quad OA = SA.\sin45^o = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (cm).

Vậy $\quad S_{xq} = \pi.\dfrac{3\sqrt{2}}{2}.3 = \dfrac{9\pi\sqrt{2}}{2}$ (cm^2)

Lại có chiều cao $h = SO = OA = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm nên thể tích của hình nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\pi\sqrt{2}}{4}\ (cm^3).$$



Hình 282

Ví dụ 2. Tính diện tích xung quanh và thể tích của một hình nón khi quay tam giác vuông AOB có $\widehat{OAB} = 30^o$ quanh cạnh góc vuông AO = 4cm.

Giải (H.282)

– Áp dụng công thức $S_{xq} = \pi Rl$.

Ta có : R = OB và đường sinh l = AB.

Vì R đối diện với góc 30^o và AO = 4cm kề với góc 30^o nên

$$\tan30^o = \frac{R}{OA} \Leftrightarrow R = OA.\tan30^o = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ (cm).$$

$$\sin30^o = \frac{R}{l} \Leftrightarrow l = \frac{R}{\sin 30^o} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\times 2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\ (cm).$$

Vậy $\quad S_{xq} = \pi.\dfrac{4\sqrt{3}}{3}.\dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{32\pi}{3}$ (cm^2).

Do hình nón có chiều cao h = OA = 4cm nên thể tích của hình nón là :

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2.4 = \frac{64\pi}{9}\ (cm^3).$$

Ví dụ 3*. Một hình nón cụt có các bán kính đáy là 6cm và 9cm chiều cao bằng 4cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt.

b) Tính thể tích của hình nón sinh ra hình nón cụt đó.

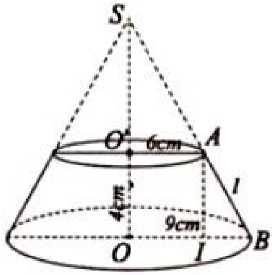
Giải (H.283)

a) Áp dụng công thức $S_{xq} = \pi(R_1 + R_2)l$.

Với $R_1 = 6cm$, $R_2 = 9cm$ và $l = AB$.

Kẻ $AI \perp OB$ thì tứ giác OO'AI có ba góc vuông nên là hình chữ nhật, do đó

$$AI = OO' = 4cm \text{ và } IB = 9 - 6 = 3 \text{ (cm)}.$$



Hình 283

Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho tam giác AIB vuông tại I ta được :

$$AB^2 = BI^2 + IA^2 \text{ hay } AB^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow AB = 5 \text{ (cm)}$$

Vậy $S_{xq} = \pi(6 + 9).5 = 75\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

b) Áp dụng công thức : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ trong đó : $R = 9cm$ và chiều cao $h = SO$.

Gọi $SO' = xcm$ $(x > 0)$ thì $h = x + 4$.

Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét cho O'A // OB thu được

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A}{OB} \text{ hay } \frac{x}{x+4} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra $\frac{x}{2} = \frac{x+4}{3} = \frac{x+4-x}{3-2} = 4 \Leftrightarrow x = 8$ nên $h = 12$ (cm).

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi.9^2.12 = 324\pi \text{ (cm}^3\text{)}$.

III. BÀI TẬP

12. Một hình nón có bán kính đáy bằng 5cm và diện tích xung quanh là $65\pi cm^2$. Tính thể tích của hình nón đó.

13. Một hình nón có đường sinh dài 17cm và diện tích xung quanh là $136\pi cm^2$.

a) Tính chiều cao của hình nón đó.

b) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón.

14. Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước có các bán kính đáy là 14cm và 9cm, chiều cao là 23cm.

a) Tính dung tích của xô.

b) Tính diện tích tôn để làm xô (coi như diện tích các mép gấp không đáng kể).

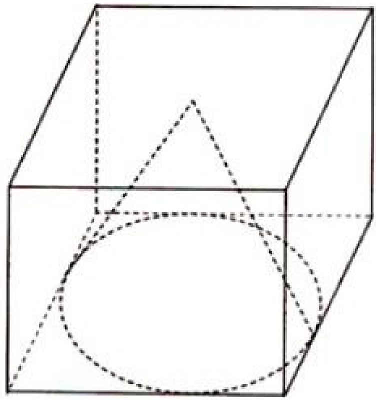
DẠNG 3
TÍNH DIỆN TÍCH XUNG QUANH, THỂ TÍCH CỦA MỘT HÌNH HỖN HỢP, GỒM NHIỀU HÌNH

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Tính diện tích xung quanh hoặc thể tích của từng bộ phận rồi cộng lại hoặc trừ đi.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Từ một khối gỗ hình lập phương có cạnh bằng 1, người thợ tiện có thể tiện ra một hình nón như hình 284. Hãy tính thể tích của hình nón và cho biết người thợ tiện đó loại bỏ bao nhiêu vật liệu.



Hình 284

Giải

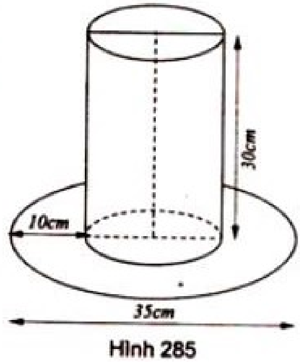
Áp dụng công thức

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2.1 = \frac{\pi}{12} \text{ (đvtt).}$$

Số vật liệu mà người thợ tiện loại bỏ là hiệu giữa thể tích của khối lập phương và thể tích của khối nón.

Vậy số vật liệu bị loại bỏ là $1 - \frac{\pi}{12} = \frac{12 - \pi}{12}$ (đvtt).

Ví dụ 2. Cái mũ bằng vải dạ của nhà ảo thuật với các kích thước như hình 285. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ (không kể viền, mép, phần thừa).



Hình 285

Giải

Cái mũ gồm hai bộ phận :

– Bộ phận hình trụ với chiều cao h = 30cm, bán kính đáy

$$R = \frac{35 - 2.10}{2} = 7,5 \text{ (cm).}$$

– Bộ phận vành mũ (hình vành khăn) với đường kính ngoài

$$R = \frac{35}{2} = 17{,}5\text{cm}.$$

Diện tích vải cần dùng gồm diện tích xung quanh của hình trụ và diện tích hình tròn vành mũ (diện tích đỉnh mũ bù vào phần khoét thủng của vành mũ).

Ta có $S = S_{xq\ trụ} + S_{tròn} = 2\pi rh + \pi R^2$

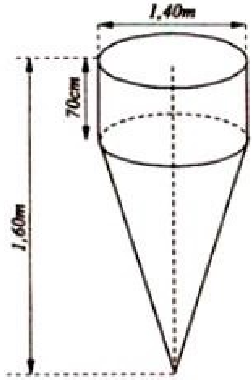
$= 2\pi.7{,}5.30 + \pi\,(17{,}5)^2$

$= 756{,}25\ (\text{cm}^2).$

Ví dụ 3. Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón. Các kích thước cho trên hình 286. Hãy tính :

a) Thể tích của dụng cụ này.

b) Diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính nắp đậy).



Hình 286

Giải

Dụng cụ này gồm hai bộ phận :

– Bộ phận hình trụ có bán kính đáy R = 70cm, chiều cao h = 70cm.

– Bộ phận hình nón có R = 70cm, h = 90cm và đường sinh $l = \sqrt{70^2 + 90^2}$ $= 10\sqrt{130}$ (cm).

a) Thể tích của dụng cụ này bằng tổng thể tích của hình trụ và hình nón :

$$V = \pi.70^2.70 + \frac{1}{3}\pi.70^2.90 = 490000\pi\ (\text{cm}^3) = 0{,}49\ (\text{m}^3).$$

b) Diện tích mặt ngoài là tổng diện tích xung quanh của hình trụ và diện tích xung quanh của hình nón :

$$S = 2\pi.70.70 + \pi.70.10\sqrt{130} \approx 558{,}33\ (\text{cm}^2) \approx 5{,}58\ (\text{m}^2).$$

Ví dụ 4. Một hình trụ và một hình nón có chung đáy, đường cao của chúng bằng nhau (H.287). Tìm mối liên hệ giữa bán kính đáy và đường cao của hình trụ để diện tích xung quanh của hai hình bằng nhau.

Giải

Gọi r, h là bán kính đáy và đường cao chung của hình trụ và hình nón ; l là đường sinh của hình nón.

Ta có $S_{xq\ trụ} = 2\pi rh$; $S_{nón} = \pi rl$.

Diện tích xung quanh của hai hình bằng nhau khi và chỉ khi

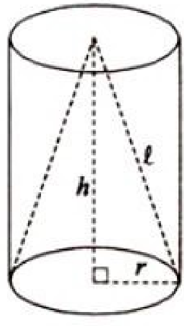
$$2\pi rh = \pi rl$$

$$\Leftrightarrow 2h = l$$

$$\Leftrightarrow 2h = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$\Leftrightarrow 4h^2 = h^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow 3h^2 = r^2 \Leftrightarrow r = h\sqrt{3}.$$



Hình 287

III. BÀI TẬP

15. Từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy là 6cm và chiều cao 14cm người ta tiện thành một hình nón có chiều cao bằng chiều cao của hình trụ và bán kính đáy là 6cm. Hỏi thể tích phần gỗ tiện bỏ đi là bao nhiêu ?

16. Cho tam giác ABC có BC = 6cm, chiều cao tương ứng bằng 4cm. Tính thể tích của hình tạo thành khi quay tam giác một vòng quanh cạnh BC.

17. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có AB = AD = a, CD = 2a. Quay hình thang vuông một vòng quanh cạnh AD, ta được một hình có thể tích V_1. Quay hình thang vuông một vòng quanh cạnh CD, ta được một hình có thể tích V_2. Tính tỉ số $V_1 : V_2$.

18. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$) có cạnh BC = 10cm và AB = 8cm. Tính thể tích toàn phần của hình tạo thành khi quay tam giác một vòng quanh cạnh BC.

19. Cho hình bình hành ABCD với AB = 2, AD = x (x > 0) và $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

a) Tính diện tích toàn phần S của hình tạo thành khi quay hình bình hành ABCD đúng một vòng quanh cạnh AB và diện tích toàn phần S_1 của hình tạo thành khi quay quanh cạnh AD.

b) Xác định giá trị x khi $S = S_1$.

Chủ đề 3

DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

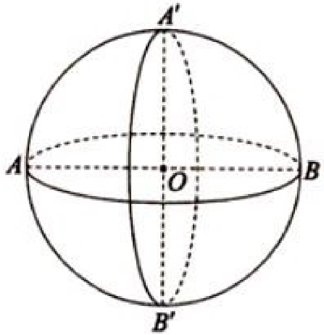
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Hình cầu

Khi quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quay đường kính AB cố định thì được một hình cầu (H.288).

– Nửa đường tròn trong phép quay nói trên quét nên mặt cầu.

– Điểm O được gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu, mặt cầu đó.



Hình 288

II. Cắt hình cầu bởi một mặt phẳng

1. Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng ta được một hình tròn.

2. Khi cắt mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng ta được một đường tròn.

– Đường tròn có bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm (gọi là đường tròn lớn).

– Đường tròn đó có bán kính r bé hơn R nếu mặt phẳng không đi qua tâm.

III. Diện tích mặt cầu

$S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$ (R là bán kính, d là đường kính của mặt cầu).

IV. Thể tích hình cầu

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1
TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CẦU, THỂ TÍCH HÌNH CẦU KHI BIẾT BÁN KÍNH CỦA HÌNH CẦU HOẶC NGƯỢC LẠI, TÍNH BÁN KÍNH HÌNH CẦU KHI BIẾT THỂ TÍCH HOẶC DIỆN TÍCH CỦA NÓ

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Xác định công thức tính V, S_{xq} theo R.

2. Tìm R từ các công thức V, S_{xq}.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Nếu thể tích của một hình cầu là $113\frac{1}{7}\,cm^3$ thì bán kính của nó bằng bao nhiêu ? (lấy $\pi = \frac{22}{7}$).

Giải

Áp dụng công thức : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, với $V = 113\frac{1}{7} = \frac{792}{7}\,cm^3$, $\pi = \frac{22}{7}$.

Ta có $\frac{792}{7} = \frac{4}{3}.\frac{22}{7}.R^3 \Leftrightarrow R^3 = 3^3 \Leftrightarrow R = 3cm$.

Ví dụ 2. Một khinh khí cầu là hình cầu có đường kính 11m. Hãy tính diện tích mặt khinh khí cầu đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Giải

Áp dụng công thức $S = \pi d^2$ mà d = 11m.

Vậy $S = \pi.11^2 = 121\pi\ (cm^3) \approx 380\ m^2$.

Ví dụ 3. Các loại bóng cho trong bảng đều có dạng hình cầu. Hãy điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Loại bóng	*Quả bóng gôn*	*Quả khúc côn cầu*	*Quả tennit*	*Quả bóng bàn*	*Quả bi a*
Đường kính	42,7mm		6,5cm	40mm	61mm
Độ dài đường tròn lớn		23cm			
Diện tích					
Thể tích					

Trả lời : Cột 1 : 134,08mm ; $5725,13mm^2$; $40743,85mm^3$.

Cột 2 : 7,32cm ; $168.25cm^2$; $205,26cm^3$.

Cột 3 : 20,41cm ; $132,67cm^2$, $143,72cm^3$.

Cột 4 : 125,60mm ; $5024mm^2$; $33493,33mm^3$.

Cột 5 : 191,54mm ; $1168,94mm^2$; $118786,72mm^3$.

III. BÀI TẬP

20. Một hình cầu có số đo diện tích (tính bằng cm^2) đúng bằng hai lần số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính của hình cầu là thể tích của nó.

21. Một hình cầu có diện tích bề mặt là $120\pi m^2$. Tính thể tích của hình cầu đó.

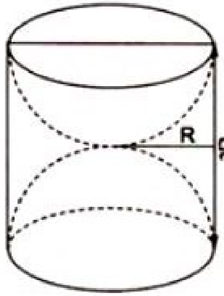
Dạng 2
TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA MỘT HÌNH HỖN HỢP, GỒM NHIỀU HÌNH

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Tính diện tích, thể tích của từng bộ phận rồi cộng lại hoặc trừ đi.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Một khối gỗ dạng hình trụ, bán kính đáy là R chiều cao 2R (đơn vị :cm). Người ta khoét rỗng hai nửa hình cầu như H.289. Hãy tính diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại (diện tích cả ngoài lẫn trong).



Hình 289

Giải

Diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại bao gồm :

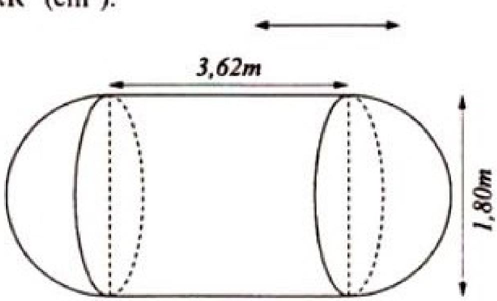
– Diện tích ngoài là diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao h = 2R có diện tích $S_1 = 2\pi.R2R$.

– Diện tích trong là diện tích hai nửa mặt cầu bán kính R.

Vậy diện tích cần tìm là :

$$S = 2\pi R.2R + 4\pi R^2 = 8\pi R^2\ (cm^2).$$

Ví dụ 2. Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (H.290). Hãy tính thể tích của bồn chứa theo kích thước cho trên hình vẽ.



Hình 290

Giải

Thể tích của bồn chứa xăng gồm thể tích của hai nửa hình cầu có bán kính 0,9m nên có thể tích $V_1 = \frac{4}{3}\pi.0,9^3$ và thể tích của một hình trụ có bán kính đáy R = 0,9m và chiều cao h = 3,62m nên có thể tích

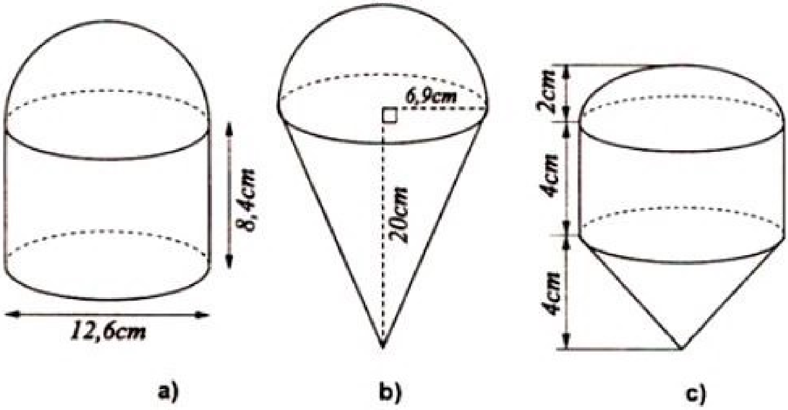
$$V_2 = \pi\,(0,9)^2.3,62.$$

Vậy thể tích của bồn chứa là :

$$V = V_1 + V_2 = \pi.0,9^2.3,62 + \frac{4}{3}\pi.0,9^3 \approx 12,26\ (m^3).$$

Ví dụ 3. Hãy tính thể tích các hình dưới đây theo kích thước đã cho (đơn vị cm).

Giải



Hình 291

a) (H.291a) Hình cần tính thể tích gồm :

– Một hình trụ có bán kính đáy R = 6,3cm, chiều cao h = 8,4cm nên có thể tích

$$V_1 = \pi 6,3^2.8,4 = 333,396\pi\ (cm^3).$$

– Một nửa hình cầu bán kính R = 6,3cm nên có thể tích là

$$V_2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.6,3^3 = 166,698\pi\ (cm^3).$$

Vậy thể tích của hình cần tính là $V = V_1 + V_2 = 500,094\pi\ (cm^3)$.

b) (H.291b) Thể tích hình cần tính gồm :

– Một nửa hình cầu bán kính R = 6,9cm nên có thể tích là :

$$V_1 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.6,9^3 = 219,006\pi\ (cm^3).$$

– Một hình nón có bán kính đáy R = 6,9cm, chiều cao h = 20cm nên có thể tích là

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi.6,9^2.20 = 317,4\pi\ (cm^3).$$

Vậy thể tích của hình cần tính là :

$$V = V_1 + V_2 = 536,406\pi\ (cm^3).$$

c) (H. 291c) Hình cần tính thể tích gồm :

– Một nửa hình cầu bán kính R = 2cm nên có thể tính là :

$$V_1 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.2^3 = \frac{16\pi}{3}\ (cm^3),$$

– Một hình trụ có bán kính R = 2cm; chiều cao h = 4cm nên có thể tích là

$$V_2 = \pi.2^2.4 = 16\pi\ (cm^3).$$

– Một hình nón có bán kính đáy R = 2cm, chiều cao h = 4cm nên có thể tích là

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi 2^2.4 = \frac{16\pi}{3}\ (cm^3).$$

Vậy thể tích của hình cần tính là :

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{64\pi}{3}\ (cm^3).$$

III. BÀI TẬP

22. Một bồn chứa xăng dầu có phần dưới là một hình trụ với chiều cao bằng đường kính đáy và phần trên là nửa hình cầu có đường kính bằng đường kính hình trụ. Biết diện tích bề mặt của bồn chứa là $445m^2$. Tính thể tích của nó.

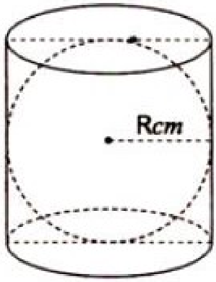
23. Một đồ chơi gồm một hình nón gắn với nửa hình cầu. Biết thể tích hình nón gấp đôi thể tích nửa hình cầu. Tính tỉ số đường cao và bán kính đáy của hình nón.

24. Hình 292 mô tả một hình cầu được đặt khít vào trong một hình trụ, các kích thước cho trên hình vẽ.

Hãy tính :

a) Thể tích hình cầu.

b) Thể tích hình trụ.



Hình 292

c) Hiệu giữa thể tích hình trụ và hình cầu.

d) Thể tích của một hình nón có bán kính đáy là Rcm và chiều cao 2Rcm.

e) Từ các kết quả a), b), c), d) hãy tìm mối liên hệ giữa chúng.

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

CHỦ ĐỀ 1

1. Gọi AB = x, AD = y (x > y) thì :

$$\begin{cases} x + y = 4a \\ xy = 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4a - y \\ y^2 - 4ay + 3a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4a - y \\ (y-a)(y-3a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4a - y \\ \left[\begin{array}{l} y = a \\ y = 3a \end{array}\right. \end{cases}$$

Do x > y nên x = 3a, y = a.

Khi quay hình chữ nhật quanh cạnh AB ta được hình trụ có bán kính đáy R = a và chiều cao h = 3a.

Vậy $S_{xq} = 2\pi a.3a = 6\pi a^2$ (đvdt)

$V = \pi.a^2.3a = 3\pi a^3$ (đvtt)

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 6\pi a^2 + 2\pi a^2 = 8\pi a^2$ (đvdt).

2. Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là x (cm) (x > 0) thì chiều dài của hình chữ nhật là 4x.

Lúc đó diện tích của hình chữ nhật là $4x^2 = 28 \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ (vì x > 0).

Khi quay hình chữ nhật quanh chiều dài một vòng ta được một hình trụ có chiều cao là h = $4\sqrt{7}$ cm, bán kính đáy là $\sqrt{7}$ cm.

Vậy $S_{xq} = 2\pi.\sqrt{7}.4\sqrt{7} = 56\pi$ (cm^2)

$V = \pi(\sqrt{7})^2.4\sqrt{7} = 28\pi\sqrt{7}$ (cm^3).

3. Áp dụng công thức : $V = \pi R^2 h$.

Do h = 2R và V = 128π nên ta có phương trình ẩn R

$2R^3.\pi = 128\pi \Leftrightarrow R^3 = 4^3 \Leftrightarrow R = 4$ (cm).

Nên $S_{xq} = 2\pi.4.2.4 = 64\pi$ (cm^2)

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 64\pi + 2\pi.4^2 = 96\pi$ (cm^2).

4. Vì hình trụ có $S_{tp} = 2S_{xq}$ hay $2S_{xq} = S_{xq} + 2S_{đáy}$ nên $S_{xq} = 2S_{đáy}$.

Do đó : $2\pi Rh = 2.\pi R^2 \leftrightarrow R = h$.

Mà R = 4cm. Vậy h = 4cm.

5. Vì $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$ nên $28\pi = 20\pi + 2.\pi R^2$

$$\Leftrightarrow R^2 = 2^2 \Leftrightarrow R = 2 \text{ (cm)}.$$

Mặt khác. $S_{xq} = 2\pi.2.h = 20\pi \leftrightarrow h = 5$ (cm).

Vậy $V = \pi.2^2.5 = 20\pi$ (cm^3).

6. Thể tích của hình hộp chữ nhật là $V_1 = 20.20.5 = 2000$ (cm^3).

Thể tích của lỗ khoan hình trụ là $V_2 = \pi.8^2.5 = 320\pi$ (cm^3).

Thể tích phần vật thể còn lại là :

$$V = V_1 - V_2 = 2000 - 320\pi \approx 1300{,}2 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

7. Thể tích của vật thể hình trụ là

$$V_1 = \pi.\left(\frac{25}{2}\right)^2.5 = 781{,}25\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích của hình hộp chữ nhật là :

$$V_2 = 16.16.5 = 1280 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích phần vật thể còn lại là :

$V = V_1 - V_2 = 781{,}25\pi - 1280 \approx 1173{,}13$ (cm^3).

8. (H.274) Chi tiết máy gồm hai hình :

– Hình trụ có bán kính đáy R = 3cm, chiều cao h = 20cm nên có thể tích

$$V_1 = \pi.3^2.20 = 180\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

– Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 10cm, 10cm, 5cm nên có thể tích

$$V_2 = 10.10.5 = 500 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vậy thể tích của chi tiết máy này là :

$$V = V_1 + V_2 = 180\pi + 500 \approx 1065{,}2 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

– Diện tích xung quanh của hình trụ là :

$$S_1 = 2\pi.3.20 = 120\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

– Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật là

$$S_2 = 2\,(10 + 10).5 = 200 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

– Tổng diện tích các mặt ngoài còn lại là

$$S_3 = \pi.3^2 + 2.10^2 - \pi.3^2 = 200\ (cm^2).$$

Vậy diện tích bề mặt của chi tiết máy là :

$$S = 120\pi + 200 + 200 \approx 776,8\ (cm^2).$$

9. (H.275) Thể tích của chỉ sau khi được cuộn đầy là hiệu hai thể tích của hai hình trụ.

Hình trụ thứ nhất có bán kính đáy là $R_1 = 2,5cm$, chiều cao là 8cm nên có thể tích $V_1 = \pi.2,5^2.8$.

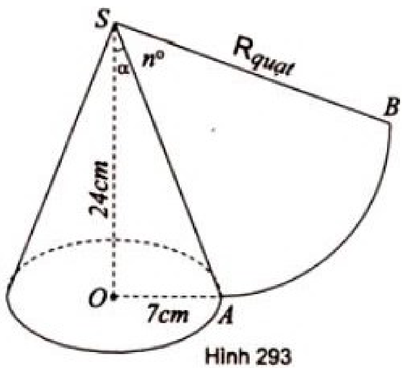
Hình trụ thứ hai là lõi có bán kính đáy là $R_2 = 0,5cm$ và chiều cao là 8cm nên có thể tích $V_2 = \pi.0,5^2.8$.

Vậy thể tích của chỉ sau khi được cuộn đầy là

$$V = V_1 - V_2 = \pi.2,5^2.8 - \pi.0,5^2.8 = \frac{1}{4}.8\pi\,(5^2 - 1) = 48\pi \approx 150,72\ (cm^3).$$

CHỦ ĐỀ 2

10. (H.293) Khi khai triển mặt xung quanh của hình nón ta được hình quạt có độ dài cung $AB = 2\pi R_{nón} = 2\pi.7 = 14\pi$ (cm).



Hình 293

Áp dụng công thức :

$$2\pi R_{nón} = \frac{\pi.R_{quạt}.n}{180^o}.$$

Mà $R_{quạt} = l = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ (cm).

Nên $n = \dfrac{180.14\pi}{25.\pi} = 100,8$.

Vậy sđ $\overset{\frown}{AB} = 100,8^o$ (hay $100^o48'$).

11. (H.280).

Vì OA đối diện với góc α trong tam giác SOA vuông tại O nên

$$\sin\alpha = \frac{OA}{SA} = \frac{R}{l}.$$

Do $S_{quạt} = S_{nón}$ hay $\dfrac{\pi l}{4} = \pi R l \Leftrightarrow l = 4R$.

Vậy $\sin\alpha = \frac{R}{4R} = \frac{1}{4} = 0,25$ nên $\alpha \approx 14^o28'$.

12. Áp dụng công thức $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, có R = 5cm ta còn phải tính h = SO.

Từ giả thiết

$$S_{xq} = \pi R.l = 65\pi \Leftrightarrow l = \frac{65\pi}{5\pi} = 13 \text{ (cm)}.$$

Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác SOA vuông tại O ta được

$SA^2 = AO^2 + OS^2$ hay $13^2 = 5^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 12^2$

$\Rightarrow h = 12$cm.

Vậy thể tích của hình nón là : $V = \frac{1}{3}\pi.5^2.12^2 = 100\pi \text{ (cm}^3)$.

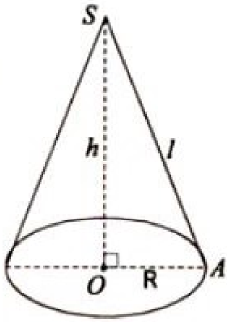
13. (H.294)

a) Áp dụng hệ thức Py-ta-go vào tam giác SOA vuông tại O, ta được

$$l^2 = R^2 + h^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 = l^2 - R^2 = 17^2 - R^2.$$

Lại có $S_{xq} = \pi Rl = 136\pi$ hay $R = \frac{136\pi}{\pi.17} = 8$ (cm).

Nên $h^2 = 17^2 - 8^2 = 15^2 \Leftrightarrow h = 15$cm (vì h > 0).



Hình 294

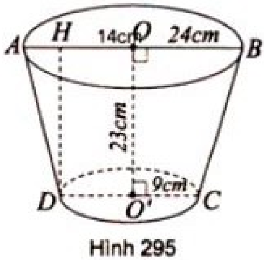
b) Vì $S_{tp} = S_{xq} + S_đ$ nên $S_{tp} = 136\pi + 64\pi = 200\pi \text{ (cm}^2)$.

Thể tích của hình nón là : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.8^2.15 = 320\pi \text{ (cm}^3)$.

14. (H.295)

a) Thể tích của xô là

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2)$$
$$= \frac{1}{3}\pi.23\,(14^2 + 9^2 + 14.9)$$
$$\approx 9702 \text{ (cm}^3) \approx 9,7 \text{ (dm}^3).$$



Hình 295

Vậy dung tích của xô là 9,7 lít.

b) Diện tích tôn để làm xô chính là S_{xq} của nón cụt cộng với diện tích đáy nhỏ. Mà $S_{xq} = \pi(R_1 + R_2)\,l = 23\pi l$ và diện tích đáy nhỏ là :

$$S_{đáy} = \pi.9^2 = 81\pi \text{ (cm)}.$$

Ta phải tính đường sinh l = AD.

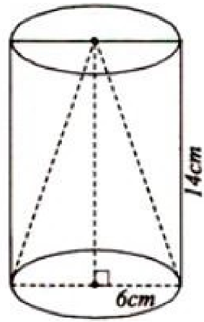
Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho tam giác AHD vuông tại H ta được

$$AD^2 = DH^2 + HA^2 \text{ hay } l^2 = 23^2 + 5^2 = \left(\sqrt{554}\right)^2 \Leftrightarrow l \approx 23{,}5 \text{ (cm)}.$$

Nên $\quad S_{xq} = 23\pi.23{,}5 \approx 540{,}5\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$

Vậy diện tích tôn để làm xô là

$$S = 540{,}5\pi + 81\pi = 621{,}5\pi \text{ (cm}^2\text{)} \approx 1952\text{cm}^2.$$



Hình 296

15. (H.296)

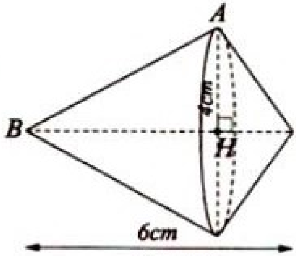
Vì $\quad V_{trụ} = \pi R^2 h$;

$$V_{nón} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Nên thể tích phần gỗ tiện bỏ đi là :

$$V = V_{trụ} - V_{nón} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi.6^2.14 = 336\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

16. (H.297)



Hình 297

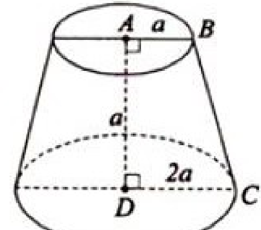
Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC ta được hai hình nón có chung đáy là hình tròn có bán kính R = 4cm, tổng hai chiều cao của hai hình nón là 6cm. Thể tích của hình tạo thành chính là tổng thể tích của hai hình nón trên :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2.BH + \frac{1}{3}\pi R^2.HC$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2.BC = \frac{1}{3}\pi.4^2.6 = 32\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

17. – Khi quay hình thang vuông ABCD một vòng quanh cạnh AD ta được một hình nón cụt có $R_1 = a$, $R_2 = 2a$ và chiều cao h = a (H.298a) nên

$$V_1 = \frac{\pi}{3}a(a^2 + 4a^2 + 2a^2) = \frac{7\pi a^3}{3}.$$

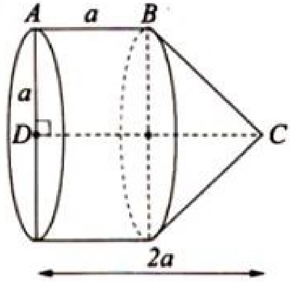


Hình 298a

– Khi quay hình thang vuông ABCD một vòng quanh cạnh CD ta được một hình gồm một hình nón và một hình trụ có chung bán kính đáy R = a và có chiều cao bằng nhau h = a (H.298b).

Nên có thể tích bằng tổng hai thể tích của hình trụ và hình nón :

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi a^2.a + \pi a^2.a = \frac{4\pi a^3}{3}.$$



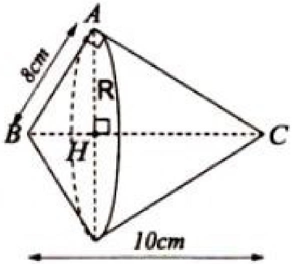
Hình 298b

Vậy tỉ số của V_1 và V_2 là

$$V_2 = \frac{7\pi a^3}{3} : \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{7}{4}.$$

18. (H. 299) Khi quay tam giác ABC vuông tại A một vòng quay cạnh BC được một hình gồm hai hình nón có hai đường sinh lần lượt là AB = 8cm và AC, chung bán kính đáy R = AH (là đường cao kẻ từ A đến BC).

– Nên diện tích toàn phần của hình tạo thành là tổng diện tích xung quanh của hai hình nón.



Hình 299

– Hình nón thứ nhất có diện tích xung quanh là :

$S_1 = \pi.AH.8 = 8\pi AH.$

– Hình nón thứ hai có diện tích xung quanh là :

$S_2 = \pi.AH.AC.$

Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho tam giác ABC vuông tại A, ta được :

$BC^2 = CA^2 + AB^2$ hay $10^2 = CA^2 + 8^2$

$\Leftrightarrow CA^2 = 6^2 \Leftrightarrow CA = 6cm$ (vì CA > 0).

Áp dụng hệ thức về đường cao ah = bc, ta có

$10.AH = 8.6 \Leftrightarrow AH = 4,8$ (cm).

Vậy diện tích toàn phần là :

$S = S_1 + S_2 = \pi AH\,(8 + AC) = \pi.4,8\,(8 + 6) = 67,2\pi\ (cm^2).$

19. (H. 300)

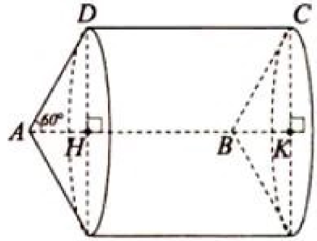
a) Khi quay hình bình hành ABCD một vòng quay cạnh AB thu được một hình gồm một hình trụ do hình chữ nhật DHKC tạo ra, hai hình nón bằng nhau do hai tam giác vuông AHD và BKC bằng nhau tạo ra, nên

$$S = S_{xqtrụ} + 2S_{xqnón} = 2\pi.DH.DC + 2\pi DH.\ DA = 2\pi DH(DC + DA)$$

Gọi DA = x. Vì DH đối diện với góc 60^o của tam giác ADH vuông tại H, nên

$$\sin 60^o = \frac{DH}{DA} \text{ hay}$$

$$DH = DA.\sin 60^o = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$



Hình 300

Vậy : $S = 2\pi\frac{\sqrt{3}}{2}x(2 + x) = \pi \times x\sqrt{3}(x + 2)$.

Tương tự như vậy ta cũng tính được $S_1 = \pi x\sqrt{3}(x + 2)$.

b) Ta thấy : $S = S_1 \Leftrightarrow \pi \times \sqrt{3}(x + 2) = 2\pi\sqrt{3}(x + 2)$

$$\Leftrightarrow x\,(x + 2) = 2\,(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)\,(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (vì } x + 2 > 0).$$

Vậy x = 2 là giá trị cần tìm.

CHỦ ĐỀ 3

20. Gọi bán kính của hình cầu là Rcm thì diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2$ và thể tích của hình cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ vì số đo diện tích bằng 2 lần số đo thể tích nên ta có :

$$4\pi R^2 = 2.\frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow R = \frac{3}{2}\text{ (cm)}.$$

Vậy thể tích của hình cầu đó là :

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9\pi}{2}(cm^3).$$

21. Gọi bán kính của hình cầu là R (m) thì diện tích của mặt cầu là

$$S = 4\pi R^2 = 120\pi \Leftrightarrow R = \sqrt{30}\text{ (m)}.$$

Vậy thể tích của hình cầu đó là : $V = \frac{4}{3}\pi.(\sqrt{30})^3 = 40\pi\sqrt{30}\ (m^3)$.

22. Gọi bán kính đáy hình trụ là R (m) thì chiều cao của hình trụ là h = 2R (m), bán kính nửa hình cầu là R (m).

Bồn chứa xăng gồm hai phần

– Nửa hình cầu có diện tích bề mặt là :

$$S_1 = \frac{1}{2}.4\pi R^2 = 2\pi R^2.$$

– Hình trụ có bán kính đáy R (m) và chiều cao h = 2R có diện tích bề mặt là

$$S_2 = S_{xq} + S_d = 2\pi R.2R + \pi R^2 = 5\pi R^2.$$

Do đó diện tích bề mặt bồn xăng đó là :

$$S = S_1 + S_2 = 7\pi R^2 = 445\ (m^2) \Rightarrow R \approx 4,5\ (m).$$

Thể tích bồn chứa gồm thể tích của hình trụ cộng với một nửa thể tích của hình cầu, do đó có thể tích là :

$$V = \pi R^2.2R + \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi.4,5^3 \approx 763\ (m^3).$$

23. Gọi R là bán kính đáy của hình nón và h là chiều cao của nó thì bán kính của hình cầu cũng là R.

Thể tích của hình nón bằng $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, thể tích của nửa hình cầu là $\frac{2}{3}\pi R^3$.

Nên ta có : $\frac{1}{3}\pi R^2 h = 2.\frac{2}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow \frac{h}{R} = 4.$

24. (H. 292)

a) Thể tích hình cầu bán kính R là : $V_{cầu} = \frac{4}{3}\pi R^3.$

b) Thể tích hình trụ bán kính đáy R, chiều cao 2R là : $V_{trụ} = \pi R^2.2R = 2\pi R^3.$

c) Hiệu giữa thể tích hình trụ và hình cầu là : $V_H = 2\pi R^3 - \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}.$

d) Thể tích hình nón bán kính đáy R, chiều cao 2R là :

$$V_{nón} = \frac{1}{3}\pi R^2.2R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

e) Từ các kết quả trên suy ra : Thể tích hình nón nội tiếp trong một hình trụ bằng trên giữa thể tích hình trụ và thể tích hình cầu nội tiếp hình trụ ấy.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập kiêm Phó Tổng Giám đốc NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng biên tập **NGÔ ÁNH TUYẾT**
Giám đốc CTCP Sách giáo dục tại TP Hà Nội **CẤN HỮU HẢI**

Biên tập nội dung :
NGUYỄN NGỌC TÚ – MAI MINH TUẤN

Sửa bản in :
ĐỖ HỮU PHÚ

Trình bày bìa :
HOÀNG MẠNH DỨA

Thiết kế sách và chế bản :
ĐỖ HỮU PHÚ – MAI MINH TUẤN

Công ty cổ phần Sách giáo dục tại TP. Hà Nội -
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 9 THEO CHỦ ĐỀ - PHẦN HÌNH HỌC

(BÁM SÁT CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG)

Mã số: T9T84s2 - TTS

Số đăng ký KHXB: 57-2012/CXB/678-23/GD

In 3.000 bản (18TK), khổ 17 x 24 cm, tại CTCP In Khoa học Công nghệ mới
Địa chỉ: Số 181 Lạc Long Quân, Nghĩa Đô, Cầu Giấy, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2012.